쎈 정답 및 풀이

⋯→ 정답을 확인하려 할 때에는 「**빠른 정답 찾기**」를 이용하면 편리합니다.

01 다항식의 연산

0001 답 $5x^3-3x^2+x-12$

0002 답 $-12+x-3x^2+5x^3$

0003 답 $2x^2+(3y+1)x-y^2-10y+1$

0004 답 $2x^2+x+1+(3x-10)y-y^2$

0005 답 x^3+x^2+x-4

0006 $(x^2+2xy-3y^2)-(2x^2-5xy-y^2)$
$=x^2+2xy-3y^2-2x^2+5xy+y^2$
$=-x^2+7xy-2y^2$ 답 $-x^2+7xy-2y^2$

0007 $(4x^2+y^2)-(2xy-5y^2)+(x^2-3xy)$
$=4x^2+y^2-2xy+5y^2+x^2-3xy$
$=5x^2-5xy+6y^2$ 답 $5x^2-5xy+6y^2$

0008 $A+B-C$
$=(x^3-3x^2+x-1)+(2x^3+x^2-5)-(-x^2-4x+6)$
$=x^3-3x^2+x-1+2x^3+x^2-5+x^2+4x-6$
$=3x^3-x^2+5x-12$ 답 $3x^3-x^2+5x-12$

0009 $3A-(2B+C)$
$=3A-2B-C$
$=3(x^3-3x^2+x-1)-2(2x^3+x^2-5)-(-x^2-4x+6)$
$=3x^3-9x^2+3x-3-4x^3-2x^2+10+x^2+4x-6$
$=-x^3-10x^2+7x+1$ 답 $-x^3-10x^2+7x+1$

0010 $\underline{(A+2B)-(2A-C)}$ └ 주어진 식을 간단히 정리한 후 대입한다.
$=A+2B-2A+C$
$=-A+2B+C$
$=-(x^3-3x^2+x-1)+2(2x^3+x^2-5)+(-x^2-4x+6)$
$=-x^3+3x^2-x+1+4x^3+2x^2-10-x^2-4x+6$
$=3x^3+4x^2-5x-3$ 답 $3x^3+4x^2-5x-3$

0011 $A+B=x^2-4x+3$ …… ㉠
$A-B=x^2+2x-1$ …… ㉡
㉠+㉡을 하면 $2A=2x^2-2x+2$
$\therefore A=x^2-x+1$ …… ㉢
㉢을 ㉠에 대입하면 $(x^2-x+1)+B=x^2-4x+3$
$\therefore B=(x^2-4x+3)-(x^2-x+1)$
$=x^2-4x+3-x^2+x-1$
$=-3x+2$
답 $A=x^2-x+1$, $B=-3x+2$

0012 $A+B=x^2+2x+5$ …… ㉠
$2A-B=5x^2-11x-2$ …… ㉡
㉠+㉡을 하면 $3A=6x^2-9x+3$
$\therefore A=2x^2-3x+1$ …… ㉢
㉢을 ㉠에 대입하면 $(2x^2-3x+1)+B=x^2+2x+5$
$\therefore B=(x^2+2x+5)-(2x^2-3x+1)$
$=x^2+2x+5-2x^2+3x-1$
$=-x^2+5x+4$
답 $A=2x^2-3x+1$, $B=-x^2+5x+4$

0013 답 $ab^4-3a^3b^2+2ab^3$

0014 $(x^2-2xy+3y)(x-y)$
$=x^3-x^2y-2x^2y+2xy^2+3xy-3y^2$
$=x^3-3x^2y+2xy^2+3xy-3y^2$
답 $x^3-3x^2y+2xy^2+3xy-3y^2$

0015 $(a+2b-c)^2$
$=a^2+(2b)^2+(-c)^2+2\cdot a\cdot 2b+2\cdot 2b\cdot(-c)+2\cdot(-c)\cdot a$
$=a^2+4b^2+c^2+4ab-4bc-2ca$
답 $a^2+4b^2+c^2+4ab-4bc-2ca$

0016 $(x+2)^3=x^3+3\cdot x^2\cdot 2+3\cdot x\cdot 2^2+2^3$
$=x^3+6x^2+12x+8$ 답 $x^3+6x^2+12x+8$

0017 $(3a-1)\underbrace{(9a^2+3a+1)}_{(3a)^2+3a\cdot 1+1^2}=(3a)^3-1^3$
$=27a^3-1$ 답 $27a^3-1$

0018 $(4x^2+2xy+y^2)(4x^2-2xy+y^2)$
$=(2x)^4+(2x)^2y^2+y^4$
$=16x^4+4x^2y^2+y^4$ 답 $16x^4+4x^2y^2+y^4$

0019 $(2a+b-c)(4a^2+b^2+c^2-2ab+bc+2ca)$
$=(2a)^3+b^3+(-c)^3-3\cdot 2a\cdot b\cdot(-c)$
$=8a^3+b^3-c^3+6abc$ 답 $8a^3+b^3-c^3+6abc$

0020 $(x-3)^3+(x+4)(x^2-4x+16)$
$=x^3-9x^2+27x-27+x^3+64$
$=2x^3-9x^2+27x+37$ 답 $2x^3-9x^2+27x+37$

0021 $(x-3y+1)^2-(x+1)(x-2)(x-3)$
$=x^2+9y^2+1-6xy-6y+2x-(x^3-4x^2+x+6)$
$=x^2+9y^2+1-6xy-6y+2x-x^3+4x^2-x-6$
$=-x^3+5x^2-6xy+9y^2+x-6y-5$
답 $-x^3+5x^2-6xy+9y^2+x-6y-5$

0022 $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=3^2-2\cdot(-10)=29$ 답 29

0023 $a^2+b^2=(a-b)^2+2ab=(-4)^2+2\cdot 3=22$ 답 22

0024 $(a-b)^2=(a+b)^2-4ab=2^2-4\cdot(-7)=32$ 답 32

0025 $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$
$=3^3-3\cdot(-2)\cdot3=45$ 답 45

0026 $a^3-b^3=(a-b)^3+3ab(a-b)$
$=1^3+3\cdot4\cdot1=13$ 답 13

0027 $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$
$=2^2-2\cdot(-1)=6$ 답 6

0028 **0027**에서 $a^2+b^2+c^2=6$이므로
$a^3+b^3+c^3=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+3abc$
$=2\cdot\{6-(-1)\}+3\cdot(-2)$
$=8$ 답 8

0029 $x^2+\dfrac{1}{x^2}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2=3^2-2=7$ 답 7

0030 $x^3+\dfrac{1}{x^3}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=3^3-3\cdot3=18$ 답 18

0031 $x+y=(1+\sqrt{2})+(1-\sqrt{2})=2$,
$xy=(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})=-1$이므로
$x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$
$=2^3-3\cdot(-1)\cdot2=14$ 답 14

0032 $x-y=(1+\sqrt{2})-(1-\sqrt{2})=2\sqrt{2}$,
$xy=(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})=-1$이므로
$x^3-y^3=(x-y)^3+3xy(x-y)$
$=(2\sqrt{2})^3+3\cdot(-1)\cdot2\sqrt{2}=10\sqrt{2}$ 답 $10\sqrt{2}$

0033

$$
\begin{array}{r}
x^2+x+3 \\
x-3\,\overline{)\,x^3-2x^2+5} \\
\underline{x^3-3x^2} \\
x^2 \\
\underline{x^2-3x} \\
3x+5 \\
\underline{3x-9} \\
14
\end{array}
$$

$\therefore$ 몫: x^2+x+3, 나머지: 14

답 몫: x^2+x+3, 나머지: 14

0034

$$
\begin{array}{r}
4x-3 \\
x^2+2x-3\,\overline{)\,4x^3+5x^2-3x-1} \\
\underline{4x^3+8x^2-12x} \\
-3x^2+9x-1 \\
\underline{-3x^2-6x+9} \\
15x-10
\end{array}
$$

$\therefore$ 몫: $4x-3$, 나머지: $15x-10$

답 몫: $4x-3$, 나머지: $15x-10$

0035

$$
\begin{array}{r}
x^2-3x-4 \\
x^2-x-6\,\overline{)\,x^4-4x^3-7x^2+22x+24} \\
\underline{x^4-x^3-6x^2} \\
-3x^3-x^2+22x \\
\underline{-3x^3+3x^2+18x} \\
-4x^2+4x+24 \\
\underline{-4x^2+4x+24} \\
0
\end{array}
$$

$\therefore$ 몫: x^2-3x-4, 나머지: 0

답 몫: x^2-3x-4, 나머지: 0

0036

$$
\begin{array}{r}
x^2+x-3 \\
2x-1\,\overline{)\,2x^3+x^2-7x+7} \\
\underline{2x^3-x^2} \\
2x^2-7x \\
\underline{2x^2-x} \\
-6x+7 \\
\underline{-6x+3} \\
4
\end{array}
$$

$\therefore 2x^3+x^2-7x+7=(2x-1)(x^2+x-3)+4$

답 풀이 참조

0037

$$
\begin{array}{r}
3x-1 \\
x^2+2\,\overline{)\,3x^3-x^2+4x+3} \\
\underline{3x^3+6x} \\
-x^2-2x+3 \\
\underline{-x^2-2} \\
-2x+5
\end{array}
$$

$\therefore 3x^3-x^2+4x+3=(x^2+2)(3x-1)-2x+5$

답 풀이 참조

0038 $P(x)=(x^2-5)(x+2)-3$
$=x^3+2x^2-5x-10-3$
$=x^3+2x^2-5x-13$ 답 $x^3+2x^2-5x-13$

0039 $P(x)=(x^2-x+1)(x-1)-2x+4$
$=x^3-x^2-x^2+x+x-1-2x+4$
$=x^3-2x^2+3$ 답 x^3-2x^2+3

유형 **01** **다항식의 덧셈과 뺄셈** 본책 12쪽

다항식의 덧셈과 뺄셈은 괄호를 풀고 동류항끼리 모아서 간단히 한다. 이때 다음을 이용한다.
① 두 다항식 A, B에 대한 식을 계산하는 경우
➡ 먼저 구하는 식을 간단히 한 후 A, B를 대입한다.
② 세 다항식 A, B, X에 대한 등식이 주어진 경우
➡ $X=(A, B$에 대한 식$)$ 꼴로 변형한 후 A, B를 대입한다.
③ $A+B$, $A-B$와 같이 A, B에 대한 식이 주어진 경우
➡ 연립일차방정식의 해를 구하는 것과 같은 방법으로 A, B를 구한다.

0040 $2X-B=A-5B$에서
$2X=A-4B$

$\therefore X=\frac{1}{2}A-2B$

$=\frac{1}{2}(2x^2-4xy+6y^2)-2(-x^2+2xy+4y^2)$

$=x^2-2xy+3y^2+2x^2-4xy-8y^2$

$=3x^2-6xy-5y^2$ 답 ③

0041 $A-2(A-B)+C$

$=-A+2B+C$

$=-(2x^3-x^2+3x+4)+2(x^3+x-2)$

$+(-x^3+3x^2+5x-1)$

$=-2x^3+x^2-3x-4+2x^3+2x-4-x^3+3x^2+5x-1$

$=-x^3+4x^2+4x-9$ 답 ③

0042 $(x^2+2x-y+1)*(2x-y-5)$

$=3(x^2+2x-y+1)-(2x-y-5)$

$=3x^2+6x-3y+3-2x+y+5$

$=3x^2+4x-2y+8$ 답 ④

0043 $A+B=-x^2+5xy+y^2$ …… ㉠

$B+C=2x^2-3xy$ …… ㉡

$C+A=x^2+6xy-7y^2$ …… ㉢

㉠+㉡+㉢을 하면

$2(A+B+C)=2x^2+8xy-6y^2$

$\therefore A+B+C=x^2+4xy-3y^2$ 답 ④

0044 $A-B=-3x^2+2xy-2y^2$ …… ㉠

$2A+B=xy-4y^2$ …… ㉡

㉠+㉡을 하면

$3A=-3x^2+3xy-6y^2$

$\therefore A=-x^2+xy-2y^2$ ··· ❶

이것을 ㉠에 대입하면

$(-x^2+xy-2y^2)-B=-3x^2+2xy-2y^2$

$\therefore B=(-x^2+xy-2y^2)-(-3x^2+2xy-2y^2)$

$=-x^2+xy-2y^2+3x^2-2xy+2y^2$

$=2x^2-xy$ ··· ❷

$\therefore A-5B=(-x^2+xy-2y^2)-5(2x^2-xy)$

$=-x^2+xy-2y^2-10x^2+5xy$

$=-11x^2+6xy-2y^2$ ··· ❸

답 $-11x^2+6xy-2y^2$

채점 기준	비율
❶ 다항식 A를 구할 수 있다.	40 %
❷ 다항식 B를 구할 수 있다.	40 %
❸ $A-5B$를 계산할 수 있다.	20 %

0045 (다): $3x^2-6x+9-(-3x+2)-(-2x^2-5x)$

$=3x^2-6x+9+3x-2+2x^2+5x$

$=5x^2+2x+7$

(라): $3x^2-6x+9-(5x^2+2x+7)-(-3x^2-6x-1)$

$=3x^2-6x+9-5x^2-2x-7+3x^2+6x+1$

$=x^2-2x+3$

(나): $3x^2-6x+9-(-2x^2-5x)-(x^2-2x+3)$

$=3x^2-6x+9+2x^2+5x-x^2+2x-3$

$=4x^2+x+6$

따라서 구하는 합은

$(4x^2+x+6)+(5x^2+2x+7)=9x^2+3x+13$

답 $9x^2+3x+13$

유형 02 다항식의 전개식에서 계수 구하기 본책 13쪽

다항식의 곱으로 나타내어진 다항식의 전개식에서 특정한 항의 계수를 구할 때에는 분배법칙을 이용하여 필요한 항이 나오도록 각 다항식에서 하나씩 선택하여 곱한다.

예 $(1-x+x^2)(3-x)$의 전개식에서 x항은

$1\cdot(-x)+(-x)\cdot 3=-4x$

따라서 x의 계수는 -4이다.

0046 $(2x^3+6x^2-8x-1)(x^2+5x+10)$의 전개식에서 x^2항은

$6x^2\cdot 10+(-8x)\cdot 5x+(-1)\cdot x^2=19x^2$

따라서 x^2의 계수는 19이다. 답 ④

0047 $(a-b+6)(4a+b-1)$의 전개식에서 ab항은

$a\cdot b+(-b)\cdot 4a=-3ab$

따라서 ab의 계수는 -3이다. 답 ②

0048 $(3x-1)^2(2x+5)^2=(9x^2-6x+1)(4x^2+20x+25)$

이 식의 전개식에서 x^3항은

$9x^2\cdot 20x+(-6x)\cdot 4x^2=156x^3$

따라서 x^3의 계수는 156이다. 답 156

0049 $(2x^2+x-3)(x^2+2x+k)$의 전개식에서 x항은

$x\cdot k+(-3)\cdot 2x=(k-6)x$ ··· ❶

이때 x의 계수가 5이므로 $k-6=5$ $\therefore k=11$ ··· ❷

답 11

채점 기준	비율
❶ 주어진 다항식의 전개식에서 x항을 구할 수 있다.	70 %
❷ k의 값을 구할 수 있다.	30 %

0050 $(1+x+2x^2+\cdots+100x^{100})^2$

$=(1+x+2x^2+\cdots+100x^{100})(1+x+2x^2+\cdots+100x^{100})$

이 식의 전개식에서 x^3항은

$1\cdot 3x^3+x\cdot 2x^2+2x^2\cdot x+3x^3\cdot 1=10x^3$

따라서 x^3의 계수는 10이다. 답 10

SSEN 특강

$(1+x+2x^2+\cdots+100x^{100})^2$을 전개할 때, $4x^4$, $5x^5$, $\cdots$, $100x^{100}$ 항은 x^3의 계수에 영향을 주지 않으므로 $(1+x+2x^2+3x^3)^2$의 전개식에서 x^3의 계수를 구해도 된다.

0051 $(x+1)(x+2)(x+3)\cdots(x+10)$에서 임의의 9개의 일차식에서는 x항을, 나머지 1개의 일차식에서는 상수항을 선택하여 곱하면 x^9항이 되므로 이 식의 전개식에서 x^9항은

$$\begin{aligned} & x^9\cdot 10+x^9\cdot 9+x^9\cdot 8+\cdots+x^9\cdot 2+x^9\cdot 1 \\ &=(1+2+\cdots+8+9+10)x^9 \\ &=55x^9 \end{aligned}$$

따라서 x^9의 계수는 55이다. 답 ③

유형 03 곱셈 공식을 이용한 다항식의 전개 본책 13쪽

다항식의 곱셈은 곱셈 공식을 이용하면 빠르게 전개할 수 있다. 이때 곱셈 공식이 생각나지 않으면 분배법칙을 이용하여 전개한다.

0052 ⑤ $(x-3y)^3=x^3-9x^2y+27xy^2-27y^3$ 답 ⑤

0053 $(x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1)$

$$\begin{aligned} &=(x^2-1)(x^2+1)(x^4+1) \\ &=(x^4-1)(x^4+1)=x^8-1 \\ &=30-1=29 \end{aligned}$$

답 ①

0054 $(x-\sqrt{2})^3(x+\sqrt{2})^3=\{(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})\}^3$

$$\begin{aligned} &=(x^2-2)^3 \\ &=x^6-6x^4+12x^2-8 \end{aligned}$$

따라서 x^2의 계수는 12이다. 답 12

0055 $(a+b+c)^2+(-a+b+c)^2+(a-b+c)^2+(a+b-c)^2$

$$\begin{aligned} &=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca \\ &\quad+a^2+b^2+c^2-2ab+2bc-2ca \\ &\quad+a^2+b^2+c^2-2ab-2bc+2ca \\ &\quad+a^2+b^2+c^2+2ab-2bc-2ca \\ &=4a^2+4b^2+4c^2 \end{aligned}$$

답 ②

0056 $\overbrace{(x^2-9)}^{(x+3)(x-3)}(x^2+3x+9)(x^2-3x+9)$

$$\begin{aligned} &=\{(x+3)(x^2-3x+9)\}\{(x-3)(x^2+3x+9)\} \\ &=(x^3+27)(x^3-27) \\ &=x^6-729 \end{aligned}$$

답 x^6-729

다른 풀이 $(x^2-9)(x^2+3x+9)(x^2-3x+9)$

$$\begin{aligned} &=(x^2-9)\{(x^2+3x+9)(x^2-3x+9)\} \\ &=(x^2-9)(x^4+9x^2+81) \\ &=x^6-729 \end{aligned}$$

0057 $a+b+c=2$에서

$a+b=2-c,\ b+c=2-a,\ c+a=2-b$

이므로

$$\begin{aligned} & (a+b)(b+c)(c+a) \\ &=(2-c)(2-a)(2-b) \\ &=8-4(a+b+c)+2(ab+bc+ca)-abc \\ &=8-4\cdot 2+2\cdot(-7)-(-2) \\ &=-12 \end{aligned}$$

답 -12

유형 04 공통부분이 있는 다항식의 전개 본책 14쪽

공통부분이 있는 다항식의 곱셈은 다음과 같은 순서로 한다.

(i) 공통부분을 t로 치환한다.

(ii) (i)의 식을 곱셈 공식을 이용하여 전개한다.

(iii) (ii)의 식에 t 대신 공통부분을 대입한다.

참고 ( )( )( )( ) 꼴은 공통부분이 생기도록 짝을 지어 곱한다.

0058 $3a-b=t$로 놓으면

$$\begin{aligned} (\text{주어진 식})&=(t-2c)(t+2c)=t^2-4c^2 \\ &=(3a-b)^2-4c^2 \\ &=9a^2-6ab+b^2-4c^2 \end{aligned}$$

답 $9a^2-6ab+b^2-4c^2$

0059 $(x-3)(x-2)(x+1)(x+2)$

$$\begin{aligned} &=\underline{\{(x-3)(x+2)\}\{(x-2)(x+1)\}} \\ &=(x^2-x-6)(x^2-x-2) \end{aligned}$$

상수항끼리의 합이 같아지도록 두 개씩 짝을 지어 곱한다.

$x^2-x=t$로 놓으면

$$\begin{aligned} (\text{주어진 식})&=(t-6)(t-2)=t^2-8t+12 \\ &=(x^2-x)^2-8(x^2-x)+12 \\ &=x^4-2x^3+x^2-8x^2+8x+12 \\ &=x^4-2x^3-7x^2+8x+12 \end{aligned}$$

따라서 $a=-2,\ b=-7,\ c=8$이므로

$a-b-c=-3$ 답 ①

0060 $(x+y+z)(y+z-x)(z+x-y)(x+y-z)$

$$\begin{aligned} &=\{(y+z)+x\}\{(y+z)-x\}\{x-(y-z)\}\{x+(y-z)\} \\ &=\{(y+z)^2-x^2\}\{x^2-(y-z)^2\} \\ &=-\{x^2-(y+z)^2\}\{x^2-(y-z)^2\} \\ &=-x^4+\{(y+z)^2+(y-z)^2\}x^2-\{(y+z)(y-z)\}^2 \\ &=-x^4+(y^2+2yz+z^2+y^2-2yz+z^2)x^2-(y^2-z^2)^2 \\ &=-x^4+2(y^2+z^2)x^2-(y^4-2y^2z^2+z^4) \\ &=-x^4-y^4-z^4+2x^2y^2+2y^2z^2+2z^2x^2 \end{aligned}$$

따라서 x^2y^2의 계수는 2, z^2x^2의 계수는 2이므로 구하는 합은

$2+2=4$ 답 4

0061 $3+2k=a,\ 3-2k=b$로 놓으면

$$\begin{aligned} (\text{주어진 식})&=(a^3+b^3)^2-(a^3-b^3)^2 \\ &=a^6+2a^3b^3+b^6-(a^6-2a^3b^3+b^6)=4a^3b^3 \\ &=4(3+2k)^3(3-2k)^3 \\ &=4(9-4k^2)^3 \\ &=4\cdot(9-4\cdot 2)^3=4 \end{aligned}$$

답 ④

유형 05 곱셈 공식의 변형; x^2+y^2, x^3+y^3의 값 본책 15쪽

x^2+y^2, x^3+y^3, x^4+y^4의 값을 구할 때에는 $x\pm y$, xy의 값을 이용할 수 있도록 식을 변형한다.

① $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=(x-y)^2+2xy$

② $x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$

③ $x^4+y^4=(x^2)^2+(y^2)^2=(x^2+y^2)^2-2x^2y^2$
$=\{(x+y)^2-2xy\}^2-2(xy)^2$

01 다항식의 연산

0062 $x^2+y^2=(x-y)^2+2xy$에서

$3=2^2+2xy \qquad \therefore xy=-\frac{1}{2}$

$\therefore x^3-y^3=(x-y)^3+3xy(x-y)$

$=2^3+3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot 2=5$

답 ⑤

0063 $x+y=4$, $xy=-2$이므로

$\frac{y}{x}+\frac{x}{y}=\frac{x^2+y^2}{xy}=\frac{(x+y)^2-2xy}{xy}$

$=\frac{4^2-2\cdot(-2)}{-2}=-10$

답 -10

0064 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=3$에서 $\qquad \frac{a+b}{ab}=3$

이때 $ab=2$이므로 $\qquad \frac{a+b}{2}=3 \qquad \therefore a+b=6$

따라서 $(a-b)^2=(a+b)^2-4ab=6^2-4\cdot 2=28$이므로

$a-b=2\sqrt{7}$ ($\because a>b$)

답 ②

0065 $x^4+y^4=(x^2+y^2)^2-2x^2y^2$ …… ㉠

$x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$이므로

$10=2^3-3\cdot xy\cdot 2 \qquad \therefore xy=-\frac{1}{3}$

$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=2^2-2\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{14}{3}$이므로 ㉠에서

$x^4+y^4=\left(\frac{14}{3}\right)^2-2\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^2=\frac{194}{9}$

따라서 $p=9$, $q=194$이므로 $\qquad p+q=203$

답 203

0066 $\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{x}=\frac{x^3+y^3}{xy}$

$=\frac{(x+y)^3-3xy(x+y)}{xy}$ …… ㉠ ··· ❶

$x^2+y^2=(7+4\sqrt{3})+(7-4\sqrt{3})=14$이고

$x^2y^2=(7+4\sqrt{3})(7-4\sqrt{3})=49-48=1$에서

$xy=1$ ($\because x>0,\ y>0$)

$(x+y)^2=x^2+y^2+2xy=14+2\cdot 1=16$이므로

$x+y=4$ ($\because x>0,\ y>0$) ··· ❷

따라서 ㉠에서 $\qquad \frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{x}=\frac{4^3-3\cdot 1\cdot 4}{1}=52$ ··· ❸

답 52

채점 기준	비율
❶ 주어진 식을 변형할 수 있다.	30 %
❷ $x+y$, xy의 값을 구할 수 있다.	50 %
❸ $\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{x}$의 값을 구할 수 있다.	20 %

0067 $(x^2+y^2)(x^3+y^3)=x^5+x^2y^3+x^3y^2+y^5$

$=x^5+y^5+x^2y^2(x+y)$

이므로

$x^5+y^5=(x^2+y^2)(x^3+y^3)-x^2y^2(x+y)$ …… ㉠

이때

$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$

$=(-1)^2-2\cdot(-3)=7,$

$x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$

$=(-1)^3-3\cdot(-3)\cdot(-1)=-10$

이므로 ㉠에서

$x^5+y^5=7\cdot(-10)-(-3)^2\cdot(-1)=-61$

한편

$x^6+y^6=(x^3)^2+(y^3)^2=(x^3+y^3)^2-2x^3y^3$

$=(-10)^2-2\cdot(-3)^3=154$

이므로

$x^5+y^5+x^6+y^6=93$

답 ②

유형 06 곱셈 공식의 변형; $x^2+\frac{1}{x^2}$, $x^3+\frac{1}{x^3}$의 값

본책 15쪽

$x^2+\frac{1}{x^2}$, $x^3+\frac{1}{x^3}$, $x^3-\frac{1}{x^3}$의 값을 구할 때에는 $x\pm\frac{1}{x}$의 값을 이용할 수 있도록 식을 변형한다.

① $x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2$

② $x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\frac{1}{x}\right)$

③ $x^3-\frac{1}{x^3}=\left(x-\frac{1}{x}\right)^3+3\left(x-\frac{1}{x}\right)$

0068 $x\neq 0$이므로 $x^2-2x-1=0$의 양변을 x로 나누면

$x-2-\frac{1}{x}=0 \qquad \therefore x-\frac{1}{x}=2$

$\therefore x^3-\frac{1}{x^3}=\left(x-\frac{1}{x}\right)^3+3\left(x-\frac{1}{x}\right)$

$=2^3+3\cdot 2=14$

답 14

참고 $x=0$을 $x^2-2x-1=0$에 대입하면 $-1\neq 0$이므로 $x\neq 0$이다.

0069 $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=x^2+\frac{1}{x^2}+2=4+2=6$

그런데 $x>0$이므로 $\qquad x+\frac{1}{x}=\sqrt{6}$

$\therefore x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\frac{1}{x}\right)$

$=(\sqrt{6})^3-3\cdot\sqrt{6}=3\sqrt{6}$

답 ①

0070 $x\neq 0$이므로 $x^2-3x+1=0$의 양변을 x로 나누면

$x-3+\frac{1}{x}=0 \qquad \therefore x+\frac{1}{x}=3$ ··· ❶

따라서 $x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2=3^2-2=7,$

$x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\frac{1}{x}\right)=3^3-3\cdot 3=18$이므로 ··· ❷

$x^3+3x^2-7+\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^3}=x^3+\frac{1}{x^3}+3\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-7$

$=18+3\cdot 7-7=32$ ··· ❸

답 32

채점 기준	비율
❶ $x+\frac{1}{x}$의 값을 구할 수 있다.	20 %
❷ $x^2+\frac{1}{x^2}$, $x^3+\frac{1}{x^3}$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ 주어진 식의 값을 구할 수 있다.	40 %

0071 $\frac{x^6+2x^4+2x^2+1}{x^3}=x^3+2x+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^3}$

$=x^3+\frac{1}{x^3}+2\left(x+\frac{1}{x}\right)$

$=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\frac{1}{x}\right)+2\left(x+\frac{1}{x}\right)$

$=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-\left(x+\frac{1}{x}\right)$ ...... ㉠

$\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2=\left(x^2-\frac{1}{x^2}\right)^2+4=(-4\sqrt{2})^2+4=36$이고 $x^2>0$이므로 $x^2+\frac{1}{x^2}=6$

$\therefore \left(x+\frac{1}{x}\right)^2=x^2+\frac{1}{x^2}+2=6+2=8$

그런데 $x>0$이므로 $x+\frac{1}{x}=2\sqrt{2}$

따라서 ㉠에서

(주어진 식)$=(2\sqrt{2})^3-2\sqrt{2}=14\sqrt{2}$ 답 $14\sqrt{2}$

유형 07 곱셈 공식의 변형 ; $a^2+b^2+c^2$, $a^3+b^3+c^3$의 값

본책 16쪽

① $a^2+b^2+c^2$, $a+b+c$, $ab+bc+ca$ 중 어느 두 값을 알면 곱셈 공식

$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$

를 이용하여 나머지 한 값을 구할 수 있다.

② $a^3+b^3+c^3$의 값을 구할 때에는 곱셈 공식

$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$
$=a^3+b^3+c^3-3abc$

를 이용한다.

0072 $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$에서

$3^2=15+2(ab+bc+ca)$ $\therefore ab+bc+ca=-3$

$\therefore \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{ab+bc+ca}{abc}$

$=\frac{-3}{-1}=3$ 답 ⑤

0073 $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$에서

$(\sqrt{2})^2=a^2+b^2+c^2+2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)$ $\therefore a^2+b^2+c^2=3$

$\therefore a^3+b^3+c^3=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$
$+3abc$

$=\sqrt{2}\cdot\left\{3-\left(-\frac{1}{2}\right)\right\}+3\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$=\frac{7\sqrt{2}}{2}-\frac{3\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{2}$ 답 ④

0074 $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}$

$=\frac{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}{a^2b^2c^2}$

$=\frac{(ab)^2+(bc)^2+(ca)^2}{(abc)^2}$

$=\frac{(ab+bc+ca)^2-2ab^2c-2bc^2a-2ca^2b}{(abc)^2}$

$=\frac{(ab+bc+ca)^2-2abc(a+b+c)}{(abc)^2}$ ...... ㉠ ⋯ ❶

$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$에서

$4^2=6+2(ab+bc+ca)$ $\therefore ab+bc+ca=5$

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{ab+bc+ca}{abc}=\frac{5}{2}$이므로

$\frac{5}{abc}=\frac{5}{2}$ $\therefore abc=2$ ⋯ ❷

따라서 ㉠에서

$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\frac{5^2-2\cdot2\cdot4}{2^2}=\frac{9}{4}$ ⋯ ❸

답 $\frac{9}{4}$

채점 기준	비율
❶ 주어진 식을 변형할 수 있다.	30 %
❷ $ab+bc+ca$, abc의 값을 구할 수 있다.	50 %
❸ $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}$의 값을 구할 수 있다.	20 %

0075 $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$

$=\frac{1}{2}(2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca)$

$=\frac{1}{2}\{(a^2-2ab+b^2)+(b^2-2bc+c^2)+(a^2-2ca+c^2)\}$

$=\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(a-c)^2\}$ ...... ㉠

$a-b=4$, $b-c=-1$을 변끼리 더하면

$a-c=3$

따라서 ㉠에서

(주어진 식)$=\frac{1}{2}\cdot\{4^2+(-1)^2+3^2\}$

$=\frac{1}{2}\cdot26=13$ 답 13

유형 08 곱셈 공식을 이용한 수의 계산

본책 16쪽

곱셈 공식을 이용할 수 있도록 식을 변형하거나 하나의 수를 두 수의 합 또는 차로 나타낸다. 이때 반복되는 수는 같은 문자로 생각한다.

0076 $9\times11\times101\times10001$

$=(10-1)(10+1)(100+1)(10000+1)$

$=(10^2-1)(10^2+1)(10^4+1)$

$=(10^4-1)(10^4+1)$

$=10^8-1$ 답 ②

0077 $a=\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\left(1+\frac{1}{2^4}\right)\left(1+\frac{1}{2^8}\right)$

$$=2\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\left(1+\frac{1}{2^4}\right)\left(1+\frac{1}{2^8}\right)$$

$1=2\cdot\frac{1}{2}$

$=2\left(1-\frac{1}{2}\right)$

$$=2\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\left(1+\frac{1}{2^4}\right)\left(1+\frac{1}{2^8}\right)$$

$$=2\left(1-\frac{1}{2^4}\right)\left(1+\frac{1}{2^4}\right)\left(1+\frac{1}{2^8}\right)$$

$$=2\left(1-\frac{1}{2^8}\right)\left(1+\frac{1}{2^8}\right)$$

$$=2\left(1-\frac{1}{2^{16}}\right)$$

이므로

$\frac{a}{2}=1-\frac{1}{2^{16}}$, $\quad \frac{1}{2^{16}}=\frac{2-a}{2}$

$\therefore 2^{16}=\frac{2}{2-a}$ 답 ②

0078 $198^2+299\times301=(200-2)^2+(300-1)(300+1)$

$=40000-800+4+90000-1$

$=129203$

이므로 여섯 자리 자연수이다.

$\therefore n=6$ 답 ②

0079 $a=\sqrt{2021}$, $b=2020$이라 하면 주어진 수는

$$\frac{(a+b)^3-(a-b)^3}{b}$$

$$=\frac{(a^3+3a^2b+3ab^2+b^3)-(a^3-3a^2b+3ab^2-b^3)}{b}$$

$$=\frac{6a^2b+2b^3}{b}$$

$=6a^2+2b^2$

$=6\cdot2021+2\cdot2020^2$

$6\cdot2021$의 일의 자리의 숫자는 6, $2\cdot2020^2$의 일의 자리의 숫자는 0이므로 구하는 일의 자리의 숫자는

$6+0=6$ 답 6

참고 일의 자리의 숫자를 구하는 문제이므로 수를 모두 계산할 필요는 없다.

유형 09 다항식의 나눗셈; 몫과 나머지 본책 17쪽

다항식의 나눗셈은 각 다항식을 내림차순으로 정리한 후 자연수의 나눗셈과 같은 방법으로 계산한다.

0080

$$
\begin{array}{r}
2x-1 \\
x^2-x-1\,\overline{\smash{)}\,2x^3-3x^2+x-3} \\
\underline{2x^3-2x^2-2x} \\
-x^2+3x-3 \\
\underline{-x^2+x+1} \\
2x-4
\end{array}
$$

따라서 $Q(x)=2x-1$, $R(x)=2x-4$이므로

$Q(2)+R(1)=3+(-2)=1$ 답 1

0081 $a=2$, $b=2$, $c=5$, $d=-3$이므로

$a+b+c+d=6$ 답 6

0082 ④

$$
\begin{array}{r}
2x+1 \\
2x^2+2x-1\,\overline{\smash{)}\,4x^3+6x^2-x+1} \\
\underline{4x^3+4x^2-2x} \\
2x^2+x+1 \\
\underline{2x^2+2x-1} \\
-x+2
\end{array}
$$

➡ 몫: $2x+1$, 나머지: $-x+2$ 답 ④

0083

$$
\begin{array}{r}
x-1 \\
x^2+2x-1\,\overline{\smash{)}\,x^3+x^2-5x+4} \\
\underline{x^3+2x^2-x} \\
-x^2-4x+4 \\
\underline{-x^2-2x+1} \\
-2x+3
\end{array}
$$

따라서 몫은 $x-1$, 나머지는 $-2x+3$이므로

$a=1$, $b=-1$, $c=-2$, $d=3$

$\therefore ab-cd=5$ 답 5

유형 10 다항식의 나눗셈; $A=BQ+R$ 본책 17쪽

다항식 A를 다항식 $B(B\neq0)$로 나누었을 때의 몫을 Q, 나머지를 R라 하면

$A=BQ+R$ (R는 상수 또는 (R의 차수)<(B의 차수))

0084 $x^4-3x^2+x-5=A(x^2-x+3)-7x+10$이므로

$A(x^2-x+3)=x^4-3x^2+x-5-(-7x+10)$

$=x^4-3x^2+8x-15$

$\therefore A=(x^4-3x^2+8x-15)\div(x^2-x+3)$

$$
\begin{array}{r}
x^2+x-5 \\
x^2-x+3\,\overline{\smash{)}\,x^4-3x^2+8x-15} \\
\underline{x^4-x^3+3x^2} \\
x^3-6x^2+8x \\
\underline{x^3-x^2+3x} \\
-5x^2+5x-15 \\
\underline{-5x^2+5x-15} \\
0
\end{array}
$$

$\therefore A=x^2+x-5$ 답 ③

0085 $P(x)=(x-2)(2x+3)+3=2x^2-x-3$

$$
\begin{array}{r}
2x-5 \\
x+2\,\overline{\smash{)}\,2x^2-x-3} \\
\underline{2x^2+4x} \\
-5x-3 \\
\underline{-5x-10} \\
7
\end{array}
$$

따라서 $P(x)$를 $x+2$로 나누었을 때의 몫은 $2x-5$, 나머지는 7이다.

답 몫: $2x-5$, 나머지: 7

0086

$$\begin{array}{r|l} & x-1 \\ \hline x^2-x+b & x^3-2x^2+ax-3 \\ & x^3-x^2+bx \\ \hline & -x^2+(a-b)x-3 \\ & -x^2+x-b \\ \hline & (a-b-1)x-3+b \end{array}$$

이때 나머지가 0이어야 하므로

$a-b-1=0,\ -3+b=0$

따라서 $a=4,\ b=3$이므로

$ab=12$ 답 12

0087

$$\begin{array}{r|l} & 2x^2+x-3 \\ \hline x^2-x-1 & 2x^4-x^3-6x^2+2x+5 \\ & 2x^4-2x^3-2x^2 \\ \hline & x^3-4x^2+2x \\ & x^3-x^2-x \\ \hline & -3x^2+3x+5 \\ & -3x^2+3x+3 \\ \hline & 2 \end{array}$$

$\therefore 2x^4-x^3-6x^2+2x+5=(x^2-x-1)(2x^2+x-3)+2$

이때 $x^2-x-1=0$이므로 구하는 식의 값은 2이다. 답 ④

유형 **11** **몫과 나머지의 변형** 본책 18쪽

다항식 $P(x)$를 $x-\frac{1}{a}\,(a\neq0)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R라 하면

$$\begin{aligned} P(x)&=\left(x-\frac{1}{a}\right)Q(x)+R \\ &=\frac{1}{a}(ax-1)Q(x)+R \\ &=(ax-1)\cdot\frac{1}{a}Q(x)+R \end{aligned}$$

➡ $P(x)$를 $ax-1$로 나누었을 때의 몫은 $\frac{1}{a}Q(x)$, 나머지는 R이다.

0088 $P(x)$를 $x-\frac{1}{3}$로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 R이므로

$$\begin{aligned} P(x)&=\left(x-\frac{1}{3}\right)Q(x)+R \\ &=\frac{1}{3}(3x-1)Q(x)+R \\ &=(3x-1)\cdot\frac{1}{3}Q(x)+R \end{aligned}$$

따라서 $P(x)$를 $3x-1$로 나누었을 때의 몫은 $\frac{1}{3}Q(x)$, 나머지는 R이다. 답 ②

0089 $P(x)$를 $ax+b$로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 R이므로

$P(x)=(ax+b)Q(x)+R$ ⋯ ❶

$=a\left(x+\frac{b}{a}\right)Q(x)+R$

$=\left(x+\frac{b}{a}\right)\cdot aQ(x)+R$ ⋯ ❷

따라서 $P(x)$를 $x+\frac{b}{a}$로 나누었을 때의 몫은 $aQ(x)$, 나머지는 R이다. ⋯ ❸

답 몫: $aQ(x)$, 나머지: R

채점 기준	비율
❶ $P(x)$를 $ax+b$에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30 %
❷ $P(x)$를 $x+\frac{b}{a}$에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	50 %
❸ $P(x)$를 $x+\frac{b}{a}$로 나누었을 때의 몫과 나머지를 구할 수 있다.	20 %

0090 $P(x)$를 $2x+1$로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 R이므로

$P(x)=(2x+1)Q(x)+R$

$$\begin{aligned} \therefore xP(x)&=x(2x+1)Q(x)+Rx \\ &=2x\left(x+\frac{1}{2}\right)Q(x)+R\left(x+\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}R \\ &=\left(x+\frac{1}{2}\right)\{2xQ(x)+R\}-\frac{1}{2}R \end{aligned}$$

따라서 $xP(x)$를 $x+\frac{1}{2}$로 나누었을 때의 몫은 $2xQ(x)+R$, 나머지는 $-\frac{1}{2}R$이다. 답 ③

유형 **12** **다항식의 연산의 도형에의 활용** 본책 18쪽

주어진 길이, 넓이, 부피 등을 문자로 나타내어 본다.
특히 직육면체가 주어진 경우 세 모서리의 길이를 a, b, c라 하고 다음을 이용한다.
① 모든 모서리의 길이의 합: $4(a+b+c)$
② 대각선의 길이: $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$
③ 겉넓이: $2(ab+bc+ca)$
④ 부피: abc

0091 직육면체의 밑면의 가로의 길이, 세로의 길이, 높이를 각각 a, b, c라 하면 모든 모서리의 길이의 합이 48이므로

$4(a+b+c)=48\qquad \therefore a+b+c=12$

또 대각선의 길이가 $3\sqrt{6}$이므로

$\sqrt{a^2+b^2+c^2}=3\sqrt{6}\qquad \therefore a^2+b^2+c^2=54$

직육면체의 겉넓이는 $2(ab+bc+ca)$이고

$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$에서

$12^2=54+2(ab+bc+ca)\qquad \therefore 2(ab+bc+ca)=90$

따라서 구하는 겉넓이는 90이다. 답 90

0092 직사각형의 가로의 길이를 a, 세로의 길이를 b라 하면 직사각형의 넓이는 ab이고

$a^2+b^2=17^2,\ a+b=\frac{1}{2}\cdot46=23$

$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$에서

$17^2=23^2-2ab,\qquad 2ab=240$

$\therefore ab=120$

따라서 구하는 넓이는 120이다. 답 120

0093 주어진 등식에서

$\{(a+b)+c\}\{(a+b)-c\}=\{c+(a-b)\}\{c-(a-b)\}$

$(a+b)^2-c^2=c^2-(a-b)^2$

$a^2+2ab+b^2-c^2=c^2-a^2+2ab-b^2$

$2(a^2+b^2)=2c^2 \qquad \therefore a^2+b^2=c^2$

따라서 $\triangle$ABC는 $\angle$C$=90°$인 직각삼각형이다. 답 ⑤

0094 직육면체의 높이를 A라 하면

$(a-2)(a+3)A=a^3+5a^2-2a-24$

$(a^2+a-6)A=a^3+5a^2-2a-24$

$\therefore A=(a^3+5a^2-2a-24)\div(a^2+a-6)$

$$\begin{array}{r}
a+4 \\
a^2+a-6 \,\big)\, \overline{a^3+5a^2-2a-24} \\
\underline{a^3+\;a^2-6a} \\
4a^2+4a-24 \\
\underline{4a^2+4a-24} \\
0
\end{array}$$

$\therefore A=a+4$

따라서 직육면체의 높이는 $a+4$이다. 답 $a+4$

다른 풀이 $a^3+5a^2-2a-24$에서 a^3의 계수가 1이므로 구하는 높이를 $a+k$ (k는 상수)라 하면

$(a-2)(a+3)(a+k)=a^3+5a^2-2a-24$

좌변의 전개식의 상수항이 -24이어야 하므로

$-6k=-24 \qquad \therefore k=4$

따라서 직육면체의 높이는 $a+4$이다.

0095 구하는 입체도형의 부피는

$(x+2)^3\underline{-3\cdot x^2(x+2)+2\cdot x^3}$ 직육면체가 겹치는 부분을 3번 뺐으므로 2번을 더한다.

$=x^3+6x^2+12x+8-3x^3-6x^2+2x^3$

$=12x+8$ 답 $12x+8$

0096 $\overline{\text{AB}}=a$, $\overline{\text{AD}}=b$, $\overline{\text{AE}}=c$라 하면 주어진 직육면체의 겉넓이가 66이므로

$2(ab+bc+ca)=66 \qquad \therefore ab+bc+ca=33$ ··· ❶

$\triangle$BGD의 세 변의 길이의 제곱의 합이 68이므로

$\overline{\text{BD}}^2+\overline{\text{BG}}^2+\overline{\text{GD}}^2=68$

$(a^2+b^2)+(b^2+c^2)+(c^2+a^2)=68$

$2(a^2+b^2+c^2)=68 \qquad \therefore a^2+b^2+c^2=34$ ··· ❷

즉 $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)=34+2\cdot33=100$ 이므로

$a+b+c=10$ ($\because a>0,\ b>0,\ c>0$) ··· ❸

따라서 직육면체의 모든 모서리의 길이의 합은

$4(a+b+c)=4\cdot10=40$ ··· ❹

답 40

채점 기준	비율
❶ $ab+bc+ca$의 값을 구할 수 있다.	20 %
❷ $a^2+b^2+c^2$의 값을 구할 수 있다.	20 %
❸ $a+b+c$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❹ 직육면체의 모든 모서리의 길이의 합을 구할 수 있다.	20 %

0097 $\overline{\text{PR}}=a$, $\overline{\text{RC}}=b$라 하면 $\triangle$PRC의 넓이가 80이므로

$\frac{1}{2}ab=80 \qquad \therefore ab=160$

$\overline{\text{PC}}=\overline{\text{BC}}=20$이므로 $\triangle$PRC에서

$a^2+b^2=400$

$\overline{\text{PS}}=20-a$, $\overline{\text{PQ}}=\overline{\text{RB}}=20-b$이므로

$\square\text{AQPS}=(20-a)(20-b)=400-20(a+b)+ab$

이때 $(a+b)^2=a^2+b^2+2ab=400+2\cdot160=720$이므로

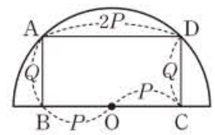
$a+b=12\sqrt{5}$ ($\because a>0,\ b>0$)

$\therefore \square\text{AQPS}=400-240\sqrt{5}+160=560-240\sqrt{5}$

답 $560-240\sqrt{5}$

0098 **전략** $\overline{\text{OC}}=P$, $\overline{\text{CD}}=Q$라 하고 주어진 조건을 이용하여 P, Q를 x, y에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 $\overline{\text{OC}}=P$, $\overline{\text{CD}}=Q$라 하면 조건 (가)에서



$P+Q=x+y+3$ ······ ㉠

$\overline{\text{DA}}=2P$, $\overline{\text{AB}}=Q$, $\overline{\text{BO}}=P$이므로 조건 (나)에서

$2P+Q+P=3x+y+5$

$\therefore 3P+Q=3x+y+5$ ······ ㉡

㉡$-$㉠을 하면

$2P=2x+2 \qquad \therefore P=x+1$

이것을 ㉠에 대입하면

$x+1+Q=x+y+3 \qquad \therefore Q=y+2$

따라서 $\square$ABCD의 넓이는

$2P\cdot Q=2(x+1)(y+2)$ 답 ⑤

0099 **전략** 다항식 $P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$에 대하여 $a_0+a_1+a_2+\cdots+a_n$의 값은 $P(1)$의 값과 같음을 이용한다.

풀이 $A+2B=x^2+1+2(x^2-3x+4)=3x^2-6x+9$,

$B+C=x^2-3x+4+(2x^2-x+2)=3x^2-4x+6$,

$C-A=2x^2-x+2-(x^2+1)=x^2-x+1$ ··· ❶

이므로

$(A+2B)(B+C)(C-A)$

$=(3x^2-6x+9)(3x^2-4x+6)(x^2-x+1)$

$P(x)=(3x^2-6x+9)(3x^2-4x+6)(x^2-x+1)$이라 하면 다항식 $P(x)$의 전개식이 $a_6x^6+a_5x^5+\cdots+a_1x+a_0$이고

$a_0+a_1+\cdots+a_5+a_6$의 값은 $P(1)$의 값과 같으므로

$P(1)=6\cdot5\cdot1=30$ ··· ❷

답 30

채점 기준	비율
❶ $A+2B$, $B+C$, $C-A$를 구할 수 있다.	40 %
❷ $a_0+a_1+\cdots+a_5+a_6$의 값을 구할 수 있다.	60 %

0100 **전략** 조건 (가)에서 $x-3$, $y-3$, $2z-3$ 중 적어도 하나는 0임을 이용하여 식을 세운다.

풀이 조건 (가)에서

$(x-3)(y-3)(2z-3)=0$

이 식의 좌변을 전개하면

$(xy-3x-3y+9)(2z-3)=0$

$2xyz-3xy-6zx+9x-6yz+9y+18z-27=0$

$2xyz-3(xy+2yz+2zx)+9(x+y+2z)-27=0$

이때 조건 (나)에서 $xy+2yz+2zx=3(x+y+2z)$이므로

$2xyz-3\cdot 3(x+y+2z)+9(x+y+2z)-27=0$

$2xyz-9(x+y+2z)+9(x+y+2z)-27=0$

$2xyz-27=0 \qquad \therefore xyz=\frac{27}{2}$

$\therefore 10xyz=135$ 　답 135

0101 전략 조건 (나)의 n에 1, 2, 3, …을 차례대로 대입하여 다항식 $f_6(x)$를 구한다.

풀이 $f_1(x)=x^3-6x^2+10$이므로

$f_2(x)=f_1(x+1)=(x+1)^3-6(x+1)^2+10$

$f_3(x)=f_2(x+2)=(x+3)^3-6(x+3)^2+10$

$f_4(x)=f_3(x+3)=(x+6)^3-6(x+6)^2+10$

$f_5(x)=f_4(x+4)=(x+10)^3-6(x+10)^2+10$

$f_6(x)=f_5(x+5)=\underbrace{(x+15)^3}_{x^3+3x^2\cdot 15+3x\cdot 15^2+15^3}-6(x+15)^2+10$

따라서 $f_6(x)$의 x항은

$3x\cdot 15^2-6\cdot 2x\cdot 15=675x-180x=495x$

이므로 x의 계수는 495이다. 　답 ②

0102 전략 $ac+bd=\frac{1}{2}$의 양변을 제곱한 식과 $(a^2+b^2)(c^2+d^2)$의 전개식을 이용한다.

풀이 $ac+bd=\frac{1}{2}$의 양변을 제곱하면

$(ac+bd)^2=\frac{1}{4}, \qquad a^2c^2+2abcd+b^2d^2=\frac{1}{4}$

$\therefore a^2c^2+b^2d^2=\frac{1}{4}-2abcd$ 　…… ㉠

$a^2+b^2=2,\ c^2+d^2=2$이므로 　$(a^2+b^2)(c^2+d^2)=4$

$a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2=4$

이 식에 ㉠을 대입하면 　$a^2d^2+b^2c^2+\frac{1}{4}-2abcd=4$

$(ad-bc)^2+\frac{1}{4}=4, \qquad (ad-bc)^2=\frac{15}{4}$

$\therefore ad-bc=\frac{\sqrt{15}}{2}\ (\because ad>bc)$ 　답 $\frac{\sqrt{15}}{2}$

0103 전략 조건 (가), (나)를 이용하여 a, b를 각각 x, y에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 조건 (가)에서 $x^2+y^2=a$이므로

$a=(x+y)^2-2xy$ 　…… ㉠ 　··· ❶

조건 (나)에서 $x^3+y^3=b(x+y)$이므로

$b(x+y)=(x+y)^3-3xy(x+y)$

이때 x, y는 자연수이므로 　$x+y\neq 0$

$\therefore b=(x+y)^2-3xy$ 　…… ㉡ 　··· ❷

㉠, ㉡을 조건 (다)의 식에 대입하면

$(x+y)^2-2xy-\{(x+y)^2-3xy\}=20$

$\therefore xy=20$ 　··· ❸

따라서 자연수 x, y의 순서쌍 (x, y)는

$(1, 20), (2, 10), (4, 5), (5, 4), (10, 2), (20, 1)$

의 6개이다. 　··· ❹

답 6

채점 기준	비율
❶ a를 x, y에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30 %
❷ b를 x, y에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30 %
❸ xy의 값을 구할 수 있다.	20 %
❹ 순서쌍 (x, y)의 개수를 구할 수 있다.	20 %

0104 전략 주어진 두 식을 이용하여 $x+y$, xy의 값을 구한다.

풀이 주어진 두 식을 변끼리 더하면

$x+\frac{1}{y}+y+\frac{1}{x}=8$

$\therefore x+y+\frac{x+y}{xy}=8$ 　…… ㉠

주어진 두 식을 변끼리 곱하면

$\left(x+\frac{1}{y}\right)\left(y+\frac{1}{x}\right)=4, \qquad xy+\frac{1}{xy}+2=4$

$\therefore xy+\frac{1}{xy}=2$

이때 $xy=t$라 하면 　$t+\frac{1}{t}=2$

$t^2-2t+1=0, \qquad (t-1)^2=0 \qquad \therefore t=1$

$\therefore xy=1$

$xy=1$을 ㉠에 대입하면

$2(x+y)=8 \qquad \therefore x+y=4$

$\therefore x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$

$=4^3-3\cdot 1\cdot 4=52$ 　답 52

0105 전략 A를 B에 대한 식으로 정리한 후, A^3-8B^3을 변형하여 x^5, x^4의 계수를 구한다.

풀이 $A=x^3+2(x^2+2x+3)=x^3+2B$이므로

$A-2B=x^3$

$\therefore A^3-8B^3=(A-2B)^3+3A\cdot 2B(A-2B)$

$=(x^3)^3+6AB(A-2B)$

$=x^9+6(x^3+2B)Bx^3$

$=x^9+6x^6B+12x^3B^2$

이때 x^5항, x^4항은 $12x^3B^2$에서만 존재하므로

$12x^3B^2=12x^3(x^2+2x+3)^2$

$=12x^3(x^2+2x+3)(x^2+2x+3)$

의 전개식에서 x^5항은

$12x^3(x^2\cdot 3+2x\cdot 2x+3\cdot x^2)=120x^5 \qquad \therefore p=120$

또 x^4항은

$12x^3(2x\cdot 3+3\cdot 2x)=144x^4 \qquad \therefore q=144$

$\therefore p+q=264$ 　답 264

0106 전략 주어진 세 식을 변끼리 더한 후 곱셈 공식의 변형을 이용한다.

풀이 주어진 세 식을 변끼리 더하면

$3a+3b+3c=3ab+3bc+3ca$

$\therefore ab+bc+ca=a+b+c=3$

$$\therefore\ a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$$
$$=3^2-2\cdot 3=3$$

답 ①

0107 전략 $x^2+x+2=(x^2+1)+(x+1)$임을 이용한다.

풀이 $x^2+x+2=(x^2+1)+(x+1)$에서 $A=x^2+1$, $B=x+1$로 놓으면

$$(x^2+x+2)^3=(A+B)^3=A^3+3A^2B+3AB^2+B^3$$
$$=A(A^2+3AB+3B^2)+B^3$$

이므로 $(x^2+x+2)^3$을 x^2+1로 나누었을 때의 나머지는 B^3, 즉 $(x+1)^3$을 x^2+1로 나누었을 때의 나머지와 같다.

이때 $(x+1)^3=x^3+3x^2+3x+1$이므로

$$\begin{array}{r|l} & x+3 \\ \hline x^2+1 & x^3+3x^2+3x+1 \\ & x^3\qquad\ +x \\ \hline & \quad 3x^2+2x+1 \\ & \quad 3x^2\qquad +3 \\ \hline & \qquad\quad 2x-2 \end{array}$$

따라서 $R(x)=2x-2$이므로 $\quad R(5)=8$

답 8

0108 전략 $x=\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$을 (x에 대한 이차식)$=0$ 꼴로 변형한다.

풀이 $x=\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$에서 $\quad 2x-1=\sqrt{3}$

양변을 제곱하면 $\quad 4x^2-4x+1=3$

$$4x^2-4x-2=0 \qquad \therefore\ 2x^2-2x-1=0$$

$4x^4-2x^3-5x+3$을 $2x^2-2x-1$로 나누면

$$\begin{array}{r|l} & 2x^2+x+2 \\ \hline 2x^2-2x-1 & 4x^4-2x^3\qquad\ -5x+3 \\ & 4x^4-4x^3-2x^2 \\ \hline & \qquad 2x^3+2x^2-5x \\ & \qquad 2x^3-2x^2-x \\ \hline & \qquad\qquad 4x^2-4x+3 \\ & \qquad\qquad 4x^2-4x-2 \\ \hline & \qquad\qquad\qquad\quad 5 \end{array}$$

$$\therefore\ 4x^4-2x^3-5x+3=(2x^2-2x-1)(2x^2+x+2)+5$$

이때 $2x^2-2x-1=0$이므로 구하는 식의 값은 5이다.

답 5

0109 전략 다항식의 나눗셈에 대한 등식을 세운 후 몫과 나머지의 변형을 이용한다.

풀이 다항식 $P(x)$를 $(x+1)^3$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면

$$P(x)=(x+1)^3Q(x)+2x^2+ax+1$$
$$=(x+1)^3Q(x)+2(x^2+2x+1)+(a-4)x-1$$
$$=(x+1)^3Q(x)+2(x+1)^2+(a-4)x-1$$
$$=(x+1)^2\{(x+1)Q(x)+2\}+(a-4)x-1$$

이때 $P(x)$를 $(x+1)^2$으로 나누었을 때의 나머지가 $x+b$이므로

$$a-4=1,\ b=-1 \qquad \therefore\ a=5,\ b=-1$$
$$\therefore\ a+b=4$$

답 ④

다른 풀이 $P(x)=(x+1)^3Q(x)+2x^2+ax+1$

$(x+1)^3Q(x)$는 $(x+1)^2$으로 나누어떨어지므로 $P(x)$를 $(x+1)^2$으로 나누었을 때의 나머지는 다항식 $2x^2+ax+1$을 $\underbrace{(x+1)^2}_{x^2+2x+1}$으로 나누었을 때의 나머지와 같다.

$$\begin{array}{r|l} & 2 \\ \hline x^2+2x+1 & 2x^2+ax+1 \\ & 2x^2+4x+2 \\ \hline & (a-4)x-1 \end{array}$$

이때 $P(x)$를 $(x+1)^2$으로 나누었을 때의 나머지가 $x+b$이므로

$$a-4=1,\ b=-1 \qquad \therefore\ a=5,\ b=-1$$

0110 전략 12개의 작은 직육면체 중에서 부피가 같은 5개의 직육면체를 찾는다.

풀이 나누기 전의 직육면체의 부피는

$$(a+b)^2(a+2b)=a^3+4a^2b+5ab^2+2b^3$$

위의 식의 우변은 12개로 나뉜 작은 직육면체의 부피를 더한 것과 같고, 각 부피에 따른 직육면체의 개수는 다음과 같다.

부피가 a^3인 직육면체의 개수: 1
부피가 a^2b인 직육면체의 개수: 4
부피가 ab^2인 직육면체의 개수: 5
부피가 b^3인 직육면체의 개수: 2

a, b가 서로소이므로 네 경우의 부피는 모두 다르다.

이때 부피가 150인 직육면체가 5개이므로

$$ab^2=150=6\cdot 5^2$$

a와 b는 서로소이므로 $\quad a=6,\ b=5$

$$\therefore\ a+2b=16$$

답 16

0111 전략 큰 정육면체와 작은 정육면체의 한 모서리의 길이를 각각 x, y라 하고 주어진 조건을 이용하여 식을 세운다.

풀이 큰 정육면체와 작은 정육면체의 한 모서리의 길이를 각각 x, y라 하면 $\quad x-y=4$

두 정육면체의 부피의 차가 100이므로 $\quad x^3-y^3=100$

이때 $x^3-y^3=(x-y)^3+3xy(x-y)$이므로

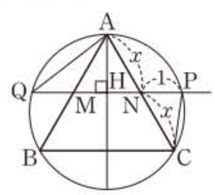
$$100=4^3+3xy\cdot 4 \qquad \therefore\ xy=3$$

따라서 두 정육면체의 겉넓이의 합은

$$6x^2+6y^2=6(x^2+y^2)=6\{(x-y)^2+2xy\}$$
$$=6\cdot(4^2+2\cdot 3)=132$$

답 132

0112 전략 닮음인 두 삼각형을 찾아 비례식을 세운다.



풀이 오른쪽 그림과 같이 반직선 NM이 △ABC의 외접원과 만나는 점을 Q라 하자.

$\overline{AN}=\overline{NC}$이고 △AMN은 정삼각형이므로

$$\overline{AN}=\overline{NC}=\overline{MN}=x$$

점 A에서 $\overline{MN}$에 내린 수선의 발을 H라 할 때, 직선 AH는 원의 중심을 지나므로

$$\overline{MH}=\overline{NH},\ \overline{QH}=\overline{PH}$$
$$\therefore\ \overline{QM}=\overline{QH}-\overline{MH}=\overline{PH}-\overline{NH}=\overline{NP}=1$$

△AQN과 △PCN에서

∠ANQ=∠PNC (맞꼭지각),

∠AQN=∠PCN ($\overparen{AP}$에 대한 원주각)

이므로 $\quad$ △AQN∽△PCN (AA 닮음)

즉 $\overline{QN}:\overline{CN}=\overline{AN}:\overline{PN}$이므로 $\quad (1+x):x=x:1$

$$1+x=x^2 \qquad \therefore\ x^2-x-1=0$$

$x \neq 0$이므로 $x^2-x-1=0$의 양변을 x로 나누면

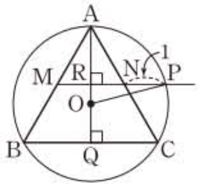
$$x-1-\frac{1}{x}=0 \qquad \therefore x-\frac{1}{x}=1$$

따라서 $x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2=1^2+2=3$이므로

$$10\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)=30$$

답 30

다른 풀이 오른쪽 그림과 같이 외접원의 중심을 O라 하고 직선 AO와 $\overline{BC}$, $\overline{MN}$의 교점을 각각 Q, R라 하면 △ABC는 정삼각형이므로



$$\overline{AR} \perp \overline{MN},\ \overline{AQ} \perp \overline{BC}$$

이때 △ABC의 한 변의 길이가 $2x$이므로

$$\overline{AQ}=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 2x=\sqrt{3}x$$

따라서 $\overline{OP}=\overline{AO}=\frac{2}{3}\overline{AQ}=\frac{2\sqrt{3}}{3}x$,

$\overline{OR}=\overline{QR}-\overline{QO}=\frac{1}{2}\overline{AQ}-\frac{1}{3}\overline{AQ}=\frac{1}{6}\overline{AQ}=\frac{\sqrt{3}}{6}x$이고

$\overline{PR}=\overline{PN}+\overline{NR}=1+\frac{x}{2}$이므로 직각삼각형 OPR에서

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{6}x\right)^2+\left(1+\frac{x}{2}\right)^2=\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}x\right)^2$$

$$\frac{1}{12}x^2+\frac{1}{4}x^2+x+1=\frac{4}{3}x^2 \qquad \therefore x^2-x-1=0$$

0113 전략 [그림 1]의 직육면체의 밑면의 가로의 길이, 세로의 길이, 높이를 각각 a, b, c라 하고 [그림 2]의 입체도형의 겉넓이와 모든 모서리의 길이의 합을 a, b, c를 사용하여 나타낸다.

풀이 [그림 1]의 직육면체의 밑면의 가로의 길이, 세로의 길이, 높이를 각각 a, b, c라 하면 [그림 1]의 직육면체와 [그림 2]의 입체도형의 겉넓이는 같으므로

$$2(ab+bc+ca)=236 \qquad \therefore ab+bc+ca=118$$

[그림 2]의 입체도형의 모든 모서리의 길이의 합이 82이므로

$$4(a+b+c)+6=82 \qquad \therefore a+b+c=19$$

따라서 구하는 대각선의 길이는

$$\sqrt{a^2+b^2+c^2}=\sqrt{(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)}$$
$$=\sqrt{19^2-2\cdot 118}=5\sqrt{5}$$

답 ②

0114 전략 세 구의 반지름의 길이를 각각 a, b, c로 놓고 주어진 조건을 a, b, c에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 세 구의 반지름의 길이를 각각 a, b, c라 하면

$$a+b+c=9 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

세 구의 겉넓이의 합이 116π이므로

$$4\pi(a^2+b^2+c^2)=116\pi$$

$$\therefore a^2+b^2+c^2=29 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

세 구의 부피의 합이 132π이므로

$$\frac{4}{3}\pi(a^3+b^3+c^3)=132\pi$$

$$\therefore a^3+b^3+c^3=99 \qquad \cdots\cdots ㉢$$

㉠의 양변을 제곱하면

$$a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)=81$$

이 식에 ㉡을 대입하면 $\quad 29+2(ab+bc+ca)=81$

$$\therefore ab+bc+ca=26 \qquad \cdots\cdots ㉣$$

$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)=a^3+b^3+c^3-3abc$에 ㉠, ㉡, ㉢, ㉣을 대입하면

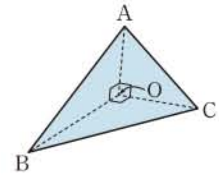
$$9\cdot(29-26)=99-3abc \qquad \therefore abc=24$$

따라서 세 구의 반지름의 길이의 곱은 24이다.

답 24

0115 전략 사면체의 세 모서리의 길이 사이의 관계식을 구한다.

풀이 조건 (가)에서 사면체 OABC는 오른쪽 그림과 같다.



$\overline{OA}=a$, $\overline{OB}=b$, $\overline{OC}=c$라 하면 조건 (나)에서

$$a+b+c=13 \qquad \cdots ❶$$

조건 (다)에서

$$\frac{1}{2}ab+\frac{1}{2}bc+\frac{1}{2}ca=27 \qquad \therefore ab+bc+ca=54 \qquad \cdots ❷$$

$$\therefore \overline{OA}^2+\overline{OB}^2+\overline{OC}^2=a^2+b^2+c^2$$
$$=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$$
$$=13^2-2\cdot 54=61 \qquad \cdots ❸$$

답 61

채점 기준	비율
❶ $\overline{OA}=a$, $\overline{OB}=b$, $\overline{OC}=c$라 하고 $a+b+c$의 값을 구할 수 있다.	20 %
❷ $ab+bc+ca$의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ $\overline{OA}^2+\overline{OB}^2+\overline{OC}^2$의 값을 구할 수 있다.	50 %

0116 전략 직사각형의 둘레의 길이를 이용하여 $\overline{CD}$의 길이를 구한 후 색칠한 부분의 넓이를 식으로 나타낸다.

풀이 $2\overline{CD}+2(2x+5)=6x+12$이므로

$$\overline{CD}+2x+5=3x+6 \qquad \therefore \overline{CD}=x+1 \qquad \cdots ❶$$

$\overline{PD}=P(x)$라 하면 색칠한 부분의 넓이가 $-x^3+14x+13$이므로

$$(2x+5)(x+1)-2\cdot\frac{1}{2}(x+1)P(x)=-x^3+14x+13$$

$\cdots$ ❷

$$2x^2+7x+5-(x+1)P(x)=-x^3+14x+13$$
$$(x+1)P(x)=x^3+2x^2-7x-8$$
$$\therefore P(x)=(x^3+2x^2-7x-8)\div(x+1)$$

$$\begin{array}{r}
x^2+\ x\ -8 \\
x+1\,\overline{)\,x^3+2x^2-7x-8} \\
\underline{x^3+\ x^2} \\
x^2-7x \\
\underline{x^2+\ x} \\
-8x-8 \\
\underline{-8x-8} \\
0
\end{array}$$

$$\therefore P(x)=x^2+x-8$$

따라서 $\overline{PD}$의 길이는 x^2+x-8이다. $\cdots$ ❸

답 x^2+x-8

채점 기준	비율
❶ $\overline{CD}$의 길이를 구할 수 있다.	30 %
❷ 색칠한 부분의 넓이를 이용하여 식을 세울 수 있다.	30 %
❸ $\overline{PD}$의 길이를 구할 수 있다.	40 %

02 나머지정리와 인수분해

0117 ㄷ. (우변)$=x(x-4)+5=x^2-4x+5=$(좌변)
ㄹ. (좌변)$=(x+1)^2-(x+1)=x^2+2x+1-(x+1)$
$=x^2+x=$(우변)
이상에서 x에 대한 항등식인 것은 ㄷ, ㄹ이다. 답 ㄷ, ㄹ

0118 답 $a=1$, $b=0$, $c=5$

0119 $a-1=0$, $b+1=0$, $2+c=0$이므로
$a=1$, $b=-1$, $c=-2$ 답 $a=1$, $b=-1$, $c=-2$

0120 $a+b=1$, $b+2=0$, $c-5=1$이므로
$a=3$, $b=-2$, $c=6$ 답 $a=3$, $b=-2$, $c=6$

0121 주어진 등식의 양변에 $x=-2$, $x=0$, $x=3$을 각각 대입하면
$10c=20$, $-6b=-6$, $15a=-15$
$\therefore a=-1$, $b=1$, $c=2$ 답 $a=-1$, $b=1$, $c=2$

0122 주어진 등식의 양변에 $x=0$, $x=1$, $x=2$를 각각 대입하면
$-c=-3$, $b=-2$, $2a+2b+c=1$
$\therefore a=1$, $b=-2$, $c=3$ 답 $a=1$, $b=-2$, $c=3$

다른 풀이 $ax(x-1)+bx+c(x-1)=ax^2+(-a+b+c)x-c$ 이므로
$ax^2+(-a+b+c)x-c=x^2-3$
이 등식이 x에 대한 항등식이므로
$a=1$, $-a+b+c=0$, $-c=-3$
$\therefore a=1$, $b=-2$, $c=3$

0123 $a(x+1)^2+b(x+1)+c=ax^2+(2a+b)x+a+b+c$ 이므로
$ax^2+(2a+b)x+a+b+c=2x^2-7x+1$
이 등식이 x에 대한 항등식이므로
$a=2$, $2a+b=-7$, $a+b+c=1$
$\therefore a=2$, $b=-11$, $c=10$ 답 $a=2$, $b=-11$, $c=10$

다른 풀이 주어진 등식의 양변에 $x=-1$을 대입하면
$c=10$
$\therefore a(x+1)^2+b(x+1)+10=2x^2-7x+1$
이 등식의 양변에 $x=0$, $x=1$을 각각 대입하면
$a+b+10=1$, $4a+2b+10=-4$
$\therefore a+b=-9$, $2a+b=-7$
위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=-11$

0124 $a-2=-1$, $b+4=1$, $c+1=7$이므로
$a=1$, $b=-3$, $c=6$ 답 $a=1$, $b=-3$, $c=6$

0125 $a(x+y)-b(x-y)+1=(a-b)x+(a+b)y+1$이므로
$(a-b)x+(a+b)y+1=3x-5y+c$
이 등식이 x, y에 대한 항등식이므로
$a-b=3$, $a+b=-5$, $1=c$
$\therefore a=-1$, $b=-4$, $c=1$ 답 $a=-1$, $b=-4$, $c=1$

0126 답 (가) $-\dfrac{b}{a}$ (나) $\dfrac{b}{a}$

0127 $P(1)=4-2-1=1$ 답 1

0128 $P(-2)=16+4-1=19$ 답 19

0129 $P\left(-\dfrac{1}{2}\right)=1+1-1=1$ 답 1

0130 $P\left(\dfrac{1}{4}\right)=\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{2}-1=-\dfrac{5}{4}$ 답 $-\dfrac{5}{4}$

0131 $P(-3)=11$이므로 $-27+54+3k-1=11$
$3k=-15$ $\therefore k=-5$ 답 -5

0132 $P(-1)=0$이므로
$-3+k+6-4=0$ $\therefore k=1$ 답 1

0133 $P(2)=0$이므로 $24+4k-12-4=0$
$4k=-8$ $\therefore k=-2$ 답 -2

0134 $P(1)=0$, $P(-2)=0$이므로
$2+a+b-6=0$, $-16+4a-2b-6=0$
$\therefore a+b=4$, $2a-b=11$
위의 두 식을 연립하여 풀면
$a=5$, $b=-1$ 답 $a=5$, $b=-1$

0135 $P(-1)=0$, $P(3)=0$이므로
$-2+a-b-6=0$, $54+9a+3b-6=0$
$\therefore a-b=8$, $3a+b=-16$
위의 두 식을 연립하여 풀면
$a=-2$, $b=-10$ 답 $a=-2$, $b=-10$

0136
$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & 1 & -2 & -5 & 3 \\ & & -2 & 8 & -6 \\ \hline & 1 & -4 & 3 & \boxed{-3} \end{array}$$
$\therefore$ 몫: x^2-4x+3, 나머지: -3
답 몫: x^2-4x+3, 나머지: -3

0137
$$\begin{array}{r|rrrr} 3 & 3 & -8 & 0 & -5 \\ & & 9 & 3 & 9 \\ \hline & 3 & 1 & 3 & \boxed{4} \end{array}$$
$\therefore$ 몫: $3x^2+x+3$, 나머지: 4
답 몫: $3x^2+x+3$, 나머지: 4

0138 $2x-1=2\left(x-\frac{1}{2}\right)$이므로 오른쪽과 같이 조립제법을 이용하여

$$\begin{array}{c|cccc} \frac{1}{2} & 2 & 3 & -6 & 1 \\ & & 1 & 2 & -2 \\ \hline & 2 & 4 & -4 & \boxed{-1} \end{array}$$

$2x^3+3x^2-6x+1$을 $x-\frac{1}{2}$로 나누면

$$2x^3+3x^2-6x+1=\left(x-\frac{1}{2}\right)(2x^2+4x-4)-1$$
$$=(2x-1)(x^2+2x-2)-1$$

따라서 몫은 x^2+2x-2이고 나머지는 -1이다.

답 몫: x^2+2x-2, 나머지: -1

0139 답 $2b(ab+3)$

0140 $a(x-y)-b(y-x)=a(x-y)+b(x-y)$
$=(a+b)(x-y)$

답 $(a+b)(x-y)$

0141 $1-m-n+mn=1-m-n(1-m)$
$=(1-m)(1-n)$ 답 $(1-m)(1-n)$

0142 $16a^2-24ab+9b^2=(4a)^2-2\cdot 4a\cdot 3b+(3b)^2$
$=(4a-3b)^2$ 답 $(4a-3b)^2$

0143 $27a^2-12b^2=3(9a^2-4b^2)=3\{(3a)^2-(2b)^2\}$
$=3(3a+2b)(3a-2b)$

답 $3(3a+2b)(3a-2b)$

0144 답 $(3a+7b)(a-b)$

0145 $a^2+b^2+4c^2+2ab+4bc+4ca$
$=a^2+b^2+(2c)^2+2ab+2\cdot b\cdot 2c+2\cdot 2c\cdot a$
$=(a+b+2c)^2$ 답 $(a+b+2c)^2$

0146 $x^2+y^2+z^2-2xy-2yz+2zx$
$=x^2+(-y)^2+z^2+2x\cdot(-y)+2\cdot(-y)\cdot z+2zx$
$=(x-y+z)^2$ 답 $(x-y+z)^2$

0147 $x^3+9x^2+27x+27=x^3+3\cdot x^2\cdot 3+3\cdot x\cdot 3^2+3^3$
$=(x+3)^3$ 답 $(x+3)^3$

0148 $-8a^3+36a^2b-54ab^2+27b^3$
$=(-2a)^3+3\cdot(-2a)^2\cdot 3b+3\cdot(-2a)\cdot(3b)^2+(3b)^3$
$=(-2a+3b)^3$ 답 $(-2a+3b)^3$

0149 $a^3+8=a^3+2^3=(a+2)(a^2-2a+4)$

답 $(a+2)(a^2-2a+4)$

0150 $27a^3-64b^3=(3a)^3-(4b)^3$
$=(3a-4b)(9a^2+12ab+16b^2)$

답 $(3a-4b)(9a^2+12ab+16b^2)$

0151 $x^4+4x^2y^2+16y^4$
$=x^4+x^2\cdot(2y)^2+(2y)^4$
$=(x^2+2xy+4y^2)(x^2-2xy+4y^2)$

답 $(x^2+2xy+4y^2)(x^2-2xy+4y^2)$

0152 $a^3+b^3+27c^3-9abc$
$=a^3+b^3+(3c)^3-3\cdot a\cdot b\cdot 3c$
$=(a+b+3c)(a^2+b^2+9c^2-ab-3bc-3ca)$

답 $(a+b+3c)(a^2+b^2+9c^2-ab-3bc-3ca)$

0153 $x+1=t$로 놓으면
$(x+1)^2-(x+1)-12=t^2-t-12$
$=(t+3)(t-4)$
$=(x+1+3)(x+1-4)$ 원래의 식을 반드시 대입한다.
$=(x+4)(x-3)$

답 $(x+4)(x-3)$

0154 $x^2-3x=t$로 놓으면
$(x^2-3x)(x^2-3x+5)+6=t(t+5)+6$
$=t^2+5t+6$
$=(t+2)(t+3)$
$=(x^2-3x+2)(x^2-3x+3)$
$=(x-1)(x-2)(x^2-3x+3)$

답 $(x-1)(x-2)(x^2-3x+3)$

0155 $x^2=X$로 놓으면
$x^4-10x^2+9=X^2-10X+9$
$=(X-1)(X-9)$
$=(x^2-1)(x^2-9)$
$=(x+1)(x-1)(x+3)(x-3)$

답 $(x+1)(x-1)(x+3)(x-3)$

다른 풀이 $x^4-10x^2+9=(x^4-6x^2+9)-4x^2=(x^2-3)^2-(2x)^2$
$=(x^2+2x-3)(x^2-2x-3)$
$=(x+3)(x-1)(x+1)(x-3)$
$=(x+1)(x-1)(x+3)(x-3)$

0156 $x^4+2x^2+9=(x^4+6x^2+9)-4x^2=(x^2+3)^2-(2x)^2$
$=(x^2+2x+3)(x^2-2x+3)$

답 $(x^2+2x+3)(x^2-2x+3)$

0157 주어진 식을 y에 대하여 내림차순으로 정리하면
$x^2+4xy+2x-4y-3$
$=4(x-1)y+x^2+2x-3$
$=4(x-1)y+(x+3)(x-1)$
$=(x-1)(x+4y+3)$ 답 $(x-1)(x+4y+3)$

0158 주어진 식을 x에 대하여 내림차순으로 정리하면

$x^2-xy-2y^2+x+4y-2$

$=x^2-(y-1)x-2(y^2-2y+1)$

$=x^2-(y-1)x-2(y-1)^2$

$=\{x-2(y-1)\}\{x+(y-1)\}$

$=(x-2y+2)(x+y-1)$ 답 $(x-2y+2)(x+y-1)$

0159 $P(x)=x^3-4x^2+x+6$이라 하면

$P(-1)=-1-4-1+6=0$

이므로 오른쪽과 같이 조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & -4 & 1 & 6 \\ & & -1 & 5 & -6 \\ \hline & 1 & -5 & 6 & \boxed{0} \end{array}$$

$P(x)=(x+1)(x^2-5x+6)$

$=(x+1)(x-2)(x-3)$

답 $(x+1)(x-2)(x-3)$

0160 $P(x)=x^4+5x^3+5x^2-5x-6$이라 하면

$P(-1)=1-5+5+5-6=0$,

$P(1)=1+5+5-5-6=0$

이므로 조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} -1 & 1 & 5 & 5 & -5 & -6 \\ & & -1 & -4 & -1 & 6 \\ \hline 1 & 1 & 4 & 1 & -6 & \boxed{0} \\ & & 1 & 5 & 6 & \\ \hline & 1 & 5 & 6 & \boxed{0} & \end{array}$$

$\therefore P(x)=(x+1)(x-1)(x^2+5x+6)$

$=(x+1)(x-1)(x+2)(x+3)$

답 $(x+1)(x-1)(x+2)(x+3)$

유형 01 계수 비교법

본책 28쪽

계수 비교법은 다음과 같은 경우에 이용한다.
① 양변을 내림차순으로 정리하기 쉬운 경우
② 식이 간단하여 전개하기 쉬운 경우

0161 $x^3+ax^2-36=(x+c)(x^2+bx-12)$에서

$x^3+ax^2-36=x^3+(b+c)x^2+(bc-12)x-12c$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로

$a=b+c$, $0=bc-12$, $-36=-12c$

$\therefore a=7$, $b=4$, $c=3$ $\quad\therefore a+b+c=14$ 답 ③

0162 $a(x-2y)+b(x+y)-1=5x-y+c$에서

$(a+b)x+(-2a+b)y-1=5x-y+c$

이 등식이 x, y에 대한 항등식이므로

$a+b=5$, $-2a+b=-1$, $-1=c$

$\therefore a=2$, $b=3$, $c=-1$ $\quad\therefore abc=-6$ 답 -6

0163 $kx^2+x+ky^2+y-13k+1=0$을 k에 대하여 정리하면

$(x^2+y^2-13)k+x+y+1=0$

이 등식이 k에 대한 항등식이므로

$x^2+y^2-13=0$, $x+y+1=0$

$\therefore x^2+y^2=13$, $x+y=-1$

$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$이므로

$13=1-2xy$ $\quad\therefore xy=-6$ 답 ①

0164 $f(x)=x^3+2x^2-4x+1$에서

$f(x+a)$

$=(x+a)^3+2(x+a)^2-4(x+a)+1$

$=x^3+3ax^2+3a^2x+a^3+2x^2+4ax+2a^2-4x-4a+1$

$=x^3+(3a+2)x^2+(3a^2+4a-4)x+a^3+2a^2-4a+1$

이므로

$x^3+(3a+2)x^2+(3a^2+4a-4)x+a^3+2a^2-4a+1$

$=x^3-x^2+bx+6$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로

$3a+2=-1$, $3a^2+4a-4=b$, $a^3+2a^2-4a+1=6$

$\therefore a=-1$, $b=-5$ $\quad\therefore a-b=4$ 답 4

0165 $\dfrac{ax+by+1}{x+2y-3}=k$ (k는 상수)로 놓으면

$ax+by+1=k(x+2y-3)$

$\therefore (a-k)x+(b-2k)y+1+3k=0$ ··· ❶

이 등식이 x, y에 대한 항등식이므로

$a-k=0$, $b-2k=0$, $1+3k=0$

$\therefore k=-\dfrac{1}{3}$, $a=-\dfrac{1}{3}$, $b=-\dfrac{2}{3}$ ··· ❷

$\therefore a+b=-1$ ··· ❸

답 -1

채점 기준	비율
❶ 주어진 식을 k로 놓고 x, y에 대하여 정리할 수 있다.	40 %
❷ k, a, b의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	20 %

유형 02 수치 대입법

본책 28쪽

수치 대입법은 다음과 같은 경우에 이용한다.
① 적당한 값을 대입하면 식이 간단해지는 경우
② 식이 길고 복잡하여 전개하기 어려운 경우

0166 주어진 등식의 양변에 $x=0$, $x=1$, $x=2$를 각각 대입하면

$4=2b$, $-1=-c$, $-2=2a$ $\quad\therefore a=-1$, $b=2$, $c=1$

$\therefore a-b+c=-2$ 답 ①

0167 주어진 등식의 양변에 $x=3$, $x=4$를 각각 대입하면

$-a=8$, $b=9$ $\quad\therefore a=-8$, $b=9$

$\therefore a-b=-17$ 답 ②

0168 주어진 등식의 좌변의 x^3의 계수는 1이고, 우변의 전개식에서 x^3의 계수는 c이므로

$c=1$

$\therefore x^3+ax^2-9x+b=(x-3)(x+3)(x+2)$

이 등식의 양변에 $x=0$, $x=3$을 각각 대입하면

$b=-18$, $27+9a-27+b=0$ $\quad\therefore a=2$, $b=-18$

$\therefore a+b+c=-15$ 답 -15

다른 풀이 $x^3+ax^2-9x+b=(x-3)(x+3)(cx+2)$에서

$x^3+ax^2-9x+b=cx^3+2x^2-9cx-18$

이 등식이 x에 대한 항등식이 되려면

$1=c$, $a=2$, $-9=-9c$, $b=-18$

$\therefore a=2$, $b=-18$, $c=1$

0169 주어진 등식의 양변에 $x=-1$, $x=1$을 각각 대입하면

$16=1+4+a-b+1$, $0=1-4+a+b+1$

$\therefore a+b=2$, $a-b=10$

$\therefore a^2-b^2=(a+b)(a-b)=2\cdot10=20$ 답 20

0170 주어진 등식의 양변에 $x=-2$, $x=\sqrt{2}$를 각각 대입하면

$0=16-4a+b$, $0=4-2a+b$

$\therefore 4a-b=16$, $2a-b=4$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $\quad a=6$, $b=8$ ··· ❶

$\therefore (x+2)(x^2-2)P(x)=x^4-6x^2+8$

양변에 $x=3$을 대입하면 $\quad 5\cdot7\cdot P(3)=81-54+8$

$35P(3)=35$ $\quad\therefore P(3)=1$ ··· ❷

답 1

채점 기준	비율
❶ a, b의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ $P(3)$의 값을 구할 수 있다.	60 %

유형 03 조건을 만족시키는 항등식 본책 29쪽

① x에 대한 방정식이 k의 값에 관계없이 항상 α를 근으로 갖는다.
➡ 방정식에 $x=\alpha$를 대입하면 k에 대한 항등식이 된다.
② $x+y=\alpha$를 만족시키는 모든 x, y에 대하여 등식이 성립한다.
➡ 등식에 $y=\alpha-x$를 대입하면 x에 대한 항등식이 된다.

0171 주어진 이차방정식이 1을 근으로 가지므로

$1+(k-2)+(k+3)m+n+1=0$

$\therefore (1+m)k+3m+n=0$

이 등식이 k에 대한 항등식이므로

$1+m=0$, $3m+n=0$ $\quad\therefore m=-1$, $n=3$

$\therefore mn=-3$ 답 -3

0172 $x-y=1$에서 $\quad y=x-1$

이것을 주어진 등식의 좌변에 대입하면

$px^2+qx+(x-1)^2-2x(x-1)+r(x-1)+2=0$

$\therefore (p-1)x^2+(q+r)x+3-r=0$ ··· ❶

이 등식이 x에 대한 항등식이므로

$p-1=0$, $q+r=0$, $3-r=0$

$\therefore p=1$, $q=-3$, $r=3$ ··· ❷

$\therefore pqr=-9$ ··· ❸

답 -9

채점 기준	비율
❶ 주어진 등식의 좌변을 x에 대하여 정리할 수 있다.	40 %
❷ p, q, r의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ pqr의 값을 구할 수 있다.	20 %

0173 $x+2y=1$에서 $\quad x=1-2y$

이것을 주어진 등식의 좌변에 대입하면

$a\{(1-2y)y+1\}+b(1-2y+1)+c(y^2+2)=12$

$\therefore (c-2a)y^2+(a-2b)y+a+2b+2c=12$

이 등식이 y에 대한 항등식이므로

$c-2a=0$, $a-2b=0$, $a+2b+2c=12$

즉 $2b=a$, $c=2a$이므로 이것을 $a+2b+2c=12$에 대입하면

$a+a+4a=12$, $\quad 6a=12$ $\quad\therefore a=2$

따라서 $b=1$, $c=4$이므로

$a+b+c=7$ 답 7

유형 04 항등식에서 계수의 합 구하기 본책 29쪽

주어진 등식의 양변에 적당한 수를 대입하여 계수에 대한 식으로 나타낸다.
➡ 등식 $(x+a)^n=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\cdots+a_0$에서
① 양변에 $x=0$을 대입하면 $\quad a^n=a_0$
② 양변에 $x=1$을 대입하면
$(1+a)^n=a_n+a_{n-1}+a_{n-2}+\cdots+a_0$

0174 주어진 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$4^3=a_6+a_5+\cdots+a_1+a_0$ ······ ㉠

주어진 등식의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$8^3=a_6-a_5+\cdots-a_1+a_0$ ······ ㉡

㉠+㉡을 하면

$64+512=2(a_6+a_4+a_2+a_0)$

$\therefore a_0+a_2+a_4+a_6=288$ 답 ⑤

0175 주어진 등식의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$a_0-a_1+a_2-\cdots+a_8=2^4=16$ 답 16

0176 주어진 등식의 양변에 $x=0$을 대입하면

$3^5=a_0$

주어진 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$4^5=a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{10}$

$\therefore a_1+a_2+\cdots+a_{10}=4^5-a_0=1024-243=781$ 답 781

0177 주어진 등식의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$(-1)^{10}+1=a_{10}+a_9+\cdots+a_1+a_0$ ······ ㉠

주어진 등식의 양변에 $x=-3$을 대입하면

$(-3)^{10}+1=a_{10}-a_9+\cdots-a_1+a_0$ ······ ㉡

㉠+㉡을 하면

$3^{10}+3=2(a_{10}+a_8+a_6+a_4+a_2+a_0)$

$\therefore a_{10}+a_8+a_6+a_4+a_2+a_0=\frac{3^{10}+3}{2}=\frac{3(3^9+1)}{2}$ 답 ⑤

유형 05 다항식의 나눗셈과 항등식 본책 30쪽

다항식 $A(x)$를 다항식 $B(x)$ $(B(x)\neq 0)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)$라 하면

$A(x)=B(x)Q(x)+R(x)$

가 성립하고, 이 등식은 x에 대한 항등식이다.

0178 x^3+ax^2+b를 x^2-x+2로 나누었을 때의 몫을 $x+c$ (c는 상수)라 하면

$x^3+ax^2+b=(x^2-x+2)(x+c)$

$=x^3+(c-1)x^2+(-c+2)x+2c$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로

$a=c-1,\ 0=-c+2,\ b=2c$ $\quad\therefore a=1,\ b=4,\ c=2$

$\therefore ab=4$ 답 4

참고 x^3+ax^2+b의 최고차항의 계수가 1, x^2-x+2의 최고차항의 계수가 1이므로 몫은 $x+c$ (c는 상수) 꼴이다.

0179 x^3+ax+b를 x^2+3x-2로 나누었을 때의 몫을 $x+c$ (c는 상수)라 하면

$x^3+ax+b=(x^2+3x-2)(x+c)+2$

$=x^3+(c+3)x^2+(3c-2)x-2c+2$ ⋯ ❶

이 등식이 x에 대한 항등식이므로

$0=c+3,\ a=3c-2,\ b=-2c+2$

$\therefore a=-11,\ b=8,\ c=-3$ ⋯ ❷

$\therefore a+b=-3$ ⋯ ❸

답 -3

채점 기준	비율
❶ 나눗셈에 대한 등식을 세울 수 있다.	40 %
❷ a, b, c의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	20 %

0180 $3x^3+a$를 x^2+x+b로 나누었을 때의 몫을 $3x+c$ (c는 상수)라 하면

$3x^3+a=(x^2+x+b)(3x+c)$

$=3x^3+(c+3)x^2+(c+3b)x+bc$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로

$c+3=0,\ c+3b=0,\ a=bc$ $\quad\therefore a=-3,\ b=1,\ c=-3$

$\therefore a^2+b^2=10$ 답 10

0181 $x^4+ax^3+bx-11$을 x^2-2x+4로 나누었을 때의 몫을 x^2+cx+d (c, d는 상수)라 하면

$x^4+ax^3+bx-11=(x^2-2x+4)(x^2+cx+d)+x-3$

$=x^4+(c-2)x^3+(d-2c+4)x^2$

$+(-2d+4c+1)x+4d-3$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로

$a=c-2,\ 0=d-2c+4,\ b=-2d+4c+1,\ -11=4d-3$

$\therefore a=-1,\ b=9,\ c=1,\ d=-2$

$\therefore a-b=-10$ 답 ②

유형 06~07 일차식으로 나누었을 때의 나머지 본책 30쪽

다항식 $P(x)$를 일차식 $x-\alpha$로 나누었을 때의 나머지 ➡ $P(\alpha)$

0182 나머지정리에 의하여 $\quad P(2)=3,\ Q(2)=-1$

따라서 구하는 나머지는

$3P(2)-4Q(2)=3\cdot3-4\cdot(-1)=13$ 답 13

0183 나머지정리에 의하여 $\quad P(3)=7$

따라서 구하는 나머지는 $\quad 4P(3)=4\cdot7=28$ 답 ④

0184 나머지정리에 의하여

$P(1)+Q(1)=-4,\ P(1)-Q(1)=6$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $\quad P(1)=1,\ Q(1)=-5$

따라서 구하는 나머지는

$P(1)Q(1)=1\cdot(-5)=-5$ 답 -5

0185 $P(x)=x^4+ax^3+bx^2-3$이라 하면 나머지정리에 의하여

$P(1)=4,\ P(-1)=-4$

$1+a+b-3=4,\ 1-a+b-3=-4$

$\therefore a+b=6,\ -a+b=-2$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $\quad a=4,\ b=2$

$\therefore ab=8$ 답 ④

0186 $P(x)=x^3+ax^2-3x+2$라 하면 나머지정리에 의하여

$P(-1)=P(3)$

$-1+a+3+2=27+9a-9+2$

$-8a=16$ $\quad\therefore a=-2$ 답 ②

0187 $P(x)=ax^7+bx^5+cx^3+dx+2$라 하면 나머지정리에 의하여 $\quad P(1)=7$

$a+b+c+d+2=7$ $\quad\therefore a+b+c+d=5$ ⋯ ❶

따라서 $P(x)$를 $x+1$로 나누었을 때의 나머지는

$P(-1)=-a-b-c-d+2$

$=-(a+b+c+d)+2$

$=-5+2=-3$ ⋯ ❷

답 -3

채점 기준	비율
❶ $a+b+c+d$의 값을 구할 수 있다.	50 %
❷ 주어진 다항식을 $x+1$로 나누었을 때의 나머지를 구할 수 있다.	50 %

0188 $P(x)=2x^2+kx-5$라 하면 나머지정리에 의하여

$R_1=P(3)=3k+13,\ R_2=P(-3)=-3k+13$

$R_1R_2=25$이므로　　$(3k+13)(-3k+13)=25$

$169-9k^2=25$,　　$k^2=16$

$\therefore k=4$ ($\because k>0$)　　답 4

유형 08 이차식으로 나누었을 때의 나머지　본책 31쪽

다항식 $P(x)$를 이차식 $(x-\alpha)(x-\beta)$로 나누었을 때의 나머지
➡ 나머지를 $ax+b$ (a, b는 상수)로 놓고 $P(\alpha)$, $P(\beta)$의 값을 이용하여 a, b의 값을 구한다.

0189 나머지정리에 의하여　　$P(1)=-1$, $P(-2)=-7$

다항식 $P(x)$를 x^2+x-2로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, $R(x)=ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$$P(x)=(x^2+x-2)Q(x)+ax+b$$
$$=(x+2)(x-1)Q(x)+ax+b$$

양변에 $x=1$, $x=-2$를 각각 대입하면

$P(1)=a+b$, $P(-2)=-2a+b$

$\therefore a+b=-1$, $-2a+b=-7$

위의 두 식을 연립하여 풀면　　$a=2$, $b=-3$

따라서 $R(x)=2x-3$이므로　　$R(2)=1$　　답 ①

0190 나머지정리에 의하여　　$P(1)=2$, $P(-1)=4$

다항식 $(x^2+x+1)P(x)$를 x^2-1로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$$(x^2+x+1)P(x)=(x^2-1)Q(x)+ax+b$$
$$=(x+1)(x-1)Q(x)+ax+b$$

양변에 $x=1$, $x=-1$을 각각 대입하면

$3P(1)=a+b$, $P(-1)=-a+b$

$\therefore a+b=6$, $-a+b=4$

위의 두 식을 연립하여 풀면　　$a=1$, $b=5$

따라서 구하는 나머지는 $x+5$이다.　　답 $x+5$

0191 $P(x)$를 x^2-4로 나누었을 때의 몫을 $Q_1(x)$라 하면

$$P(x)=(x^2-4)Q_1(x)+x+1$$
$$=(x+2)(x-2)Q_1(x)+x+1 \quad \cdots\cdots ㉠$$

$P(x)$를 x^2+2x-3으로 나누었을 때의 몫을 $Q_2(x)$라 하면

$$P(x)=(x^2+2x-3)Q_2(x)-x+2$$
$$=(x+3)(x-1)Q_2(x)-x+2 \quad \cdots\cdots ㉡$$

$P(x)$를 x^2-3x+2로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$$P(x)=(x^2-3x+2)Q(x)+ax+b$$
$$=(x-1)(x-2)Q(x)+ax+b \quad \cdots\cdots ㉢$$

㉠의 양변에 $x=2$를 대입하면　　$P(2)=3$

㉡의 양변에 $x=1$을 대입하면　　$P(1)=1$

㉢의 양변에 $x=1$, $x=2$를 각각 대입하면

$P(1)=a+b$, $P(2)=2a+b$

$\therefore a+b=1$, $2a+b=3$

위의 두 식을 연립하여 풀면　　$a=2$, $b=-1$

따라서 구하는 나머지는 $2x-1$이다.　　답 ③

0192 $P(x)$를 x^2-4x+3으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, $R(x)=ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$$P(x)=(x^2-4x+3)Q(x)+ax+b$$
$$=(x-1)(x-3)Q(x)+ax+b \quad \cdots\cdots ㉠ \quad \cdots ❶$$

조건 ㈏의 양변에 $x=1$을 대입하면

$P(1)+P(1)=6$　　$\therefore P(1)=3$　　… ❷

조건 ㈏의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$P(-1)+P(3)=6$,　　$-7+P(3)=6$ ($\because$ 조건 ㈎)

$\therefore P(3)=13$　　… ❸

㉠의 양변에 $x=1$, $x=3$을 각각 대입하면

$P(1)=a+b$, $P(3)=3a+b$

$\therefore a+b=3$, $3a+b=13$

위의 두 식을 연립하여 풀면　　$a=5$, $b=-2$

따라서 $R(x)=5x-2$이므로　　$R(5)=23$　　… ❹

답 23

채점 기준	비율
❶ 나눗셈에 대한 등식을 세울 수 있다.	30 %
❷ $P(1)$의 값을 구할 수 있다.	20 %
❸ $P(3)$의 값을 구할 수 있다.	20 %
❹ $R(5)$의 값을 구할 수 있다.	30 %

유형 09 삼차식으로 나누었을 때의 나머지　본책 32쪽

다항식 $P(x)$를 삼차식 $(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$로 나누었을 때의 나머지
➡ 나머지를 ax^2+bx+c (a, b, c는 상수)로 놓고 $P(\alpha)$, $P(\beta)$, $P(\gamma)$의 값을 이용하여 a, b, c의 값을 구한다.

0193 $x^{15}-x^{10}+x^5-1$을 x^3-x로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, $R(x)=ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수)라 하면

$$x^{15}-x^{10}+x^5-1$$
$$=(x^3-x)Q(x)+ax^2+bx+c$$
$$=x(x+1)(x-1)Q(x)+ax^2+bx+c \quad \cdots\cdots ㉠$$

㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면　　$-1=c$

㉠의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$-4=a-b+c$　　$\therefore a-b=-3$　　…… ㉡

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$0=a+b+c$　　$\therefore a+b=1$　　…… ㉢

㉡, ㉢을 연립하여 풀면　　$a=-1$, $b=2$

따라서 $R(x)=-x^2+2x-1$이므로

$R(-2)=-9$　　답 ③

SSEN 특강　다항식의 나눗셈에서의 나머지

다항식 $P(x)$를 $A(x)$로 나누었을 때의 나머지 $R(x)$는

① $A(x)$가 일차식 ➡ $R(x)$는 상수
➡ $R(x)=a$ (단, a는 상수)

② $A(x)$가 이차식 ➡ $R(x)$는 상수이거나 일차식
➡ $R(x)=ax+b$ (단, a, b는 상수)

③ $A(x)$가 삼차식 ➡ $R(x)$는 상수이거나 이차 이하의 다항식
➡ $R(x)=ax^2+bx+c$ (단, a, b, c는 상수)

0194 $P(x)$를 $x(x-1)$로 나누었을 때의 몫을 $Q_1(x)$라 하면

$P(x)=x(x-1)Q_1(x)+2x-1$ ...... ㉠

$P(x)$를 $(x-1)(x-2)$로 나누었을 때의 몫을 $Q_2(x)$라 하면

$P(x)=(x-1)(x-2)Q_2(x)+4x-3$ ...... ㉡

$P(x)$를 $x(x-1)(x-2)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 ax^2+bx+c (a, b, c는 상수)라 하면

$P(x)=x(x-1)(x-2)Q(x)+ax^2+bx+c$ ...... ㉢

㉠의 양변에 $x=0$, $x=1$을 각각 대입하면

$P(0)=-1$, $P(1)=1$

㉡의 양변에 $x=2$를 대입하면

$P(2)=5$

㉢의 양변에 $x=0$, $x=1$, $x=2$를 각각 대입하면

$P(0)=c$, $P(1)=a+b+c$, $P(2)=4a+2b+c$

$-1=c$, $1=a+b+c$, $5=4a+2b+c$

$\therefore a=1$, $b=1$, $c=-1$

따라서 구하는 나머지는 x^2+x-1이다. 답 x^2+x-1

0195 $P(x)$를 $(x-1)^2(x-2)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 ax^2+bx+c (a, b, c는 상수)라 하면

$P(x)=(x-1)^2(x-2)Q(x)+ax^2+bx+c$ ...... ㉠

$P(x)$를 $(x-1)^2$으로 나누었을 때의 나머지가 $x+2$이므로 ㉠에서 ax^2+bx+c를 $(x-1)^2$으로 나누었을 때의 나머지가 $x+2$이다.

$\therefore ax^2+bx+c=a(x-1)^2+x+2$

이것을 ㉠에 대입하면

$P(x)=(x-1)^2(x-2)Q(x)+a(x-1)^2+x+2$

한편 $P(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지가 3이므로

$P(2)=a+4=3$ $\therefore a=-1$

따라서 구하는 나머지는

$-(x-1)^2+x+2=-x^2+3x+1$ 답 ③

유형 10 $P(ax+b)$를 $x-\alpha$로 나누었을 때의 나머지 본책 32쪽

다항식 $P(ax+b)$를 $x-\alpha$로 나누었을 때의 나머지
⇒ $P(a\alpha+b)$

0196 $P(x)$를 $2x^2+x-3$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면

$P(x)=(2x^2+x-3)Q(x)+x+6$
$=(2x+3)(x-1)Q(x)+x+6$ ...... ㉠

$P(x+4)$를 $x+3$으로 나누었을 때의 나머지는

$P(-3+4)=P(1)$

이므로 ㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$P(1)=7$ 답 ②

다른 풀이 $P(x)$를 $2x^2+x-3$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면

$P(x)=(2x^2+x-3)Q(x)+x+6$
$=(2x+3)(x-1)Q(x)+x+6$

양변에 x 대신 $x+4$를 대입하면

$P(x+4)=(2x+11)(x+3)Q(x+4)+x+10$

이때 $(2x+11)(x+3)Q(x+4)$는 $x+3$으로 나누어떨어지므로 $P(x+4)$를 $x+3$으로 나누었을 때의 나머지는 $x+10$을 $x+3$으로 나누었을 때의 나머지와 같다.

따라서 구하는 나머지는 $-3+10=7$

0197 $P(x)$를 $(2x+1)(x+2)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면

$P(x)=(2x+1)(x+2)Q(x)+4x-3$ ...... ㉠

$P(3x+1)$을 $x+1$로 나누었을 때의 나머지는

$P(3\cdot(-1)+1)=P(-2)$

이므로 ㉠의 양변에 $x=-2$를 대입하면

$P(-2)=-11$ 답 -11

0198 $P(x)$를 x^2-8x+7로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면

$P(x)=(x^2-8x+7)Q(x)+3x+1$
$=(x-1)(x-7)Q(x)+3x+1$ ...... ㉠

$(6x+1)P(4x+9)$를 $2x+1$로 나누었을 때의 나머지는

$\left\{6\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+1\right\}P\left(4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+9\right)=-2P(7)$

이때 ㉠의 양변에 $x=7$을 대입하면

$P(7)=22$

이므로 구하는 나머지는

$-2P(7)=-2\cdot22=-44$ 답 -44

0199 $P(x+1004)$를 $x+1005$로 나누었을 때의 나머지가 4이므로

$P(-1005+1004)=P(-1)=4$

$-1-a+b=4$ $\therefore -a+b=5$ ...... ㉠

$P(x+1005)$를 $x+1004$로 나누었을 때의 나머지가 2이므로

$P(-1004+1005)=P(1)=2$

$1+a+b=2$ $\therefore a+b=1$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-2$, $b=3$

$\therefore ab=-6$ 답 -6

유형 11 몫 $Q(x)$를 $x-\alpha$로 나누었을 때의 나머지 본책 33쪽

다항식 $P(x)$를 $x-p$로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 R이면

$P(x)=(x-p)Q(x)+R$

이때 $Q(x)$를 $x-\alpha$ ($\alpha\neq p$)로 나누었을 때의 나머지는

$Q(\alpha)$

0200 $x^{30}+x^{29}+x$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지를 R라 하면

$x^{30}+x^{29}+x=(x-1)Q(x)+R$

양변에 $x=1$을 대입하면 $R=3$

$\therefore x^{30}+x^{29}+x=(x-1)Q(x)+3$ ...... ㉠

$Q(x)$를 $x+1$로 나누었을 때의 나머지는 $Q(-1)$이므로 ㉠의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$$-1=-2Q(-1)+3$$

$$2Q(-1)=4 \qquad \therefore Q(-1)=2$$

답 ①

0201 $P(x)$를 $x+1$로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 2이므로

$$P(x)=(x+1)Q(x)+2 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$Q(x)$를 $x-3$으로 나누었을 때의 나머지가 1이므로

$$Q(3)=1$$ ··· ❶

$P(x)$를 $x-3$으로 나누었을 때의 나머지는 $P(3)$이므로 ㉠의 양변에 $x=3$을 대입하면

$$P(3)=4Q(3)+2=4\cdot1+2=6$$ ··· ❷

답 6

채점 기준	비율
❶ $Q(3)$의 값을 구할 수 있다.	50 %
❷ $P(x)$를 $x-3$으로 나누었을 때의 나머지를 구할 수 있다.	50 %

0202 $P(x)$를 x^2+x+1로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 $x-12$이므로

$$P(x)=(x^2+x+1)Q(x)+x-12 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$Q(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 몫을 $Q'(x)$라 하면 나머지가 1이므로

$$Q(x)=(x-1)Q'(x)+1 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉡을 ㉠에 대입하면

$$P(x)=(x^2+x+1)\{(x-1)Q'(x)+1\}+x-12$$
$$=(x^3-1)Q'(x)+x^2+2x-11$$

따라서 $R(x)=x^2+2x-11$이므로

$$R(1)=-8$$

답 -8

유형 12 나머지정리를 활용한 수의 나눗셈

본책 33쪽

자연수 A를 자연수 B로 나누었을 때의 나머지를 구할 때에는 A를 x에 대한 다항식으로, B를 x에 대한 일차식으로 나타낸 후 나머지정리를 이용한다.

0203 $99^{100}=(98+1)^{100}$

$(x+1)^{100}$을 x로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R라 하면

$$(x+1)^{100}=xQ(x)+R \qquad \cdots\cdots ㉠$$

㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면 $\qquad R=1$

㉠의 양변에 $x=98$을 대입하면 $\qquad 99^{100}=98Q(98)+1$

따라서 99^{100}을 98로 나누었을 때의 나머지는 1이다.

답 ①

0204 (1) $(x-1)^9$을 x로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R라 하면

$$(x-1)^9=xQ(x)+R \qquad \cdots\cdots ㉠$$

㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면 $\qquad R=-1$

따라서 구하는 나머지는 -1이다. ··· ❶

(2) ㉠의 양변에 $x=75$를 대입하면

$$74^9=75Q(75)-1$$
$$=75\{Q(75)-1\}+75-1$$
$$=75\{Q(75)-1\}+74$$

나머지를 양수로 만든다.

따라서 구하는 나머지는 74이다. ··· ❷

답 (1) -1 (2) 74

채점 기준	비율
❶ $(x-1)^9$을 x로 나누었을 때의 나머지를 구할 수 있다.	40 %
❷ 74^9을 75로 나누었을 때의 나머지를 구할 수 있다.	60 %

참고 다항식의 나눗셈에서는 나머지가 음수일 수 있지만 자연수의 나눗셈에서는 나머지가 0 또는 자연수이어야 한다.

0205 $x^{21}+x^{22}+x^{23}$을 $x-1$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R라 하면

$$x^{21}+x^{22}+x^{23}=(x-1)Q(x)+R \qquad \cdots\cdots ㉠$$

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면 $\qquad R=3$

㉠의 양변에 $x=8$을 대입하면

$$8^{21}+8^{22}+8^{23}=7Q(8)+3$$

따라서 $8^{21}+8^{22}+8^{23}$을 7로 나누었을 때의 나머지는 3이다.

답 3

0206 $2^{1111}=(2^4)^{277}\cdot2^3=8\cdot16^{277}$

$8x^{277}$을 $x+1$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R라 하면

$$8x^{277}=(x+1)Q(x)+R \qquad \cdots\cdots ㉠$$

㉠의 양변에 $x=-1$을 대입하면 $\qquad R=-8$

㉠의 양변에 $x=16$을 대입하면

$$8\cdot16^{277}=17Q(16)-8$$
$$=17\{Q(16)-1\}+17-8$$
$$=17\{Q(16)-1\}+9$$

따라서 2^{1111}을 17로 나누었을 때의 나머지는 9이다.

답 ⑤

유형 13~14 일차식 또는 이차식으로 나누어떨어지는 다항식

본책 34쪽

다항식 $P(x)$가

① $x-\alpha$로 나누어떨어지면 ➡ $P(\alpha)=0$

② $(x-\alpha)(x-\beta)$로 나누어떨어지면 ➡ $P(\alpha)=0$, $P(\beta)=0$

0207 $P(x)=x^4+mx^3+nx+4$라 하면 $P(x)$가 $x+2$, $x-1$로 각각 나누어떨어지므로

$$P(-2)=0,\ P(1)=0$$
$$16-8m-2n+4=0,\ 1+m+n+4=0$$
$$\therefore 4m+n=10,\ m+n=-5$$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $\qquad m=5,\ n=-10$

$$\therefore m-n=15$$

답 ③

0208 $P(x)=2x^3+kx^2-k^2x+10$이라 하면 $P(x)$가 $x-1$로 나누어떨어지므로 $\qquad P(1)=0$ ··· ❶

$2+k-k^2+10=0$, $\quad k^2-k-12=0$

$(k+3)(k-4)=0 \quad \therefore k=-3$ 또는 $k=4$

따라서 모든 상수 k의 값의 합은 $\quad -3+4=1$ ··· ❷

답 1

채점 기준	비율
❶ 인수정리를 이용할 수 있다.	40 %
❷ 모든 k의 값의 합을 구할 수 있다.	60 %

0209 $P(x+2)$가 $x+1$로 나누어떨어지므로

$P(-1+2)=P(1)=0$

$1-2+a-3=0 \quad \therefore a=4$

답 ④

0210 $P(1)=1$, $P(2)=2$, $P(3)=3$에서

$P(1)-1=0$, $P(2)-2=0$, $P(3)-3=0$

이므로 $P(x)-x$는 $x-1$, $x-2$, $x-3$으로 각각 나누어떨어진다.

이때 $P(x)$는 x^3의 계수가 1인 삼차식이므로

$P(x)-x=(x-1)(x-2)(x-3)$

$\therefore P(x)=(x-1)(x-2)(x-3)+x$

따라서 $P(x)$를 $x-4$로 나누었을 때의 나머지는

$P(4)=(4-1)\cdot(4-2)\cdot(4-3)+4=10$

답 10

0211 $P(x)=x^3-3x^2+ax+b$라 하면 $P(x)$가 x^2+x-2, 즉 $(x+2)(x-1)$로 나누어떨어지므로

$P(-2)=0$, $P(1)=0$

$-8-12-2a+b=0$, $1-3+a+b=0$

$\therefore -2a+b=20$, $a+b=2$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $\quad a=-6$, $b=8$

$\therefore a-b=-14$

답 ①

0212 $P(x)=x^3+x^2+ax+b$라 하면 $P(x)$가 $(x-1)(x+3)$으로 나누어떨어지므로

$P(1)=0$, $P(-3)=0$ ··· ❶

$1+1+a+b=0$, $-27+9-3a+b=0$

$\therefore a+b=-2$, $-3a+b=18$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $\quad a=-5$, $b=3$ ··· ❷

$\therefore P(x)=x^3+x^2-5x+3$

따라서 $P(x)$를 $x+2$로 나누었을 때의 나머지는

$P(-2)=9$ ··· ❸

답 9

채점 기준	비율
❶ 인수정리를 이용할 수 있다.	40 %
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ 주어진 다항식을 $x+2$로 나누었을 때의 나머지를 구할 수 있다.	30 %

0213 $P(x)-3$이 x^2-2x-8, 즉 $(x+2)(x-4)$로 나누어떨어지므로

$P(-2)-3=0$, $P(4)-3=0$

$\therefore P(-2)=3$, $P(4)=3$

$P(3x+7)$을 x^2+4x+3으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$P(3x+7)=(x^2+4x+3)Q(x)+ax+b$

$=(x+1)(x+3)Q(x)+ax+b$

이 등식의 양변에 $x=-1$, $x=-3$을 각각 대입하면

$P(4)=-a+b$, $P(-2)=-3a+b$

$\therefore -a+b=3$, $-3a+b=3$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $\quad a=0$, $b=3$

따라서 구하는 나머지는 3이다.

답 3

0214 $P(x)=ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$라 하면 $P(1-x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지가 -4이므로

$P(1-1)=P(0)=-4 \quad \therefore c=-4$

$xP(x)+x^2$이 x^2-4, 즉 $(x+2)(x-2)$로 나누어떨어지므로

$-2P(-2)+4=0$, $2P(2)+4=0$

$P(-2)=2$, $P(2)=-2$

$4a-2b-4=2$, $4a+2b-4=-2$

$\therefore 2a-b=3$, $2a+b=1$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $\quad a=1$, $b=-1$

따라서 $P(x)=x^2-x-4$이므로 $\quad P(1)=-4$

답 ②

유형 15 조립제법

본책 35쪽

다항식을 일차식으로 나누었을 때의 몫과 나머지는 조립제법을 이용하여 쉽게 구할 수 있다.

0215 x^3+ax^2-x+b를 $x-2$로 나누었을 때의 몫과 나머지를 조립제법을 이용하여 구하면 다음과 같다.

$$\begin{array}{c|cccc} 2 & 1 & a & -1 & b \\ & & 2 & 2a+4 & 4a+6 \\ \hline & 1 & a+2 & 2a+3 & \boxed{4a+b+6} \end{array}$$

따라서 $k=2$, $c=2$, $a+2=5$, $2a+4=d$, $4a+b+6=20$이므로

$a=3$, $b=2$, $c=2$, $d=10$, $k=2$

답 ⑤

0216 (1) 주어진 조립제법에서 $2a=1$이므로

$a=\frac{1}{2}$

따라서 조립제법을 완성하면 오른쪽과 같으므로

$$\begin{array}{c|cccc} \frac{1}{2} & 2 & -3 & 3 & 1 \\ & & 1 & -1 & 1 \\ \hline & 2 & -2 & 2 & \boxed{2} \end{array}$$

$b=-2$, $c=-1$, $d=2$

$\therefore a+b+c+d=-\frac{1}{2}$

(2) $2x^3-3x^2+3x+1$을 $x-\frac{1}{2}$로 나누었을 때의 몫은 $2x^2-2x+2$, 나머지는 2이므로

$2x^3-3x^2+3x+1=\left(x-\frac{1}{2}\right)(2x^2-2x+2)+2$

$=(2x-1)(x^2-x+1)+2$

따라서 주어진 다항식을 $2x-1$로 나누었을 때의 몫은 x^2-x+1, 나머지는 2이다.

답 (1) $-\frac{1}{2}$ (2) 몫: x^2-x+1, 나머지: 2

0217 오른쪽 조립제법에서 $2x^3+3x^2-4x-5$를 $x+2$로 나누었을 때의 몫은 $2x^2-x-2$이므로

$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & 2 & 3 & -4 & -5 \\ & & -4 & 2 & 4 \\ \hline 1 & 2 & -1 & -2 & \boxed{-1} \\ & & 2 & 1 & \\ \hline & 2 & 1 & \boxed{-1} & \end{array}$$

$Q(x)=2x^2-x-2$

따라서 $Q(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 몫은 $2x+1$이다.

답 $2x+1$

유형 16 조립제법을 이용하여 항등식의 미정계수 구하기 본책 35쪽

조립제법을 연속으로 이용하면 내림차순으로 정리한 식에서 미정계수를 쉽게 구할 수 있다.

0218

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ & & -1 & 0 & -1 \\ \hline -1 & 1 & 0 & 1 & \boxed{3} \\ & & -1 & 1 & \\ \hline -1 & 1 & -1 & \boxed{2} & \\ & & -1 & & \\ \hline & 1 & \boxed{-2} & & \end{array}$$

위의 조립제법에서

$$\begin{aligned} x^3+x^2+x+4 &= (x+1)(x^2+1)+3 \\ &= (x+1)\{(x+1)(x-1)+2\}+3 \\ &= (x+1)[(x+1)\{(x+1)-2\}+2]+3 \\ &= (x+1)\{(x+1)^2-2(x+1)+2\}+3 \\ &= (x+1)^3-2(x+1)^2+2(x+1)+3 \end{aligned}$$

$\therefore a=1,\ b=-2,\ c=2,\ d=3$

$\therefore abcd=-12$

답 -12

다른 풀이 $a(x+1)^3+b(x+1)^2+c(x+1)+d$

$=a(x^3+3x^2+3x+1)+b(x^2+2x+1)+c(x+1)+d$

$=ax^3+(3a+b)x^2+(3a+2b+c)x+a+b+c+d$

이므로

$a=1,\ 3a+b=1,\ 3a+2b+c=1,\ a+b+c+d=4$

$\therefore a=1,\ b=-2,\ c=2,\ d=3$

0219 (1)

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & -4 & 7 & -2 \\ & & 2 & -4 & 6 \\ \hline 2 & 1 & -2 & 3 & \boxed{4} \\ & & 2 & 0 & \\ \hline 2 & 1 & 0 & \boxed{3} & \\ & & 2 & & \\ \hline & 1 & \boxed{2} & & \end{array}$$

위의 조립제법에서

$$\begin{aligned} x^3-4x^2+7x-2 &= (x-2)(x^2-2x+3)+4 \\ &= (x-2)\{(x-2)x+3\}+4 \\ &= (x-2)[(x-2)\{(x-2)+2\}+3]+4 \\ &= (x-2)\{(x-2)^2+2(x-2)+3\}+4 \\ &= (x-2)^3+2(x-2)^2+3(x-2)+4 \end{aligned}$$

$\therefore a=1,\ b=2,\ c=3,\ d=4$ ⋯ ❶

(2) (1)에서 $P(x)=(x-2)^3+2(x-2)^2+3(x-2)+4$이므로

$P(2.1)=0.1^3+2\times0.1^2+3\times0.1+4=4.321$ ⋯ ❷

답 (1) $a=1,\ b=2,\ c=3,\ d=4$ (2) 4.321

채점 기준	비율
❶ $a,\ b,\ c,\ d$의 값을 구할 수 있다.	70 %
❷ $P(2.1)$의 값을 구할 수 있다.	30 %

0220

$$\begin{array}{r|rrrr} \frac{1}{2} & 8 & -8 & -4 & 6 \\ & & 4 & -2 & -3 \\ \hline \frac{1}{2} & 8 & -4 & -6 & \boxed{3} \\ & & 4 & 0 & \\ \hline \frac{1}{2} & 8 & 0 & \boxed{-6} & \\ & & 4 & & \\ \hline & 8 & \boxed{4} & & \end{array}$$

위의 조립제법에서

$8x^3-8x^2-4x+6$

$=\left(x-\frac{1}{2}\right)(8x^2-4x-6)+3$

$=\left(x-\frac{1}{2}\right)\left\{\left(x-\frac{1}{2}\right)\cdot 8x-6\right\}+3$

$=\left(x-\frac{1}{2}\right)\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)\left\{8\left(x-\frac{1}{2}\right)+4\right\}-6\right]+3$

$=\left(x-\frac{1}{2}\right)\left\{8\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+4\left(x-\frac{1}{2}\right)-6\right\}+3$

$=8\left(x-\frac{1}{2}\right)^3+4\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-6\left(x-\frac{1}{2}\right)+3$

$=(2x-1)^3+(2x-1)^2-3(2x-1)+3$

$\therefore a=1,\ b=1,\ c=-3,\ d=3$

$\therefore ab-cd=10$

답 10

유형 17 인수분해 공식을 이용한 다항식의 인수분해 본책 36쪽

인수분해 공식을 바로 이용할 수 없는 경우에는 공식을 이용할 수 있도록 식을 적당히 변형한다.

0221 ③ $x^3-8=(x-2)(x^2+2x+4)$

답 ③

0222

$$\begin{aligned} a^6-a^4+2a^3-2a^2 &= a^2(a^4-a^2+2a-2) \\ &= a^2\{a^2(a^2-1)+2(a-1)\} \\ &= a^2\{a^2(a+1)(a-1)+2(a-1)\} \\ &= a^2(a-1)\{a^2(a+1)+2\} \\ &= a^2(a-1)(a^3+a^2+2) \end{aligned}$$

따라서 인수인 것은 ⑤이다.

답 ⑤

다른 풀이 $a^6-a^4+2a^3-2a^2=(a^6+2a^3+1)-(a^4+2a^2+1)$
$=(a^3+1)^2-(a^2+1)^2$
$=(a^3+1-a^2-1)(a^3+1+a^2+1)$
$=(a^3-a^2)(a^3+a^2+2)$
$=a^2(a-1)(a^3+a^2+2)$

0223 ① $a^2-(b-c)^2=(a+b-c)(a-b+c)$
② $x^3+27=(x+3)(x^2-3x+9)$
③ $x^6-y^6=(x^3+y^3)(x^3-y^3)$
$=(x+y)(x^2-xy+y^2)(x-y)(x^2+xy+y^2)$
$=(x+y)(x-y)(x^2-xy+y^2)(x^2+xy+y^2)$
④ $(a-2b)^3-27b^3$
$=(a-2b)^3-(3b)^3$
$=(a-2b-3b)\{(a-2b)^2+(a-2b)\cdot 3b+(3b)^2\}$
$=(a-5b)(a^2-ab+7b^2)$
⑤ $x^3-8y^3+z^3+6xyz$
$=x^3+(-2y)^3+z^3-3\cdot x\cdot(-2y)\cdot z$
$=(x-2y+z)(x^2+4y^2+z^2+2xy+2yz-zx)$

답 ③

유형 18 공통부분이 있는 다항식의 인수분해 본책 36쪽

① 공통부분이 있으면 공통부분을 하나의 문자로 치환하여 인수분해한다.
② ( )( )( )( ) 꼴은 공통부분이 생기도록 짝을 지어 전개한 후 공통부분을 하나의 문자로 치환하여 인수분해한다.

0224 $(x-4)(x-3)(x+1)(x+2)-24$
$=\{(x-4)(x+2)\}\{(x-3)(x+1)\}-24$
$=(x^2-2x-8)(x^2-2x-3)-24$ 상수항의 합이 같아지도록 두 개씩 짝을 지어 전개한다.
$x^2-2x=t$로 놓으면
(주어진 식)$=(t-8)(t-3)-24$
$=t^2-11t$
$=t(t-11)$
$=(x^2-2x)(x^2-2x-11)$
$=x(x-2)(x^2-2x-11)$
따라서 인수인 것은 ⑤이다.

답 ⑤

0225 $x^2-x=t$로 놓으면
(주어진 식)$=(t+1)(t-7)+15$
$=t^2-6t+8$
$=(t-2)(t-4)$
$=(x^2-x-2)(x^2-x-4)$
$=(x+1)(x-2)(x^2-x-4)$
따라서 $a=-2$, $b=-1$, $c=-4$이므로
$a+b+c=-7$

답 -7

0226 $(x^2-4x)^2+9x^2-36x+18$
$=(x^2-4x)^2+9(x^2-4x)+18$
$x^2-4x=t$로 놓으면
(주어진 식)$=t^2+9t+18$
$=(t+3)(t+6)$
$=(x^2-4x+3)(x^2-4x+6)$
$=(x-1)(x-3)(x^2-4x+6)$
$\therefore abcd=-1\cdot(-3)\cdot(-4)\cdot 6=-72$

답 -72

0227 $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)+k$
$=\{(x-1)(x-4)\}\{(x-2)(x-3)\}+k$
$=(x^2-5x+4)(x^2-5x+6)+k$ ⋯ ❶
$x^2-5x=t$로 놓으면
(주어진 식)$=(t+4)(t+6)+k$
$=t^2+10t+24+k$ ⋯⋯ ㉠ ⋯ ❷
주어진 식이 x에 대한 이차식의 완전제곱식으로 인수분해되려면 ㉠이 t에 대한 완전제곱식으로 인수분해되어야 하므로
$24+k=\left(\frac{10}{2}\right)^2$ $\therefore k=1$ ⋯ ❸

답 1

채점 기준	비율
❶ 주어진 식을 공통부분이 생기도록 짝을 지어 전개할 수 있다.	30 %
❷ 공통부분을 하나의 문자로 바꾸어 전개할 수 있다.	30 %
❸ k의 값을 구할 수 있다.	40 %

참고 $k=1$일 때, 주어진 식은 다음과 같이 인수분해된다.
(주어진 식)$=t^2+10t+25=(t+5)^2=(x^2-5x+5)^2$

유형 19 x^4+ax^2+b 꼴의 다항식의 인수분해 본책 37쪽

① $x^2=X$로 치환하여 인수분해한다.
② 이차항을 적당히 분리하여 A^2-B^2 꼴로 변형한 후 인수분해한다.

0228 $x^2=X$로 놓으면
$x^4-26x^2+25=X^2-26X+25$
$=(X-1)(X-25)$
$=(x^2-1)(x^2-25)$
$=(x+1)(x-1)(x+5)(x-5)$
이때 $a<b<c<d$이므로
$a=-5$, $b=-1$, $c=1$, $d=5$
$\therefore bc-ad=24$

답 24

0229 $x^2=X$로 놓으면
$x^4-32x^2+256=X^2-32X+256$
$=(X-16)^2$
$=(x^2-16)^2$
$=\{(x+4)(x-4)\}^2$
$=(x+4)^2(x-4)^2$
이때 $a>b$이므로 $a=4$, $b=-4$
$\therefore a-b=8$

답 ②

0230 $x^4-11x^2y^2+25y^4=(x^4-10x^2y^2+25y^4)-x^2y^2$
$=(x^2-5y^2)^2-(xy)^2$
$=(x^2+xy-5y^2)(x^2-xy-5y^2)$

따라서 $a=1$, $b=-5$ 또는 $a=-1$, $b=-5$이므로

$a^2+b^2=26$ 답 ⑤

0231 $x^4+3x^2+4=(x^4+4x^2+4)-x^2$

$=(x^2+2)^2-x^2$

$=(x^2+x+2)(x^2-x+2)$

$=(x^2-x+2)\{(x+1)^2-(x+1)+2\}$

따라서 $f(x)=x^2-x+2$ 또는 $f(x)=-(x^2-x+2)$이므로

$|f(1)|=|1-1+2|=2$ 답 2

유형 20 여러 개의 문자를 포함한 다항식의 인수분해 본책 37쪽

① 차수가 가장 낮은 문자에 대하여 내림차순으로 정리한 후 인수분해한다.
② 차수가 모두 같을 때에는 어느 한 문자에 대하여 내림차순으로 정리한 후 인수분해한다.

0232 주어진 식을 x에 대하여 내림차순으로 정리하면

$2x^2+5xy-3y^2+3x-5y-2$

$=2x^2+(5y+3)x-(3y^2+5y+2)$

$=2x^2+(5y+3)x-(y+1)(3y+2)$

$=\{2x-(y+1)\}\{x+(3y+2)\}$

$=(2x-y-1)(x+3y+2)$

따라서 $a=2$, $b=-1$, $c=3$이므로

$a-b+c=6$ 답 6

참고 y에 대하여 내림차순으로 정리한 후 인수분해해도 그 결과는 같다.

0233 주어진 식을 c에 대하여 내림차순으로 정리하면

$a^2b+b^2c-b^3-ca^2=(b^2-a^2)c+a^2b-b^3$

$=(b^2-a^2)c-b(b^2-a^2)$

$=(b^2-a^2)(c-b)$

$=(b+a)(b-a)(c-b)$

$=(a+b)(a-b)(b-c)$

따라서 인수가 아닌 것은 ④이다. 답 ④

0234 주어진 식을 a에 대하여 내림차순으로 정리하면

$a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+2abc$

$=a^2(b+c)+b^2c+ab^2+ac^2+bc^2+2abc$

$=(b+c)a^2+(b^2+c^2+2bc)a+b^2c+bc^2$

$=(b+c)a^2+(b+c)^2a+bc(b+c)$

$=(b+c)\{a^2+(b+c)a+bc\}$

$=(b+c)(a+b)(a+c)$

$=(a+b)(b+c)(c+a)$ 답 ⑤

0235 주어진 식을 x에 대하여 내림차순으로 정리하면

$x^2+2xy-3y^2+ax+4y+4$

$=x^2+(2y+a)x-(3y^2-4y-4)$

$=x^2+(2y+a)x-(y-2)(3y+2)$ ··· ❶

주어진 식이 x, y에 대한 두 일차식의 곱으로 인수분해되려면

$-(y-2)+(3y+2)=2y+a$ $\therefore a=4$ ··· ❷

답 4

채점 기준	비율
❶ 주어진 식을 x에 대하여 내림차순으로 정리할 수 있다.	50 %
❷ a의 값을 구할 수 있다.	50 %

0236 주어진 식의 분자를 x에 대하여 내림차순으로 정리하면

$xy(x-y)+zx(z-x)+yz(y-z)$

$=x^2y-xy^2+z^2x-zx^2+y^2z-yz^2$

$=(y-z)x^2-(y^2-z^2)x+yz(y-z)$

$=(y-z)x^2-(y-z)(y+z)x+yz(y-z)$

$=(y-z)\{x^2-(y+z)x+yz\}$

$=(y-z)(x-y)(x-z)$

$=(x-y)(y-z)(x-z)$

$\therefore$ (주어진 식)$=\dfrac{(x-y)(y-z)(x-z)}{(x-y)(y-z)(x-z)}=1$ 답 1

유형 21 인수정리를 이용한 다항식의 인수분해 본책 38쪽

삼차 이상의 다항식 $P(x)$를 인수분해할 때에는 $P(\alpha)=0$을 만족시키는 상수 α의 값을 구하여 $P(x)=(x-\alpha)Q(x)$ 꼴로 인수분해한다.

0237 $P(x)=x^3-10x^2+19x+30$이라 하면

$P(-1)=-1-10-19+30=0$

이므로 오른쪽과 같이 조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & -10 & 19 & 30 \\ & & -1 & 11 & -30 \\ \hline & 1 & -11 & 30 & \boxed{0} \end{array}$$

$x^3-10x^2+19x+30$

$=(x+1)(x^2-11x+30)$

$=(x+1)(x-5)(x-6)$

$\therefore a^2+b^2+c^2=1^2+(-5)^2+(-6)^2=62$ 답 62

0238 $P(x)$가 $x-2$를 인수로 가지므로

$P(2)=8+8+2a-6=0$

$2a=-10$ $\therefore a=-5$

따라서 $P(x)=x^3+2x^2-5x-6$이므로 오른쪽과 같이 조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & 2 & -5 & -6 \\ & & 2 & 8 & 6 \\ \hline & 1 & 4 & 3 & \boxed{0} \end{array}$$

x^3+2x^2-5x-6

$=(x-2)(x^2+4x+3)$

$=(x-2)(x+1)(x+3)$

답 $(x-2)(x+1)(x+3)$

0239 $P(x)=x^3+(2a-1)x^2-2(a+1)x-4a$라 하면

$P(-1)=-1+(2a-1)+2(a+1)-4a=0$

이므로 조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & 2a-1 & -2(a+1) & -4a \\ & & -1 & -2a+2 & 4a \\ \hline & 1 & 2a-2 & -4a & \boxed{0} \end{array}$$

$\therefore\ x^3+(2a-1)x^2-2(a+1)x-4a$

$=(x+1)\{x^2+(2a-2)x-4a\}$

$=(x+1)(x-2)(x+2a)$

따라서 인수인 것은 ㄴ, ㄹ이다. 답 ④

다른 풀이 주어진 식을 a에 대하여 내림차순으로 정리하면

$x^3+(2a-1)x^2-2(a+1)x-4a$

$=a(2x^2-2x-4)+x^3-x^2-2x$

$=2a(x^2-x-2)+x(x^2-x-2)$

$=(x^2-x-2)(x+2a)$

$=(x+1)(x-2)(x+2a)$

0240 $x^4+5x^3+3x^2-9x=x(x^3+5x^2+3x-9)$

$H(x)=x^3+5x^2+3x-9$라 하면

$H(1)=1+5+3-9=0$

이므로 오른쪽과 같이 조립제법을 이용하여 $H(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 5 & 3 & -9 \\ & & 1 & 6 & 9 \\ \hline & 1 & 6 & 9 & \boxed{0} \end{array}$$

x^3+5x^2+3x-9

$=(x-1)(x^2+6x+9)$

$=(x-1)(x+3)^2$

$\therefore\ x^4+5x^3+3x^2-9x=x(x-1)(x+3)^2$ ··· ❶

$P(x)$, $Q(x)$는 각각 이차항의 계수가 1인 이차식이고

$P(1)\neq0$, $Q(0)\neq0$이므로

$P(x)$는 $x-1$을 인수로 갖지 않고 $Q(x)$는 x를 인수로 갖지 않는다.

$P(x)=x(x+3)$

$Q(x)=(x+3)(x-1)$ ··· ❷

$\therefore\ P(2)+Q(-1)=10+(-4)=6$ ··· ❸

답 6

채점 기준	비율
❶ 주어진 식을 인수분해할 수 있다.	40 %
❷ $P(x)$, $Q(x)$를 구할 수 있다.	40 %
❸ $P(2)+Q(-1)$의 값을 구할 수 있다.	20 %

0241

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & a & 0 & 0 & b & 3 \\ & & a & a & a & a+b \\ \hline 1 & a & a & a & a+b & \boxed{a+b+3} \\ & & a & 2a & 3a & \\ \hline & a & 2a & 3a & \boxed{4a+b} & \end{array}$$

이때 ax^4+bx+3이 $(x-1)^2$을 인수로 가지므로

$a+b+3=0$, $4a+b=0$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=-4$

$\therefore\ x^4-4x+3=(x-1)^2(x^2+2x+3)$

따라서 $Q(x)=x^2+2x+3$이므로 $Q(2)=11$ 답 11

0242 $x^{10}-1$을 $(x-1)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, $R(x)=ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$x^{10}-1=(x-1)^2Q(x)+ax+b$

양변에 $x=1$을 대입하면 $0=a+b$ $\therefore\ b=-a$

$\therefore\ x^{10}-1=(x-1)^2Q(x)+ax-a$

$=(x-1)^2Q(x)+a(x-1)$

$=(x-1)\{(x-1)Q(x)+a\}$ ······ ㉠

한편 $P(x)=x^{10}-1$이라 하면

$P(1)=1-1=0$

이므로 조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrrr} 1 & 1 & \overbrace{0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0}^{9\text{개}} & & & & -1 \\ & & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \hline & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & \boxed{0} \end{array}$$

$\therefore\ x^{10}-1=(x-1)(x^9+x^8+x^7+\cdots+1)$ ······ ㉡

㉠, ㉡에서

$x^9+x^8+x^7+\cdots+1=(x-1)Q(x)+a$

이 등식은 x에 대한 항등식이므로 양변에 $x=1$을 대입하면

$a=1+1+1+\cdots+1=10$

따라서 $R(x)=10x-10$이므로 $R(2)=10$ 답 10

유형 22 계수가 대칭인 사차식의 인수분해

본책 38쪽

$ax^4+bx^3+cx^2+bx+a$ 꼴의 사차식은 다음과 같은 순서로 인수분해한다.

(i) 가운데 항이 상수가 되도록 x^2으로 묶어 낸다.

(ii) $x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2$임을 이용하여 $x+\frac{1}{x}$ 또는 $x-\frac{1}{x}$에 대한 이차식으로 정리하여 인수분해한다.

(iii) 각 인수에 x를 곱하여 다항식이 되도록 한다.

0243 $x^4-4x^3+5x^2-4x+1$

$=x^2\left(x^2-4x+5-\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}\right)$

$=x^2\left\{x^2+\frac{1}{x^2}-4\left(x+\frac{1}{x}\right)+5\right\}$

$=x^2\left\{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-4\left(x+\frac{1}{x}\right)+3\right\}$

$=x^2\left(x+\frac{1}{x}-1\right)\left(x+\frac{1}{x}-3\right)$

$=(x^2-x+1)(x^2-3x+1)$

따라서 인수인 것은 ①이다. 답 ①

0244 $x^4+3x^3-8x^2+3x+1$

$=x^2\left(x^2+3x-8+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}\right)$

$=x^2\left\{x^2+\frac{1}{x^2}+3\left(x+\frac{1}{x}\right)-8\right\}$

$=x^2\left\{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+3\left(x+\frac{1}{x}\right)-10\right\}$

$=x^2\left(x+\frac{1}{x}+5\right)\left(x+\frac{1}{x}-2\right)$

$=(x^2+5x+1)(x^2-2x+1)$

$=(x-1)^2(x^2+5x+1)$

따라서 $a=-1$, $b=5$, $c=1$이므로

$abc=-5$ 　답 -5

0245 $x^4-x^3-4x^2+x+1$

$=x^2\left(x^2-x-4+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)$

$=x^2\left\{x^2+\frac{1}{x^2}-\left(x-\frac{1}{x}\right)-4\right\}$

$=x^2\left\{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2-\left(x-\frac{1}{x}\right)-2\right\}$

$=x^2\left(x-\frac{1}{x}+1\right)\left(x-\frac{1}{x}-2\right)$

$=(x^2+x-1)(x^2-2x-1)$

답 $(x^2+x-1)(x^2-2x-1)$

유형 23 조건이 주어진 다항식의 인수분해 　본책 39쪽

① 주어진 조건을 다항식에 대입하여 간단히 한 후 인수분해한다.
② 다항식을 먼저 인수분해한 후 주어진 조건을 대입하여 식을 정리한다.

0246 $x+2y-z=0$에서 　$z=x+2y$

$\therefore x^2+2xy+z^2=x^2+2xy+(x+2y)^2$
$=x(x+2y)+(x+2y)^2$
$=(x+2y)(2x+2y)$
$=2z(x+y)$ 　답 ③

참고 주어진 식에 $x=z-2y$를 대입하면

$(z-2y)^2+2y(z-2y)+z^2=2z^2-2yz=2z(z-y)=2z(x+y)$

주어진 식에 $y=\frac{z-x}{2}$를 대입하면

$x^2+2x\cdot\frac{z-x}{2}+z^2=z^2+xz=z(z+x)=z(2x+2y)=2z(x+y)$

0247 $1-4a^2+4ab-b^2=1-(4a^2-4ab+b^2)$
$=1^2-(2a-b)^2$
$=\{1+(2a-b)\}\{1-(2a-b)\}$
$=(1+2a-b)(1-2a+b)$

이때 $2a+b+1=0$에서 　$1+2a=-b$, $1+b=-2a$

$\therefore$ (주어진 식)$=(-b-b)(-2a-2a)$
$=(-2b)(-4a)=8ab$ 　답 ③

다른 풀이 $2a+b+1=0$에서 　$b=-2a-1$

$\therefore 1-4a^2+4ab-b^2$
$=1-4a^2+4a(-2a-1)-(-2a-1)^2$
$=1-4a^2-8a^2-4a-4a^2-4a-1$
$=-16a^2-8a$
$=8a(-2a-1)=8ab$

유형 24 인수분해를 이용하여 삼각형의 모양 판단하기 　본책 39쪽

삼각형의 세 변의 길이가 a, b, c일 때
① $a=b$ 또는 $b=c$ 또는 $c=a$ ➡ 이등변삼각형
② $a=b=c$ ➡ 정삼각형
③ $a^2+b^2=c^2$ ➡ 빗변의 길이가 c인 직각삼각형

0248 주어진 식의 좌변을 c에 대하여 내림차순으로 정리하면

$a^3-a^2b+ac^2+ab^2-b^3-bc^2$
$=(a-b)c^2+a^3-a^2b+ab^2-b^3$
$=(a-b)c^2+a^2(a-b)+b^2(a-b)$
$=(a-b)(a^2+b^2+c^2)$

즉 $(a-b)(a^2+b^2+c^2)=0$이고 $\underbrace{a^2+b^2+c^2\neq0}_{a,\ b,\ c\text{는 모두 양수이므로 } a^2+b^2+c^2\neq0}$이므로

$a-b=0$ 　$\therefore a=b$

따라서 주어진 조건을 만족시키는 삼각형은 $a=b$인 이등변삼각형이다. 　답 ①

0249 주어진 식의 좌변을 인수분해하면

$a^3+b^3+c^3-3abc$
$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$
$=\frac{1}{2}(a+b+c)\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}$

즉 $(a+b+c)\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}=0$이고

$a+b+c\neq0$이므로

$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$
$a-b=0$, $b-c=0$, $c-a=0$
$\therefore a=b=c$

따라서 주어진 조건을 만족시키는 삼각형은 정삼각형이다.

답 정삼각형

0250 주어진 식을 $P(x)$라 하면 다항식 $P(x)$가 $x-a$로 나누어떨어지므로 　$P(a)=0$

$\therefore a^3-(b+c)a^2-(b^2+c^2)a+b^3+b^2c+bc^2+c^3=0$

이 식의 좌변을 인수분해하면

$a^3-(b+c)a^2-(b^2+c^2)a+b^3+b^2c+bc^2+c^3$
$=a^3-(b+c)a^2-(b^2+c^2)a+b^2(b+c)+c^2(b+c)$
$=a^3-(b+c)a^2-(b^2+c^2)a+(b^2+c^2)(b+c)$
$=a^2(a-b-c)-(b^2+c^2)(a-b-c)$
$=(a^2-b^2-c^2)(a-b-c)$

즉 $(a^2-b^2-c^2)(a-b-c)=0$이고 $\underbrace{a-b-c\neq0}_{a,\ b,\ c\text{는 삼각형의 세 변의 길이이므로 } a\neq b+c}$이므로

$a^2-b^2-c^2=0$ 　$\therefore a^2=b^2+c^2$

따라서 주어진 조건을 만족시키는 삼각형은 빗변의 길이가 a인 직각삼각형이므로 그 넓이는 　$\frac{1}{2}bc$ 　답 $\frac{1}{2}bc$

유형 25 인수분해를 이용하여 식의 값 구하기 　본책 40쪽

곱셈 공식과 인수분해 공식을 이용하여 식을 변형한 후 주어진 조건을 식에 대입한다.

0251 $x^4+y^4-x^3y-xy^3=x^3(x-y)-y^3(x-y)$
$=(x-y)(x^3-y^3)$
$=(x-y)^2(x^2+xy+y^2)$
$=(x-y)^2\{(x-y)^2+3xy\}$

$x-y=(1+\sqrt{3})-(1-\sqrt{3})=2\sqrt{3}$, $xy=(1+\sqrt{3})(1-\sqrt{3})=-2$

이므로 구하는 식의 값은

$(2\sqrt{3})^2\cdot\{(2\sqrt{3})^2+3\cdot(-2)\}=72$ 　답 72

0252 $a^3+b^3+c^3-3abc$

$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

에서 $a+b+c=0$이므로

$a^3+b^3+c^3-3abc=0 \qquad \therefore a^3+b^3+c^3=3abc$

$\therefore \dfrac{a^3+b^3+c^3}{2abc}=\dfrac{3abc}{2abc}=\dfrac{3}{2}$ 답 ④

0253 주어진 식을 a에 대하여 내림차순으로 정리하면

$a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$

$=a^2(b-c)+b^2c-ab^2+ac^2-bc^2$

$=(b-c)a^2-(b^2-c^2)a+bc(b-c)$

$=(b-c)a^2-(b+c)(b-c)a+bc(b-c)$

$=(b-c)\{a^2-(b+c)a+bc\}$

$=(b-c)(a-b)(a-c)$

$=(b-c)(b-a)(c-a)$ ⋯ ❶

$b-c=2+\sqrt{2}$, $c-a=2-\sqrt{2}$를 변끼리 더하면

$b-a=4$ ⋯ ❷

따라서 구하는 식의 값은

$(2+\sqrt{2})\cdot4\cdot(2-\sqrt{2})=8$ ⋯ ❸

답 8

채점 기준	비율
❶ 주어진 식을 인수분해할 수 있다.	60 %
❷ $b-a$의 값을 구할 수 있다.	20 %
❸ 주어진 식의 값을 구할 수 있다.	20 %

0254 주어진 식을 a에 대하여 내림차순으로 정리하면

$-a^2b+a^2c+ab^2-ac^2-b^2c+bc^2$

$=(c-b)a^2-(c^2-b^2)a-b^2c+bc^2$

$=(c-b)a^2-(c+b)(c-b)a+bc(c-b)$

$=(c-b)\{a^2-(c+b)a+bc\}$

$=(c-b)(a-b)(a-c)$

이때 a, b, c는 연속하는 세 자연수이고 $a<b<c$이므로

$b=a+1$, $c=a+2$

따라서 구하는 식의 값은

$\{a+2-(a+1)\}\{a-(a+1)\}\{a-(a+2)\}$

$=1\cdot(-1)\cdot(-2)=2$ 답 2

유형 26 인수분해를 이용한 복잡한 수의 계산

본책 40쪽

수를 문자로 바꾸고 인수분해 공식을 이용한다.

0255 $a=99999$로 놓으면

$(\text{주어진 식})=\dfrac{a^3+1}{(a-1)a+1}=\dfrac{(a+1)(a^2-a+1)}{a^2-a+1}$

$=a+1=100000$ 답 ④

0256 $x=30$으로 놓으면

$29\cdot31\cdot32\cdot34+9=(x-1)(x+1)(x+2)(x+4)+9$

$=\{(x-1)(x+4)\}\{(x+1)(x+2)\}+9$

$=(x^2+3x-4)(x^2+3x+2)+9$

$x^2+3x=X$로 놓으면

$(x^2+3x-4)(x^2+3x+2)+9=(X-4)(X+2)+9$

$=X^2-2X+1$

$=(X-1)^2$

$=(x^2+3x-1)^2$

$=(30^2+3\cdot30-1)^2$

$=(900+90-1)^2$

$=989^2$

$\therefore \sqrt{29\cdot31\cdot32\cdot34+9}=\sqrt{989^2}=989$ 답 989

0257 $P(1)=0$, $P(-2)=0$이므로 조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr}
1 & 1 & -1 & -3 & 5 & -2 \\
 & & 1 & 0 & -3 & 2 \\
\hline
-2 & 1 & 0 & -3 & 2 & \boxed{0} \\
 & & -2 & 4 & -2 & \\
\hline
 & 1 & -2 & 1 & \boxed{0} &
\end{array}$$

$\therefore P(x)=(x-1)(x+2)(x^2-2x+1)$

$=(x-1)^3(x+2)$

$\therefore P(11)=(11-1)^3\cdot(11+2)=13000$ 답 ③

0258 6^6-1이 n으로 나누어떨어지므로 n은 6^6-1의 약수이다.

$6^6-1=(6^3)^2-1=(6^3-1)(6^3+1)$

$=(6-1)(6^2+6+1)(6+1)(6^2-6+1)$

$=5\cdot7\cdot31\cdot43$

따라서 구하는 두 자리 자연수 n의 값은 31, $\underbrace{35}_{5\cdot7=35}$, 43이다.

답 31, 35, 43

0259 전략 $P(x)=ax^2+bx+c$라 하고 주어진 등식에 대입한 후 계수 비교법을 이용한다.

풀이 $P(x)$가 이차 이하의 다항식이므로 $P(x)=ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수)라 하면 주어진 등식은

$(ax^2+bx+c)^2=2(ax^4+bx^2+c)+8x^2$

$\therefore a^2x^4+2abx^3+(2ac+b^2)x^2+2bcx+c^2$

$=2ax^4+(2b+8)x^2+2c$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로

$a^2=2a$, $2ab=0$, $2ac+b^2=2b+8$, $2bc=0$, $c^2=2c$

이때 $a^2=2a$에서 $\quad a(a-2)=0 \quad \therefore a=0$ 또는 $a=2$

(i) $a=0$일 때,

$2ab=0$이고, $2ac+b^2=2b+8$에서 $\quad b^2-2b-8=0$

$(b+2)(b-4)=0 \quad \therefore b=-2$ 또는 $b=4$

$b=-2$ 또는 $b=4$일 때 $2bc=0$이려면 $\quad c=0$

$c=0$은 $c^2=2c$를 만족시키므로

$P(x)=-2x$ 또는 $P(x)=4x$

(ii) $a=2$일 때,

$2ab=0$에서 $\quad b=0$

$2ac+b^2=2b+8$에서 $\quad 4c=8 \quad \therefore c=2$

$b=0$, $c=2$는 $2bc=0$, $c^2=2c$를 모두 만족시키므로

$P(x)=2x^2+2$

(i), (ii)에서 다항식 $P(x)$는 3개이다. 답 3

0260 전략 $P_n(x)$에 $n=1, 2, 3$을 각각 대입하여 $P_1(x)$, $P_2(x)$, $P_3(x)$를 구한 후 수치 대입법을 이용한다.

풀이 $P_1(x)=x-1$, $P_2(x)=(x-1)(x-2)$, $P_3(x)=(x-1)(x-2)(x-3)$이므로

$2x^3-3x^2+1$

$=a+b(x-1)+c(x-1)(x-2)+d(x-1)(x-2)(x-3)$

이 등식의 양변에 $x=0$, $x=1$, $x=2$, $x=3$을 각각 대입하면

$1=a-b+2c-6d$, $0=a$, $5=a+b$, $28=a+2b+2c$

$\therefore a=0,\ b=5,\ c=9,\ d=2$

$\therefore a+b+c+d=16$ 답 16

0261 전략 주어진 등식의 양변에 적당한 수를 대입해 본다.

풀이 주어진 등식의 양변에 $x=0$을 대입하면 $a_0=-10$이므로

$(x^2+3x)^5=a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{10}x^{10}$

$\therefore x^5(x+3)^5=a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{10}x^{10}$

이 식의 좌변에서 사차 이하의 항의 계수는 모두 0이므로

$a_1=a_2=a_3=a_4=0$

즉 $x^5(x+3)^5=a_5x^5+a_6x^6+\cdots+a_{10}x^{10}$이므로

$(x+3)^5=a_5+a_6x+\cdots+a_{10}x^5$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면 $a_5=3^5$

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$4^5=a_5+a_6+a_7+a_8+a_9+a_{10}$

$\therefore a_6+a_7+a_8+a_9+a_{10}=4^5-3^5$

$\therefore 4a_5-(a_6+a_7+a_8+a_9+a_{10})=4\cdot3^5-(4^5-3^5)$

$=5\cdot3^5-4^5=191$ 답 ②

0262 전략 $P(x)$가 삼차식이므로 x^2-2x+3으로 나누었을 때의 몫을 일차식으로 놓는다.

풀이 $P(x)=(x^2-2x+3)(px+q)$ (p, q는 상수, $p\neq0$)라 하면 $P(0)=-9$이므로

$P(x)$의 삼차항의 계수

$3q=-9$ $\therefore q=-3$

$\therefore P(x)=(x^2-2x+3)(px-3)$ …… ㉠

또 $P(x)-36$을 x^2+5로 나누었을 때의 몫을 $px+r$ (r는 상수)라 하면

$P(x)$의 삼차항의 계수

$P(x)-36=(x^2+5)(px+r)$

$\therefore P(x)=(x^2+5)(px+r)+36$

$P(0)=-9$이므로

$5r+36=-9$ $\therefore r=-9$

$\therefore P(x)=(x^2+5)(px-9)+36$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$(x^2-2x+3)(px-3)=(x^2+5)(px-9)+36$

$px^3-(2p+3)x^2+(3p+6)x-9=px^3-9x^2+5px-9$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로

$2p+3=9$, $3p+6=5p$

$\therefore p=3$

따라서 $P(x)=(x^2-2x+3)(3x-3)$이므로

$P(x)=(x^2+5)(3x-9)+36$

$P(2)=9$ 답 9

0263 전략 다항식 $P(x)+Q(x)$, $\{P(x)\}^3+\{Q(x)\}^3$, $P(x)Q(x)$를 $x-a$로 나누었을 때의 나머지는 각각 $P(a)+Q(a)$, $\{P(a)\}^3+\{Q(a)\}^3$, $P(a)Q(a)$이다.

풀이 $P(x)+Q(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지가 5이므로

$P(1)+Q(1)=5$ ⋯➊

$\{P(x)\}^3+\{Q(x)\}^3$을 $x-1$로 나누었을 때의 나머지가 35이므로

$\{P(1)\}^3+\{Q(1)\}^3=35$ ⋯➋

$P(x)Q(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지는 $P(1)Q(1)$이므로

$\{P(1)\}^3+\{Q(1)\}^3$

$=\{P(1)+Q(1)\}^3-3P(1)Q(1)\{P(1)+Q(1)\}$

$35=5^3-15P(1)Q(1)$, $15P(1)Q(1)=90$

$\therefore P(1)Q(1)=6$ ⋯➌

답 6

채점 기준	비율
➊ $P(1)+Q(1)$의 값을 구할 수 있다.	30 %
➋ $\{P(1)\}^3+\{Q(1)\}^3$의 값을 구할 수 있다.	30 %
➌ $P(x)Q(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지를 구할 수 있다.	40 %

0264 전략 다항식 $A(x)$를 $B(x)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)$라 하면 $A(x)=B(x)Q(x)+R(x)$임을 이용한다.

풀이 $x^n(x^2+ax+b)$를 $(x-3)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면

$x^n(x^2+ax+b)=(x-3)^2Q(x)+3^n(x-3)$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=3$을 대입하면

$3^n(9+3a+b)=0$

$\therefore b=-3a-9$ ($\because 3^n\neq0$) …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$x^n(x^2+ax-3a-9)=(x-3)^2Q(x)+3^n(x-3)$

$x^n(x-3)(x+a+3)=(x-3)\{(x-3)Q(x)+3^n\}$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로

$x^n(x+a+3)=(x-3)Q(x)+3^n$

양변에 $x=3$을 대입하면

$3^n(3+a+3)=3^n$, $a+6=1$

$\therefore a=-5$

$a=-5$를 ㉡에 대입하면 $b=6$

$\therefore ab=-30$ 답 ②

0265 전략 $P(x^2)=\frac{1}{2}(x^2-1)=\frac{1}{2}(x+1)(x-1)$이므로 $\{P(-1)\}^{1001}$, $\{P(1)\}^{1001}$의 값을 이용한다.

풀이 $P(x^2)=\frac{1}{2}(x^2-1)=\frac{1}{2}(x+1)(x-1)$

$\{P(x)\}^{1001}$을 $P(x^2)$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

02 나머지정리와 인수분해

$$\{P(x)\}^{1001}=P(x^2)Q(x)+ax+b$$
$$=\frac{1}{2}(x+1)(x-1)Q(x)+ax+b \quad \cdots❶$$

양변에 $x=-1$, $x=1$을 각각 대입하면

$$\{P(-1)\}^{1001}=-a+b,\ \{P(1)\}^{1001}=a+b$$

이때 $P(-1)=-1$, $P(1)=0$이므로

$$-a+b=-1,\ a+b=0 \quad \cdots❷$$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $\quad a=\frac{1}{2},\ b=-\frac{1}{2}$

따라서 구하는 나머지는 $\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$이다. $\cdots$❸

답 $\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$

채점 기준	비율
❶ 나눗셈에 대한 등식을 세울 수 있다.	30 %
❷ $\{P(-1)\}^{1001}$, $\{P(1)\}^{1001}$을 이용하여 연립일차방정식을 세울 수 있다.	40 %
❸ $\{P(x)\}^{1001}$을 $P(x^2)$으로 나누었을 때의 나머지를 구할 수 있다.	30 %

0266 전략 주어진 등식을 이용하여 $f(x)$의 차수와 최고차항의 계수를 구한다.

풀이 ㄱ. $f(x)$를 x로 나누었을 때의 나머지는 $f(0)$이므로 주어진 등식의 양변에 $x=0$을 대입하면

$$\{f(0)\}^3=1 \qquad \therefore f(0)=1$$

ㄴ. $f(x)$를 n차식이라 하면 $\{f(x)\}^3$은 $3n$차식, $4x^2f(x)+8x^2+6x+1$은 $(n+2)$차식이므로

$$3n=n+2 \qquad \therefore n=1$$

$f(x)=ax+b$ (a, b는 상수, $a>0$)라 하면 $\{f(x)\}^3$의 최고차항의 계수는 a^3, $4x^2f(x)+8x^2+6x+1$의 최고차항의 계수는 $4a$이므로

$$a^3=4a, \qquad a(a+2)(a-2)=0$$
$$\therefore a=2\ (\because a>0)$$

즉 $f(x)$의 최고차항의 계수는 2이다.

ㄷ. ㄱ, ㄴ에서 $\quad f(x)=2x+1$

$\{f(x)\}^3$을 x^2-1로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $cx+d$ (c, d는 상수)라 하면

$$(2x+1)^3=(x^2-1)Q(x)+cx+d$$
$$=(x+1)(x-1)Q(x)+cx+d$$

양변에 $x=1$, $x=-1$을 각각 대입하면

$$27=c+d,\ -1=-c+d$$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $\quad c=14,\ d=13$

따라서 $\{f(x)\}^3$을 x^2-1로 나누었을 때의 나머지는 $14x+13$이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

0267 전략 먼저 조건 (나)를 이용하여 등식을 세운다.

풀이 조건 (나)에 의하여 $f(x)$를 $(x-1)^2$으로 나누었을 때의 몫과 나머지를 각각 $ax+b$ (a, b는 상수, $a\neq0$)라 하면

$$f(x)=(x-1)^2(ax+b)+ax+b \quad \cdots\cdots ㉠$$

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$$f(1)=a+b, \qquad 2=a+b$$
$$\therefore b=2-a \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉡을 ㉠에 대입하면

$$f(x)=(x-1)^2(ax+2-a)+ax+2-a$$
$$=(x-1)^2\{(x-1)a+2\}+(x-1)a+2$$
$$=a(x-1)^3+\underbrace{2(x-1)^2+a(x-1)+2}$$

└ $f(x)$를 $(x-1)^3$으로 나누었을 때의 몫

이므로

$$R(x)=2(x-1)^2+a(x-1)+2$$

이때 $R(0)=R(3)$이므로

$$2-a+2=8+2a+2 \qquad \therefore a=-2$$

따라서 $R(x)=2(x-1)^2-2(x-1)+2$이므로

$$R(5)=26$$

답 26

0268 전략 주어진 조건을 모두 만족시키는 다항식을 $P(x)$를 이용하여 나타낸다.

풀이 $P(1)=\frac{1}{2}$, $P(2)=\frac{2}{3}$, $P(3)=\frac{3}{4}$, $P(4)=\frac{4}{5}$에서

$$2P(1)-1=0,\ 3P(2)-2=0,\ 4P(3)-3=0,\ 5P(4)-4=0$$

이므로 $(x+1)P(x)-x$는 $x-1$, $x-2$, $x-3$, $x-4$로 각각 나누어떨어진다.

이때 $P(x)$는 삼차식이므로 $(x+1)P(x)-x$는 사차식이다. 즉 $(x+1)P(x)-x=a(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$ (a는 상수)라 하고 양변에 $x=-1$을 대입하면

$$1=120a \qquad \therefore a=\frac{1}{120}$$
$$\therefore (x+1)P(x)-x=\frac{1}{120}(x-1)(x-2)(x-3)(x-4) \quad \cdots❶$$

$P(x)$를 $x-5$로 나누었을 때의 나머지는 $P(5)$이므로 위의 등식의 양변에 $x=5$를 대입하면

$$6P(5)-5=\frac{1}{5} \qquad \therefore P(5)=\frac{13}{15}$$

따라서 구하는 나머지는 $\frac{13}{15}$이다. $\cdots$❷

답 $\frac{13}{15}$

채점 기준	비율
❶ $(x+1)P(x)-x$를 구할 수 있다.	60 %
❷ $P(x)$를 $x-5$로 나누었을 때의 나머지를 구할 수 있다.	40 %

0269 전략 주어진 조립제법을 이용하여 a, b, c, p, q, r의 값을 구한다.

풀이 주어진 조립제법에서

$$p=1,\ a-1=q,\ -q=-1,$$
$$b-1=r,\ -r=5,\ c+5=13$$
$$\therefore a=2,\ b=-4,\ c=8,\ p=1,\ q=1,\ r=-5$$

이때 $P(x)=(ax^2+bx+c)+(px^2+qx+r)$라 하면

$$P(x)=(2x^2-4x+8)+(x^2+x-5)$$
$$=3x^2-3x+3$$

따라서 $P(x)$를 $x+2$로 나누었을 때의 나머지는

$P(-2)=21$ 답 ①

다른 풀이 주어진 다항식은 조립제법에 의하여

$x^3+ax^2+bx+c=(x+1)(px^2+qx+r)+13$

으로 나타낼 수 있으므로

$ax^2+bx+c=(x+1)(px^2+qx+r)+13-x^3$

이때 $P(x)=(ax^2+bx+c)+(px^2+qx+r)$라 하면

$$\begin{aligned}P(x)&=(x+1)(px^2+qx+r)+13-x^3+(px^2+qx+r)\\&=(x+2)(px^2+qx+r)+13-x^3\end{aligned}$$

따라서 $P(x)$를 $x+2$로 나누었을 때의 나머지는

$P(-2)=21$

0270 전략 $(x+\alpha)(x-\beta)$를 전개한 후 항등식의 성질을 이용한다.

풀이 $f(x)=x^2+2x-n$이 $(x+\alpha)(x-\beta)$로 인수분해되므로

$$\begin{aligned}x^2+2x-n&=(x+\alpha)(x-\beta)\\&=x^2+(\alpha-\beta)x-\alpha\beta\end{aligned}$$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로

$\alpha-\beta=2$, $\alpha\beta=n$

$\alpha-\beta=2$에서 $\alpha=\beta+2$이므로

$n=\alpha\beta=\beta(\beta+2)$ ··· ❶

n은 1000 이하의 자연수이므로

$\beta=30$이면 $n=30\cdot32=960<1000$

$\beta=31$이면 $n=31\cdot33=1023>1000$

따라서 자연수 β는 1, 2, ⋯, 30이므로 조건을 만족시키는 다항식 $f(x)$의 개수는 30이다. ··· ❷

답 30

채점 기준	비율
❶ n을 β에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	50 %
❷ $f(x)$의 개수를 구할 수 있다.	50 %

참고 α, β의 순서쌍 (α, β)는

$(3, 1)$, $(4, 2)$, ⋯, $(32, 30)$

이므로 다항식 $f(x)$는

$(x+3)(x-1)$, $(x+4)(x-2)$, ⋯, $(x+32)(x-30)$

0271 전략 소수는 1과 자기 자신만을 약수로 갖는 수임을 이용한다.

풀이 $$\begin{aligned}n^4-16n^2+100&=(n^4+20n^2+100)-36n^2\\&=(n^2+10)^2-(6n)^2\\&=(n^2+6n+10)(n^2-6n+10)\end{aligned}$$

이 자연수가 소수가 되려면 1과 자기 자신만을 약수로 가져야 한다.

(i) $n^2+6n+10=1$일 때,

$n^2+6n+9=0$에서

$(n+3)^2=0$ $\therefore n=-3$

(ii) $n^2-6n+10=1$일 때,

$n^2-6n+9=0$에서

$(n-3)^2=0$ $\therefore n=3$

(i), (ii)에서 n은 자연수이므로 $n=3$ 답 3

참고 $n=3$이면

$n^4-16n^2+100=(9+18+10)\cdot(9-18+10)=37$

0272 전략 보기의 각 경우에 대하여 x^4+ax^2+b가 인수분해되는 꼴을 생각해 본다.

풀이 ㄱ. $a=0$, $b=1$일 때,

$P(x)=x^4+1$

$\therefore N(0, 1)=0$

ㄴ. $a=n$, $b=-20$일 때,

$P(x)=x^4+nx^2-20$

$20=1\cdot20=2\cdot10=4\cdot5$에서 x^4+nx^2-20은

$(x^2-1)(x^2+20)$, $(x^2+1)(x^2-20)$, $(x^2-2)(x^2+10)$,

$(x^2+2)(x^2-10)$, $(x^2-4)(x^2+5)$, $(x^2+4)(x^2-5)$

이 중에서

$(x^2-1)(x^2+20)=(x+1)(x-1)(x^2+20)$,

$(x^2-4)(x^2+5)=(x+2)(x-2)(x^2+5)$

인 경우에만 $N(n, -20)=2$이므로 $\underbrace{\text{정수 } n}_{19,\ 1}$의 개수는 2이다.

ㄷ. $a=m$, $b=4$일 때,

$P(x)=x^4+mx^2+4$

$4=1\cdot4=2\cdot2$에서 x^4+mx^2+4는

$(x^2-1)(x^2-4)$, $(x^2+1)(x^2+4)$,

$(x^2-2)(x^2-2)$, $(x^2+2)(x^2+2)$

이 중에서

$(x^2-1)(x^2-4)=(x+1)(x-1)(x+2)(x-2)$

인 경우에만 $N(m, 4)=4$이므로 $\underbrace{\text{정수 } m}_{-5}$의 개수는 1이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ③

0273 전략 $201=x$로 놓으면 $200=x-1$이므로 x^{15}을 $x-1$로 나누었을 때의 몫을 이용하여 Q를 구한다.

풀이 x^{15}을 $x-1$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R라 하면

$x^{15}=(x-1)Q(x)+R$ ······ ㉠

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$R=1$

㉠의 양변에 $x=201$을 대입하면

$201^{15}=200Q(201)+1$

이므로 201^{15}을 200으로 나누었을 때의 몫은 $Q(201)$이다.

$\therefore Q=Q(201)$

한편 $x^{15}=(x-1)Q(x)+1$에서

$x^{15}-1=(x-1)Q(x)$

$(x-1)(x^{14}+x^{13}+\cdots+1)=(x-1)Q(x)$

$\therefore Q(x)=x^{14}+x^{13}+\cdots+1$ ··· ❶

$Q(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 몫을 $Q'(x)$, 나머지를 R'이라 하면

$Q(x)=(x-1)Q'(x)+R'$ ······ ㉡

㉡의 양변에 $x=1$을 대입하면

$Q(1)=R'$ $\therefore R'=15$

㉡의 양변에 $x=201$을 대입하면

$Q(201)=200Q'(201)+15$

따라서 Q를 200으로 나누었을 때의 나머지는 15이다. ··· ❷

답 15

채점 기준	비율
❶ x^{15}을 $x-1$로 나누었을 때의 몫을 구할 수 있다.	60 %
❷ Q를 200으로 나누었을 때의 나머지를 구할 수 있다.	40 %

참고 $P(x)=x^{15}-1$이라 하면 $P(1)=0$이므로 오른쪽과 같이 조립제법을 이용하면

$P(x)=(x-1)(x^{14}+x^{13}+\cdots+1)$

	14개					
1	1	0	0	$\cdots$	0	-1
		1	1	$\cdots$	1	1
	1	1	1	$\cdots$	1	0

0274 **전략** 조립제법을 이용하여 n^4+n^2-2를 $(n-1)(n-2)$로 나누었을 때의 몫과 나머지를 구해 본다.

풀이

1	1	0	1	0	-2
		1	1	2	2
2	1	1	2	2	0
		2	6	16	
	1	3	8	18	

위의 조립제법에서

$n^4+n^2-2=(n-1)(n^3+n^2+2n+2)$

$=(n-1)\{(n-2)(n^2+3n+8)+18\}$

$=(n-1)(n-2)(n^2+3n+8)+18(n-1)$

이때 $(n-1)(n-2)(n^2+3n+8)$은 $(n-1)(n-2)$로 나누어떨어지므로 n^4+n^2-2가 $(n-1)(n-2)$의 배수가 되기 위해서는 $18(n-1)$이 $(n-1)(n-2)$의 배수이어야 한다.

즉 $18(n-1)=(n-1)(n-2)k$ (k는 자연수)이므로

$18=(n-2)k$ ($\because n\neq1$)

k가 가장 작은 값을 가질 때 n이 가장 큰 값을 가지므로 $k=1$일 때 n이 가장 크다.

따라서 구하는 n의 값은

$18=n-2 \quad \therefore n=20$

답 20

0275 **전략** 두 이차식 $A(x)$, $B(x)$는 $x^3-3x^2+2x+5-(2x+1)$의 인수임을 이용한다.

풀이 다항식 x^3-3x^2+2x+5를 서로 다른 두 이차식 $A(x)$, $B(x)$로 나누었을 때의 나머지가 모두 $2x+1$이므로 $A(x)$, $B(x)$는

$x^3-3x^2+2x+5-(2x+1)=x^3-3x^2+4$

의 인수이다.

$P(x)=x^3-3x^2+4$라 하면

$P(-1)=-1-3+4=0$

이므로 오른쪽과 같이 조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

-1	1	-3	0	4
		-1	4	-4
	1	-4	4	0

$P(x)=(x+1)(x^2-4x+4)$

$=(x+1)(x-2)^2$

두 이차식 $A(x)$, $B(x)$는 $P(x)$의 서로 다른 인수이므로

$A(x)=(x+1)(x-2)$, $B(x)=(x-2)^2$

또는 $A(x)=(x-2)^2$, $B(x)=(x+1)(x-2)$

$\therefore A(x)+B(x)=(x+1)(x-2)+(x-2)^2$

따라서 다항식 $A(x)+B(x)$를 $x-5$로 나누었을 때의 나머지는

$A(5)+B(5)=27$

답 27

0276 **전략** 주어진 18개의 정육면체와 직육면체의 부피의 합을 a, b에 대한 식으로 나타낸 후 인수분해한다.

풀이 주어진 18개의 정육면체와 직육면체의 부피의 합은

$4a^3+b^3+8a^2b+5ab^2$

$P(a)=4a^3+8ba^2+5b^2a+b^3$이라 하면

$P(-b)=-4b^3+8b^3-5b^3+b^3=0$

이므로 오른쪽과 같이 조립제법을 이용하여 $P(a)$를 인수분해하면

$-b$	4	$8b$	$5b^2$	b^3
		$-4b$	$-4b^2$	$-b^3$
	4	$4b$	b^2	0

$P(a)=(a+b)(4a^2+4ab+b^2)$

$=(a+b)(2a+b)^2$

즉 $(a+b)(2a+b)^2=75$이고 $75=3\cdot5^2$이므로

$a+b=3$, $2a+b=5$

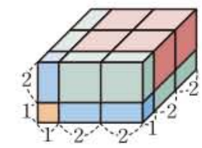
위의 두 식을 연립하여 풀면 $\quad a=2$, $b=1$

따라서 부피가 75인 직육면체의 밑면의 가로의 길이, 세로의 길이, 높이는 5, 5, 3이므로 구하는 대각선의 길이는

$\sqrt{5^2+5^2+3^2}=\sqrt{59}$

답 ④

참고 주어진 18개의 정육면체와 직육면체로 만든 부피가 75인 직육면체는 오른쪽 그림과 같다.



0277 **전략** 가로의 길이와 세로의 길이를 각각 인수분해하여 가로 방향과 세로 방향에 필요한 타일의 개수를 구한다.

풀이 $P(n)=n^3+7n^2+14n+8$이라 하면

$P(-1)=-1+7-14+8=0$

이므로 오른쪽과 같이 조립제법을 이용하여 $P(n)$을 인수분해하면

-1	1	7	14	8
		-1	-6	-8
	1	6	8	0

$P(n)=(n+1)(n^2+6n+8)$

$=(n+1)(n+2)(n+4)$

한편 $n^2+4n+3=(n+1)(n+3)$이므로 한 변의 길이가 $n+1$인 정사각형 모양의 타일이 가로 방향으로 $(n+2)(n+4)$개, 세로 방향으로 $(n+3)$개 필요하다.

따라서 필요한 타일의 개수는

$(n+2)(n+3)(n+4)$

답 ⑤

0278 **전략** 주어진 등식의 좌변을 인수분해한 후 식의 값이 0이 되는 경우를 생각해 본다.

풀이 $a^3-b^3-a^2b+ab^2-ac^2+bc^2$

$=(a-b)(a^2+ab+b^2)-ab(a-b)-c^2(a-b)$

$=(a-b)(a^2+ab+b^2-ab-c^2)$

$=(a-b)(a^2+b^2-c^2)$

이므로

$(a-b)(a^2+b^2-c^2)=0 \quad \cdots\cdots ㉠$

ㄱ. $a>b$이면 $a\neq b$이므로 ㉠에서 $\quad a^2+b^2=c^2$

따라서 주어진 삼각형은 빗변의 길이가 c인 직각삼각형이므로

$c>a$

ㄴ. $b>c$이면 $b^2>c^2$, 즉 $b^2-c^2>0$이므로

$$a^2+b^2-c^2\neq 0$$

따라서 ㉠에서 $\quad a=b$

ㄷ. $b\geq c$이면 $b^2\geq c^2$, 즉 $b^2-c^2\geq 0$이므로

$$a^2+b^2-c^2\neq 0$$

따라서 ㉠에서 $\quad a=b \quad \therefore a\geq c$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ③

0279 전략 인수분해를 이용하여 a, b, c의 값을 구한 후 삼각형의 변의 길이의 조건을 생각한다.

풀이 $a^2b-a^2c-ab^2+b^2c+ac^2-bc^2$

$=(b-c)a^2-(b^2-c^2)a+b^2c-bc^2$

$=(b-c)a^2-(b+c)(b-c)a+bc(b-c)$

$=(b-c)\{a^2-(b+c)a+bc\}$

$=(b-c)(a-b)(a-c)$

이므로

$(b-c)(a-b)(a-c)=0$ ··· ❶

이때 $a=2b$이므로 위의 식에 대입하면

$b(b-c)(2b-c)=0$

$\therefore b=c$ 또는 $c=2b$ ($\because b>0$)

그런데 $b=c$이면

$a=2b=b+c$ (가장 긴 변의 길이)<(나머지 두 변의 길이의 합)을 만족시켜야 한다.

이므로 삼각형이 만들어지지 않는다.

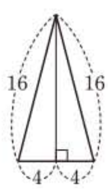
$\therefore c=2b$

주어진 삼각형의 둘레의 길이가 40이므로 $a+b+c=40$에서

$2b+b+2b=40,\quad 5b=40 \quad \therefore b=8$

$\therefore a=16,\ b=8,\ c=16$ ··· ❷

따라서 오른쪽 그림과 같이 삼각형의 밑변의 길이를 8이라 하면 높이는



$\sqrt{16^2-4^2}=4\sqrt{15}$

이므로 삼각형의 넓이는

$\frac{1}{2}\cdot 8\cdot 4\sqrt{15}=16\sqrt{15}$ ··· ❸

답 $16\sqrt{15}$

채점 기준	비율
❶ a, b, c에 대한 등식의 좌변을 인수분해할 수 있다.	40 %
❷ a, b, c의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ 삼각형의 넓이를 구할 수 있다.	20 %

0280 전략 먼저 주어진 등식의 좌변을 인수분해한다.

풀이 $(a+b+c)(ab+bc+ca)-abc$

$=\{a+(b+c)\}\{(b+c)a+bc\}-abc$

$=(b+c)a^2+(b+c)^2a+abc+(b+c)bc-abc$

$=(b+c)a^2+(b+c)^2a+(b+c)bc$

$=(b+c)\{a^2+(b+c)a+bc\}$

$=(b+c)(a+b)(a+c)$

이고 $280=2^3\cdot 5\cdot 7$이므로

$(a+b)(b+c)(a+c)=2^3\cdot 5\cdot 7$

이때 $a>b>c\geq 2$에서 $a+b>a+c>b+c\geq 5$이므로

$a+b=8,\ a+c=7,\ b+c=5$

$\therefore a=5,\ b=3,\ c=2$ ($a>b>c\geq 2$이고 $b+c=5$이므로 $b=3,\ c=2$)

$\therefore abc=30$ 답 ②

0281 전략 $15=x$로 놓고 x^3+x^2-x+2를 인수분해한다.

풀이 $15=x$로 놓으면

$15^3+15^2-15+2=x^3+x^2-x+2$

$P(x)=x^3+x^2-x+2$라 하면

$P(-2)=-8+4+2+2=0$

이므로 오른쪽과 같이 조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

-2	1	1	-1	2
		-2	2	-2
	1	-1	1	0

$P(x)=(x+2)(x^2-x+1)$

$\therefore P(15)=(15+2)(15^2-15+1)$

$=17\cdot 211$

따라서 $a=17$, $b=211$ 또는 $a=211$, $b=17$이므로

$a+b=228$ 답 228

03 복소수

0282 답 실수부분: 3, 허수부분: -1

0283 답 실수부분: -1, 허수부분: $\sqrt{2}$

0284 답 실수부분: $\frac{3}{2}$, 허수부분: $-\frac{5}{2}$

0285 답 실수부분: 0, 허수부분: -4

0286 답 실수부분: 6, 허수부분: 0

0287 답 실수부분: $2+\sqrt{5}$, 허수부분: 0

0288 답 ㄱ, ㄷ, ㅂ

0289 답 ㄴ, ㄹ, ㅁ

0290 답 $a=1$, $b=-2$

0291 답 $a=0$, $b=-5$

0292 $2a+1=-2$, $3=b-1$이므로

$a=-\frac{3}{2}$, $b=4$ 답 $a=-\frac{3}{2}$, $b=4$

0293 $5a-2=0$, $9-3b=0$이므로

$a=\frac{2}{5}$, $b=3$ 답 $a=\frac{2}{5}$, $b=3$

0294 $a+b=-2$, $4=2b$이므로

$a=-4$, $b=2$ 답 $a=-4$, $b=2$

0295 $3a+b=5$, $a-b=-1$이므로 두 식을 연립하여 풀면

$a=1$, $b=2$ 답 $a=1$, $b=2$

0296 $a+2b-5=2$, $4=6a-b+1$이므로

$a+2b=7$, $6a-b=3$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=1$, $b=3$ 답 $a=1$, $b=3$

0297 답 $3-2i$

0298 답 $\sqrt{2}+4i$

0299 답 -8

참고 실수 a의 켤레복소수는 a이다.

0300 답 $-\sqrt{15}i$

참고 순허수 bi의 켤레복소수는 $-bi$이다.

0301 답 $a=3$, $b=-8$

0302 답 $a=-\sqrt{5}$, $b=7$

0303 답 $a=-9$, $b=-2$

0304 답 $a=\sqrt{11}$, $b=0$

0305 $(4-i)+(-8+2i)=(4-8)+(-1+2)i$

$=-4+i$ 답 $-4+i$

0306 $(7-2i)-(i-5)=(7+5)+(-2-1)i$

$=12-3i$ 답 $12-3i$

0307 $(11+3i)-(7-4i)+2i=(11-7)+(3+4+2)i$

$=4+9i$ 답 $4+9i$

0308 $(2-i)(4+3i)=8+6i-4i-3i^2$

$=8+2i-3\cdot(-1)$

$=11+2i$ 답 $11+2i$

0309 $(3+i)^2=9+6i+i^2$

$=9+6i-1$

$=8+6i$ 답 $8+6i$

0310 $\frac{1-i}{1+i}=\frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}=\frac{1-2i+i^2}{1-i^2}$

$=\frac{-2i}{2}=-i$ 답 $-i$

0311 $\frac{3+2i}{2-i}=\frac{(3+2i)(2+i)}{(2-i)(2+i)}=\frac{6+3i+4i+2i^2}{4-i^2}$

$=\frac{4+7i}{5}=\frac{4}{5}+\frac{7}{5}i$ 답 $\frac{4}{5}+\frac{7}{5}i$

0312 $\overline{(\bar{z})}=z=6-4i$ 답 $6-4i$

0313 $z+\bar{z}=(6-4i)+(6+4i)=12$ 답 12

0314 $z\bar{z}=(6-4i)(6+4i)=36-16i^2$

$=36+16=52$ 답 52

0315 $\frac{z}{\bar{z}}=\frac{6-4i}{6+4i}=\frac{(6-4i)^2}{(6+4i)(6-4i)}$

$=\frac{36-48i+16i^2}{36-16i^2}=\frac{36-48i-16}{36+16}$

$=\frac{20-48i}{52}=\frac{5}{13}-\frac{12}{13}i$ 답 $\frac{5}{13}-\frac{12}{13}i$

0316 $i^{50}=(i^4)^{12}\cdot i^2=-1$ 답 -1

0317 $(-i)^{65}=-i^{65}=-(i^4)^{16}\cdot i=-i$ 답 $-i$

0318 $1-i+i^2-i^3=1-i+(-1)-(-i)=0$ 답 0

0319 $i^{100}+i^{101}=(i^4)^{25}+(i^4)^{25}\cdot i=1+i$ 답 $1+i$

0320 $(1+i)^2=1+2i+i^2=2i$이므로

$(1+i)^4=\{(1+i)^2\}^2=(2i)^2=4i^2=-4$ 답 -4

0321 $\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^2=\frac{1-2i+i^2}{2}=-i$이므로

$\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^6=\left\{\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^2\right\}^3=(-i)^3=-i^3=i$ 답 i

0322 $\sqrt{-9}=\sqrt{9}i=3i$ 답 $3i$

0323 $\sqrt{-12}=\sqrt{12}i=2\sqrt{3}i$ 답 $2\sqrt{3}i$

0324 $-\sqrt{-8}=-\sqrt{8}i=-2\sqrt{2}i$ 답 $-2\sqrt{2}i$

0325 $-\sqrt{-\frac{9}{4}}=-\sqrt{\frac{9}{4}}i=-\frac{3}{2}i$ 답 $-\frac{3}{2}i$

0326 $\pm\sqrt{-3}=\pm\sqrt{3}i$ 답 $\pm\sqrt{3}i$

SSEN 특강 a의 제곱근

실수 a에 대하여 제곱하여 a가 되는 수를 a의 제곱근이라 한다.
즉 $x^2=a$일 때 x를 a의 제곱근이라 한다.

0327 $\pm\sqrt{-25}=\pm\sqrt{25}i=\pm5i$ 답 $\pm5i$

0328 $\pm\sqrt{-18}=\pm\sqrt{18}i=\pm3\sqrt{2}i$ 답 $\pm3\sqrt{2}i$

0329 $\pm\sqrt{-\frac{1}{16}}=\pm\sqrt{\frac{1}{16}}i=\pm\frac{1}{4}i$ 답 $\pm\frac{1}{4}i$

0330 $\sqrt{-2}\sqrt{-8}=\sqrt{2}i\cdot\sqrt{8}i=\sqrt{16}i^2=-4$ 답 -4

0331 $\sqrt{3}\sqrt{-27}=\sqrt{3}\sqrt{27}i=\sqrt{81}i=9i$ 답 $9i$

0332 $\frac{\sqrt{16}}{\sqrt{-4}}=\frac{4}{\sqrt{4}i}=\frac{4i}{2i^2}=\frac{4i}{-2}=-2i$ 답 $-2i$

0333 $\frac{\sqrt{-30}}{\sqrt{-6}}=\frac{\sqrt{30}i}{\sqrt{6}i}=\sqrt{5}$ 답 $\sqrt{5}$

유형 01 복소수의 뜻과 분류 본책 50쪽

a, b가 실수일 때,

복소수 $a+bi$ $\begin{cases}\text{실수 } a & (b=0)\\ \text{허수 } a+bi & (b\neq0)\end{cases}$

0334 ① 0은 복소수이다.
③ $2-\sqrt{5}i$의 실수부분은 2, 허수부분은 $-\sqrt{5}$이다.
④ $-3i$의 실수부분은 0이다.
⑤ $a=3i$, $b=0$이면 $a+bi=3i$는 허수이다.
└ a가 실수라는 조건이 없으므로 허수일 수도 있다.
답 ②

0335 허수는 $\sqrt{5}-i$, $11i$, $\sqrt{3}i$, $9i-2$의 4개이다. 답 4

유형 02 복소수의 사칙연산 본책 50쪽

복소수의 사칙연산 ➡ 허수단위 i를 문자처럼 생각하여 계산한다.

0336 ① $(7+3i)+(4-6i)=11-3i$
② $(i-5)-(2i-9)=4-i$
③ $(1-i^2)(1+i^2)=(1+1)(1-1)=0$
④ $(2-3i)^2=4-12i-9=-5-12i$
⑤ $\frac{1+i}{1-i}+\frac{1-i}{1+i}=\frac{(1+i)^2+(1-i)^2}{(1-i)(1+i)}=\frac{2i-2i}{2}=0$
답 ⑤

0337 $(2-i)(3+2i)+\frac{1+\sqrt{2}i}{\sqrt{2}-i}$

$=6+4i-3i+2+\frac{(1+\sqrt{2}i)(\sqrt{2}+i)}{(\sqrt{2}-i)(\sqrt{2}+i)}$

$=8+i+\frac{3i}{3}$

$=8+2i$ 답 $8+2i$

0338 $z_1=(1-i)^2=1-2i+i^2=-2i$

$z_2=\frac{3-\sqrt{3}i}{3+\sqrt{3}i}=\frac{(3-\sqrt{3}i)^2}{(3+\sqrt{3}i)(3-\sqrt{3}i)}$

$=\frac{6-6\sqrt{3}i}{12}=\frac{1-\sqrt{3}i}{2}$

$\therefore z_1z_2=-2i\cdot\frac{1-\sqrt{3}i}{2}=-\sqrt{3}-i$

따라서 $a=-\sqrt{3}$, $b=-1$이므로

$a^2-b^2=2$ 답 ⑤

0339 $(5+3i)◎(1-2i)$

$=(5+3i)+(1-2i)-(5+3i)(1-2i)$

$=6+i-(5-10i+3i+6)$

$=6+i-11+7i$

$=-5+8i$ ··· ❶

따라서 구하는 실수부분은 -5이다. ··· ❷

답 -5

채점 기준	비율
❶ $(5+3i)◎(1-2i)$를 계산할 수 있다.	80 %
❷ $(5+3i)◎(1-2i)$의 실수부분을 구할 수 있다.	20 %

유형 03 복소수가 주어질 때의 식의 값 구하기 본책 51쪽

복소수 x에 대한 이차 이상의 식의 값
➡ $x=a+bi$ (a, b는 실수)에서 $x-a=bi$ 꼴로 변형한 후 양변을 제곱하여 이차방정식을 만들고 이것을 주어진 식에 대입한다.

0340 $x=\frac{1-\sqrt{3}i}{2}$에서 $\quad 2x-1=-\sqrt{3}i$

양변을 제곱하면 $\quad 4x^2-4x+1=-3$

$4x^2-4x=-4 \quad \therefore x^2-x=-1$

$$\begin{aligned}\therefore 3x^2-3x-2&=3(x^2-x)-2\\&=3\cdot(-1)-2\\&=-5\end{aligned}$$

답 ①

다른 풀이 $$\begin{aligned}3x^2-3x-2&=3\cdot\left(\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\right)^2-3\cdot\frac{1-\sqrt{3}i}{2}-2\\&=3\cdot\frac{-2-2\sqrt{3}i}{4}-\frac{3}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}i-2\\&=-\frac{3}{2}-\frac{3\sqrt{3}}{2}i-\frac{3}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}i-2\\&=-5\end{aligned}$$

0341 $x=-1+\sqrt{5}i$에서 $\quad x+1=\sqrt{5}i$

양변을 제곱하면 $\quad x^2+2x+1=-5$

$\therefore x^2+2x=-6$

$\therefore x^2+2x+4=-6+4=-2$

답 -2

0342 $x=\frac{5-i}{1+i}=\frac{(5-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=2-3i$에서

$x-2=-3i$

양변을 제곱하면 $\quad x^2-4x+4=-9$

$\therefore x^2-4x+13=0$

$$\begin{aligned}\therefore -x^3+4x^2-15x+5&=-x(x^2-4x+13)-2x+5\\&=-2x+5\\&=-2(2-3i)+5\\&=1+6i\end{aligned}$$

답 ④

0343 $x^2=-1+3i$에서 $\quad x^2+1=3i$

양변을 제곱하면 $\quad x^4+2x^2+1=-9$

$\therefore x^4+2x^2+10=0$

양변을 x로 나누면 $\quad x^3+2x+\frac{10}{x}=0$

$$\begin{aligned}\therefore x^4+x^3+4x^2+2x+\frac{10}{x}&=x^4+4x^2+\left(x^3+2x+\frac{10}{x}\right)\\&=x^4+4x^2\\&=(x^4+2x^2)+2x^2\\&=2x^2-10\\&=2(-1+3i)-10\\&=-12+6i\end{aligned}$$

답 ②

유형 04 켤레복소수가 주어질 때의 식의 값 구하기 본책 51쪽

켤레복소수인 두 복소수 x, y에 대한 식의 값

➡ 주어진 식을 $x+y$, xy를 포함한 식으로 변형한 후 $x+y$, xy의 값을 구하여 대입한다.

0344 $\frac{y}{x}+\frac{x}{y}=\frac{x^2+y^2}{xy}=\frac{(x+y)^2-2xy}{xy}$ …… ㉠

$x+y=(2+i)+(2-i)=4$, $xy=(2+i)(2-i)=5$이므로 ㉠에서

$\frac{y}{x}+\frac{x}{y}=\frac{4^2-2\cdot5}{5}=\frac{6}{5}$

답 ⑤

다른 풀이 $$\begin{aligned}\frac{y}{x}+\frac{x}{y}&=\frac{2-i}{2+i}+\frac{2+i}{2-i}\\&=\frac{(2-i)^2+(2+i)^2}{(2+i)(2-i)}\\&=\frac{3-4i+3+4i}{5}\\&=\frac{6}{5}\end{aligned}$$

0345 $x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$ …… ㉠

$x+y=\frac{3-i}{2}+\frac{3+i}{2}=3$, $xy=\frac{3-i}{2}\cdot\frac{3+i}{2}=\frac{5}{2}$이므로 ㉠에서

$x^3+y^3=3^3-3\cdot\frac{5}{2}\cdot3=\frac{9}{2}$

답 $\frac{9}{2}$

0346 $$\begin{aligned}x^3-x^2y-xy^2+y^3&=x^2(x-y)-y^2(x-y)\\&=(x^2-y^2)(x-y)\\&=(x+y)(x-y)^2 \quad \cdots\cdots ㉠\end{aligned}$$ ··· ❶

이때

$x=\frac{10}{1+3i}=\frac{10(1-3i)}{(1+3i)(1-3i)}=1-3i$,

$y=\frac{10}{1-3i}=\frac{10(1+3i)}{(1-3i)(1+3i)}=1+3i$

이므로

$x+y=(1-3i)+(1+3i)=2$,

$x-y=(1-3i)-(1+3i)=-6i$ ··· ❷

따라서 ㉠에서

$x^3-x^2y-xy^2+y^3=2\cdot(-6i)^2=-72$ ··· ❸

답 -72

채점 기준	비율
❶ 주어진 식을 인수분해할 수 있다.	40 %
❷ $x+y$, $x-y$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ 식의 값을 구할 수 있다.	20 %

유형 05 복소수 z 또는 z^2이 실수가 되기 위한 조건 본책 51쪽

복소수 $z=a+bi$ (a, b는 실수)에 대하여

① z가 실수 ➡ $b=0$

② z^2이 실수 ➡ z가 실수 또는 순허수 ➡ $a=0$ 또는 $b=0$

③ z^2이 음의 실수 ➡ z가 순허수 ➡ $a=0$, $b\neq0$

④ z^2이 양의 실수 ➡ z가 0이 아닌 실수 ➡ $a\neq0$, $b=0$

0347 $z=x(1-i)+2(-2+i)=(x-4)+(-x+2)i$

z^2이 음의 실수가 되려면 z는 순허수이어야 하므로

$x-4=0$, $-x+2\neq0$

$\therefore x=4$

답 4

0348 $z=i(a+2i)^2=i(a^2+4ai-4)$

$=-4a+(a^2-4)i$ ⋯ ❶

이 복소수가 실수가 되려면

$a^2-4=0,\quad a^2=4\quad \therefore a=2\ (\because a>0)$

$\therefore \alpha=2$ ⋯ ❷

$a=2$를 $z=-4a+(a^2-4)i$에 대입하면

$z=-8\quad \therefore \beta=-8$ ⋯ ❸

$\therefore \alpha-\beta=10$ ⋯ ❹

답 10

채점 기준	비율
❶ z를 (실수부분)+(허수부분)i 꼴로 나타낼 수 있다.	30 %
❷ α의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ β의 값을 구할 수 있다.	30 %
❹ $\alpha-\beta$의 값을 구할 수 있다.	10 %

0349 z^2이 실수가 되려면 z는 실수 또는 순허수이어야 하므로

$a^2-6a+8=0$ 또는 $a-2=0$

$(a-2)(a-4)=0$ 또는 $a-2=0$

$\therefore a=2$ 또는 $a=4$

따라서 구하는 모든 a의 값의 합은

$2+4=6$

답 ③

다른 풀이 $z^2=(a^2-6a+8)^2+2(a^2-6a+8)(a-2)i-(a-2)^2$

z^2이 실수가 되려면

$2(a^2-6a+8)(a-2)=0,\quad (a-2)^2(a-4)=0$

$\therefore a=2$ 또는 $a=4$

0350 $z=(a+3i)(1+4i)+a(-5+ai)$

$=(-4a-12)+(a^2+4a+3)i$

z^2이 양의 실수가 되려면 z는 0이 아닌 실수이어야 하므로

$-4a-12\neq0,\ a^2+4a+3=0$

$-4a-12\neq0$에서 $\quad a\neq-3$ ⋯⋯ ㉠

$a^2+4a+3=0$에서 $\quad (a+1)(a+3)=0$

$\therefore a=-1$ 또는 $a=-3$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡에서 $\quad a=-1$

답 -1

0351 $z=a^2(1+i)+a(-3+2i)+(2-3i)$

$=(a^2-3a+2)+(a^2+2a-3)i$

(i) z^2이 실수가 되려면 z는 실수 또는 순허수이어야 하므로

$a^2-3a+2=0$ 또는 $a^2+2a-3=0$

$(a-1)(a-2)=0$ 또는 $(a+3)(a-1)=0$

$\therefore a=-3$ 또는 $a=1$ 또는 $a=2$

(ii) $z-5i=(a^2-3a+2)+(a^2+2a-3)i-5i$

$=(a^2-3a+2)+(a^2+2a-8)i$

이 복소수가 실수가 되려면

$a^2+2a-8=0,\quad (a+4)(a-2)=0$

$\therefore a=-4$ 또는 $a=2$

(i), (ii)에서 $\quad a=2$

답 ⑤

유형 06 복소수가 서로 같을 조건

본책 52쪽

복소수를 포함한 등식에서 실수인 미지수의 값을 구할 때에는 실수부분은 실수부분끼리, 허수부분은 허수부분끼리 정리하여 복소수가 서로 같을 조건을 이용한다.

① $a+bi=c+di$ (a, b, c, d는 실수) ➡ $a=c, b=d$

② $a+bi=0$ (a, b는 실수) ➡ $a=0, b=0$

0352 $2x(2-i)-y(1+3i)=\overline{7-7i}$에서

$4x-2xi-y-3yi=7+7i$

$(4x-y)+(-2x-3y)i=7+7i$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$4x-y=7,\ -2x-3y=7$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$x=1,\ y=-3$

$\therefore x+y=-2$

답 ①

0353 $\dfrac{x}{1+2i}+\dfrac{y}{1-2i}=\dfrac{3}{3-i}$에서

$\dfrac{x(1-2i)+y(1+2i)}{(1+2i)(1-2i)}=\dfrac{3(3+i)}{(3-i)(3+i)}$

$\dfrac{(x+y)-2(x-y)i}{5}=\dfrac{9+3i}{10}$

$(x+y)-2(x-y)i=\dfrac{9}{2}+\dfrac{3}{2}i$ ⋯ ❶

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$x+y=\dfrac{9}{2},\ x-y=-\dfrac{3}{4}$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$x=\dfrac{15}{8},\ y=\dfrac{21}{8}$ ⋯ ❷

$\therefore 2x-y=\dfrac{9}{8}$ ⋯ ❸

답 $\dfrac{9}{8}$

채점 기준	비율
❶ 주어진 등식의 양변을 각각 (실수부분)+(허수부분)i 꼴로 나타낼 수 있다.	40 %
❷ x, y의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $2x-y$의 값을 구할 수 있다.	20 %

0354 $x^2+y^2i-x+2yi-6-3i=0$에서

$(x^2-x-6)+(y^2+2y-3)i=0$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$x^2-x-6=0,\ y^2+2y-3=0$

$x^2-x-6=0$에서 $\quad (x+2)(x-3)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=3$

$y^2+2y-3=0$에서 $\quad (y+3)(y-1)=0$

$\therefore y=-3$ 또는 $y=1$

$\therefore xy=-9$ 또는 $xy=-2$ 또는 $xy=3$ 또는 $xy=6$

따라서 xy의 값이 될 수 없는 것은 ②이다.

답 ②

0355 $\frac{a}{1+ai}=\frac{a(1-ai)}{(1+ai)(1-ai)}=\frac{a-a^2i}{1+a^2}$

$=\frac{a}{1+a^2}-\frac{a^2}{1+a^2}i$

이므로 $x+yi=\frac{a}{1+a^2}-\frac{a^2}{1+a^2}i$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$x=\frac{a}{1+a^2},\ y=-\frac{a^2}{1+a^2}$

이때 $2x-y=1$이므로

$2\cdot\frac{a}{1+a^2}+\frac{a^2}{1+a^2}=1,\quad \frac{2a+a^2}{1+a^2}=1$

$2a+a^2=1+a^2,\quad 2a=1$

$\therefore a=\frac{1}{2}$

답 $\frac{1}{2}$

0356 $a(1+i)-b(1-i)=(a-b)+(a+b)i$

-1의 제곱근은 $\pm i$이므로

(i) $(a-b)+(a+b)i=i$일 때,

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$a-b=0,\ a+b=1$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=\frac{1}{2},\ b=\frac{1}{2}\quad \therefore a^2+b^2=\frac{1}{2}$

(ii) $(a-b)+(a+b)i=-i$일 때,

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$a-b=0,\ a+b=-1$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=-\frac{1}{2},\ b=-\frac{1}{2}\quad \therefore a^2+b^2=\frac{1}{2}$

(i), (ii)에서 $a^2+b^2=\frac{1}{2}$

답 $\frac{1}{2}$

다른 풀이 $\{a(1+i)-b(1-i)\}^2$

$=a^2(1+i)^2-2ab(1+i)(1-i)+b^2(1-i)^2$

$=2a^2i-4ab-2b^2i$

$=-4ab+2(a^2-b^2)i$

이므로 $-4ab+2(a^2-b^2)i=-1$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$-4ab=-1,\ 2(a^2-b^2)=0$

$\therefore ab=\frac{1}{4},\ a^2=b^2$

$ab>0$이므로 $a^2=b^2$에서 $a=b$

즉 $a^2=b^2=\frac{1}{4}$이므로 $a^2+b^2=\frac{1}{2}$

유형 07 켤레복소수의 성질

본책 53쪽

복소수 z의 켤레복소수를 $\bar{z}$라 할 때

① $z+\bar{z}=$(실수) ② $z\bar{z}=$(실수)

③ $z=\bar{z}$ ➡ z는 실수 ④ $z=-\bar{z}$ ➡ z는 0 또는 순허수

0357 $z=a+bi$ (a, b는 실수)라 하자.

① $z\bar{z}=(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2$이므로 실수이다.

② $\frac{1}{z}+\frac{1}{\bar{z}}=\frac{1}{a+bi}+\frac{1}{a-bi}$

$=\frac{a-bi+a+bi}{(a+bi)(a-bi)}=\frac{2a}{a^2+b^2}$

이므로 실수이다.

③ $a+bi=a-bi$에서 $2bi=0\quad \therefore b=0$

따라서 $z=a$이므로 z는 실수이다.

④ $z\bar{z}=(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2=0$에서

$a=0,\ b=0\quad \therefore z=0$

⑤ $\bar{z}=a-bi$가 순허수이면 $a=0,\ b\neq0$

따라서 $z=bi$이므로 z도 순허수이다.

답 ②

0358 $\bar{z}=-z$, 즉 $z+\bar{z}=0$이므로 z는 0 또는 순허수이다.
따라서 z가 될 수 있는 것은 $-2i$, $(1+\sqrt{3})i$, 0, i의 4개이다.

답 4

0359 $z=a+bi$ (a, b는 실수)라 하자.

ㄱ. $(z+2)(\bar{z}+2)=z\bar{z}+2(z+\bar{z})+4$

$=(a+bi)(a-bi)+2\{(a+bi)+(a-bi)\}+4$

$=a^2+b^2+4a+4$

이므로 항상 실수이다.

ㄴ. $(z+\bar{z})(z-\bar{z})=\{(a+bi)+(a-bi)\}\{(a+bi)-(a-bi)\}$

$=2a\cdot2bi=4abi$

이므로 0 또는 순허수이다.

ㄷ. $z^3+(\bar{z})^3=(z+\bar{z})^3-3z\bar{z}(z+\bar{z})$

$=\{(a+bi)+(a-bi)\}^3$

$-3(a+bi)(a-bi)\{(a+bi)+(a-bi)\}$

$=(2a)^3-3(a^2+b^2)\cdot2a$

$=8a^3-6a^3-6ab^2$

$=2a^3-6ab^2$

이므로 항상 실수이다.

ㄹ. $\frac{1}{z}-\frac{1}{\bar{z}}=\frac{1}{a+bi}-\frac{1}{a-bi}$

$=\frac{(a-bi)-(a+bi)}{(a+bi)(a-bi)}=-\frac{2bi}{a^2+b^2}$

이므로 0 또는 순허수이다.

이상에서 항상 실수인 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ②

0360 $z=\bar{z}$이고 $z\neq0$이므로 z는 0이 아닌 실수이다.

$z=(2x^2-5x-3)+(x^2-9)i$에서

$2x^2-5x-3\neq0,\ x^2-9=0$ ··· ❶

$2x^2-5x-3\neq0$에서 $(2x+1)(x-3)\neq0$

$\therefore x\neq-\frac{1}{2},\ x\neq3$ ······ ㉠ ··· ❷

$x^2-9=0$에서 $x^2=9$

$\therefore x=\pm3$ ······ ㉡ ··· ❸

㉠, ㉡에서 $x=-3$ ··· ❹

답 -3

채점 기준	비율
❶ z가 0이 아닌 실수인 조건을 구할 수 있다.	40 %
❷ $2x^2-5x-3\neq0$을 만족시키는 x의 조건을 구할 수 있다.	20 %
❸ $x^2-9=0$을 만족시키는 x의 값을 구할 수 있다.	20 %
❹ x의 값을 구할 수 있다.	20 %

0361 $\frac{1}{1+z^2}$이 실수이므로 $\frac{1}{1+z^2}=\overline{\left(\frac{1}{1+z^2}\right)}$

$\frac{1}{1+z^2}=\frac{1}{\overline{1+z^2}}$, $1+z^2=\overline{1+z^2}$

$1+z^2=1+\overline{z}^2$, $z^2-\overline{z}^2=0$

$(z+\overline{z})(z-\overline{z})=0$

이때 z는 허수이므로 $z\neq\overline{z}$

$\therefore z+\overline{z}=0$

답 ①

유형 08 켤레복소수의 성질을 이용하여 식의 값 구하기 본책 54쪽

두 복소수 z_1, z_2의 켤레복소수를 각각 $\overline{z_1}$, $\overline{z_2}$라 할 때

① $\overline{(\overline{z_1})}=z_1$

② $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$, $\overline{z_1-z_2}=\overline{z_1}-\overline{z_2}$

③ $\overline{z_1z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$, $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$ (단, $z_2\neq0$)

0362 $\alpha\overline{\alpha}+\overline{\alpha}\beta+\alpha\overline{\beta}+\beta\overline{\beta}=\overline{\alpha}(\alpha+\beta)+\overline{\beta}(\alpha+\beta)$

$=(\alpha+\beta)(\overline{\alpha}+\overline{\beta})$

$=(\alpha+\beta)(\overline{\alpha+\beta})$ …… ㉠

$\alpha+\beta=(3+2i)+(1-i)=4+i$, $\overline{\alpha+\beta}=4-i$이므로 ㉠에서

$\alpha\overline{\alpha}+\overline{\alpha}\beta+\alpha\overline{\beta}+\beta\overline{\beta}=(4+i)(4-i)=17$

답 ②

0363 $(z_1-3)(z_2+3)=z_1z_2+3(z_1-z_2)-9$ …… ㉠

$\overline{z_1}-\overline{z_2}=\overline{z_1-z_2}=3+2i$이므로

$z_1-z_2=3-2i$

$\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}=\overline{z_1z_2}=5+5i$이므로

$z_1z_2=5-5i$

따라서 ㉠에서

$(z_1-3)(z_2+3)=5-5i+3(3-2i)-9$

$=5-11i$

답 $5-11i$

0364 $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}$ …… ㉠

$\overline{\alpha}+\overline{\beta}=-i$이므로 $\alpha+\beta=\overline{(\overline{\alpha}+\overline{\beta})}=\overline{-i}=i$

$\overline{\alpha}\overline{\beta}=1$이므로 $\alpha\beta=\overline{(\overline{\alpha}\overline{\beta})}=\overline{1}=1$

따라서 ㉠에서

$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{i}{1}=i$

답 ④

0365 $z=\frac{w+2}{2w-1}=\frac{2-i+2}{2(2-i)-1}=\frac{4-i}{3-2i}$ ⋯ ❶

$\therefore z\overline{z}=\frac{4-i}{3-2i}\cdot\overline{\left(\frac{4-i}{3-2i}\right)}=\frac{4-i}{3-2i}\cdot\frac{\overline{4-i}}{\overline{3-2i}}$

$=\frac{4-i}{3-2i}\cdot\frac{4+i}{3+2i}=\frac{16+1}{9+4}$

$=\frac{17}{13}$ ⋯ ❷

답 $\frac{17}{13}$

채점 기준	비율
❶ z를 구할 수 있다.	30 %
❷ $z\overline{z}$의 값을 구할 수 있다.	70 %

0366 $\alpha\overline{\alpha}=\beta\overline{\beta}=3$에서 $\overline{\alpha}=\frac{3}{\alpha}$, $\overline{\beta}=\frac{3}{\beta}$

$\alpha+\beta=i$에서 $\frac{3}{\overline{\alpha}}+\frac{3}{\overline{\beta}}=i$

$\frac{3(\overline{\alpha}+\overline{\beta})}{\overline{\alpha}\cdot\overline{\beta}}=i$, $3(\overline{\alpha+\beta})=i\overline{\alpha\beta}$

$3\overline{i}=i\overline{\alpha\beta}$, $-3i=i\overline{\alpha\beta}$

$\overline{\alpha\beta}=-3$ $\therefore \alpha\beta=-3$

답 ①

유형 09 조건을 만족시키는 복소수 구하기 본책 54쪽

복소수 z를 포함한 등식이 주어질 때, z는 다음과 같은 순서로 구한다.

(i) $z=a+bi$ (a, b는 실수)라 하고 등식에 대입한다.

(ii) 복소수가 서로 같을 조건을 이용하여 a, b의 값을 구한다.

0367 $z=a+bi$ (a, b는 실수)라 하면 $\overline{z}=a-bi$이므로

$(2-i)z+4i\overline{z}=1-4i$에서

$(2-i)(a+bi)+4i(a-bi)=1-4i$

$2a+2bi-ai+b+4ai+4b=1-4i$

$(2a+5b)+(3a+2b)i=1-4i$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$2a+5b=1$, $3a+2b=-4$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=-2$, $b=1$

$\therefore z=-2+i$

답 ②

0368 $z=a+bi$ (a, b는 실수)라 하면 $\overline{z}=a-bi$이므로

$z+\overline{z}=4$, $z\overline{z}=20$에서

$(a+bi)+(a-bi)=4$, $(a+bi)(a-bi)=20$

$2a=4$, $a^2+b^2=20$

$\therefore a=2$, $b=\pm4$

$\therefore z=2\pm4i$

답 $2\pm4i$

0369 $z=a+bi$ (a, b는 실수)라 하면 $\overline{z}=a-bi$이므로

$(1+i)z+(1-i)\overline{z}=2$에서

$(1+i)(a+bi)+(1-i)(a-bi)=2$

$a+bi+ai-b+a-bi-ai-b=2$

$2(a-b)=2$ $\therefore a-b=1$

따라서 $a-b=1$을 만족시키는 복소수는 ㄴ뿐이다.

답 ②

0370 $z=a+bi$ (a, b는 실수)라 하면 $\bar{z}=a-bi$이므로
$(1-2i)z+(2+3i)\bar{z}=-2+2i$에서

$(1-2i)(a+bi)+(2+3i)(a-bi)=-2+2i$

$a+bi-2ai+2b+2a-2bi+3ai+3b=-2+2i$

$(3a+5b)+(a-b)i=-2+2i$ ⋯ ❶

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$3a+5b=-2,\ a-b=2$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=1,\ b=-1$ ⋯ ❷

따라서 $z=1-i$이므로

$z\bar{z}=(1-i)(1+i)=2$ ⋯ ❸

답 2

채점 기준	비율
❶ $z=a+bi$라 하고 주어진 등식에 대입하여 식을 정리할 수 있다.	50 %
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ $z\bar{z}$의 값을 구할 수 있다.	20 %

0371 $z=a+bi$ (a, b는 실수, $b\neq0$)라 하면 $z\bar{z}+\dfrac{\bar{z}}{z}=3$에서

$$(a+bi)(a-bi)+\frac{a-bi}{a+bi}=3$$

$$a^2+b^2+\frac{(a-bi)^2}{(a+bi)(a-bi)}=3$$

$$a^2+b^2+\frac{a^2-b^2-2abi}{a^2+b^2}=3$$

$$a^2+b^2+\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}-\frac{2ab}{a^2+b^2}i=3$$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$$a^2+b^2+\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}=3,\ -\frac{2ab}{a^2+b^2}=0$$

이때 $b\neq0$이고 $-\dfrac{2ab}{a^2+b^2}=0$이므로

$a=0$

$a=0$을 $a^2+b^2+\dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}=3$에 대입하면

$b^2-1=3\qquad \therefore b^2=4$

$\therefore (z-\bar{z})^2=(2bi)^2=-4b^2=-16$

답 -16

유형 10 허수단위 i의 거듭제곱 본책 55쪽

i^n (n은 자연수)의 값은 4개의 값 i, -1, $-i$, 1이 반복되어 나타나므로 n을 4로 나누었을 때의 나머지가 같으면 그 값이 서로 같다.

➡ $i^{4k}=1,\quad i^{4k+1}=i,\quad i^{4k+2}=i^2=-1,\quad i^{4k+3}=i^3=-i$
(단, k는 자연수)

0372 $i=i^5=i^9=\cdots=i^{2017}$, $i^2=i^6=i^{10}=\cdots=i^{2018}=-1$,
$i^3=i^7=i^{11}=\cdots=i^{2019}=-i$, $i^4=i^8=i^{12}=\cdots=i^{2020}=1$이므로

$i+i^2+i^3+\cdots+i^{2020}$

$=(i-1-i+1)+(i-1-i+1)+\cdots+(i-1-i+1)$

$=0$

답 ③

0373 $i=i^5=i^9=\cdots=i^{49}$, $i^2=i^6=i^{10}=\cdots=i^{50}=-1$,
$i^3=i^7=i^{11}=\cdots=i^{47}=-i$, $i^4=i^8=i^{12}=\cdots=i^{48}=1$이므로

$i+2i^2+3i^3+\cdots+49i^{49}+50i^{50}$

$=(i-2-3i+4)+(5i-6-7i+8)+\cdots+(49i-50)$

$=(2-2i)+(2-2i)+\cdots+(2-2i)+(49i-50)$

$=12(2-2i)+(49i-50)$

$=-26+25i$ ⋯ ❶

따라서 $-26+25i=a+bi$이므로 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$a=-26,\ b=25$ ⋯ ❷

$\therefore a+b=-1$ ⋯ ❸

답 -1

채점 기준	비율
❶ 주어진 등식의 좌변을 간단히 할 수 있다.	60 %
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	10 %

0374 $i=i^5=i^9=\cdots$, $i^2=i^6=i^{10}=\cdots=-1$,
$i^3=i^7=i^{11}=\cdots=-i$, $i^4=i^8=i^{12}=\cdots=1$이므로

$i-2i^2+3i^3-4i^4+5i^5-6i^6+7i^7-8i^8+\cdots$

$=i+2-3i-4+5i+6-7i-8+\cdots$

$=(2-4+6-8+\cdots)+(1-3+5-7+\cdots)i$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여 실수부분이 8, 허수부분이 7이어야 한다.

이때

$(2-4)+(6-8)+(10-12)+14=8$,

$(1-3)+(5-7)+(9-11)+13=7$

이므로 $\quad n=14$

답 ③

0375 $(3+2i)i^{30}=(3+2i)\cdot(i^4)^7\cdot i^2=-3-2i$

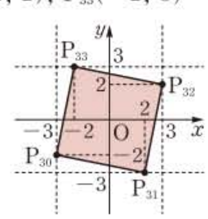
$(3+2i)i^{31}=(3+2i)\cdot(i^4)^7\cdot i^3=2-3i$

$(3+2i)i^{32}=(3+2i)\cdot(i^4)^8=3+2i$

$(3+2i)i^{33}=(3+2i)\cdot(i^4)^8\cdot i=-2+3i$

$\therefore \mathrm{P}_{30}(-3,\ -2)$, $\mathrm{P}_{31}(2,\ -3)$, $\mathrm{P}_{32}(3,\ 2)$, $\mathrm{P}_{33}(-2,\ 3)$

네 점 P_{30}, P_{31}, P_{32}, P_{33}을 좌표평면 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 구하는 넓이는



$$6^2-4\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot1\cdot5\right)=26$$

답 26

0376 자연수 k에 대하여

(i) $m=4k-3$일 때,

$i^{4k-3}=i$, $(-i)^{4k-3}=-i$이므로

$(-i)^{4k-3}=-i^{4k-3}=-i$

$$z_m=\frac{i}{2}+\frac{-i}{2}=0$$

(ii) $m=4k-2$일 때,

$i^{4k-2}=-1$, $(-i)^{4k-2}=-1$이므로

$$z_m=\frac{-1}{2}+\frac{-1}{2}=-1$$

(iii) $m=4k-1$일 때,

$i^{4k-1}=-i$, $(-i)^{4k-1}=i$이므로

$$z_m=\frac{-i}{2}+\frac{i}{2}=0$$

(iv) $m=4k$일 때,

$i^{4k}=1$, $(-i)^{4k}=1$이므로

$$z_m=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$$

ㄱ. $m=4k$ (k는 자연수)이면 $z_m=1$이다.

ㄴ. $100=4\cdot25$, $102=4\cdot26-2$이므로

$z_{100}=1$, $z_{102}=-1$

$\therefore z_{100}\neq z_{102}$

ㄷ. 임의의 자연수 m에 대하여 z_m은 실수이므로 $z_m=\overline{z_m}$이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ③

유형 11 복소수의 거듭제곱 본책 56쪽

복소수 z에 대하여 z^n (n은 자연수)의 값을 구할 때에는 다음을 이용한다.

① $(1\pm i)^n$ 꼴 ➡ $(1\pm i)^2=\pm2i$ (복호동순)

② $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^n$, $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^n$ 꼴 ➡ $\frac{1+i}{1-i}=i$, $\frac{1-i}{1+i}=-i$

0377 $(1+i)^{100}=\{(1+i)^2\}^{50}=(2i)^{50}$

$=2^{50}\cdot(i^4)^{12}\cdot i^2=-2^{50}$

$(1-i)^{100}=\{(1-i)^2\}^{50}=(-2i)^{50}=(2i)^{50}$

$=2^{50}\cdot(i^4)^{12}\cdot i^2=-2^{50}$

$\therefore (1+i)^{100}-(1-i)^{100}=-2^{50}-(-2^{50})=0$ 답 ③

0378 $\frac{1-i}{1+i}=\frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}=\frac{-2i}{2}=-i$

$\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}=\frac{2i}{2}=i$

$\therefore \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{30}+\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{30}=(-i)^{30}+i^{30}=i^{30}+i^{30}$

$=2i^{30}=2\cdot(i^4)^7\cdot i^2$

$=-2$ 답 ①

0379 $z^2=\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2=\frac{2i}{2}=i$이므로

$z^4=(z^2)^2=i^2=-1$

$\therefore z^2-z^3+z^4-\cdots+z^{10}$

$=(z^2-z^3+z^4-z^5)+z^4(z^2-z^3+z^4-z^5)+z^{10}$

$=(z^2-z^3+z^4-z^5)-(z^2-z^3+z^4-z^5)+z^{10}$

$=z^{10}=(z^2)^5=i^5=i$ 답 i

다른 풀이 $z^2=i$이므로

$z^2+z^4+z^6+z^8=i-1-i+1=0$

$\therefore z^2-z^3+z^4-\cdots+z^{10}$

$=(z^2+z^4+z^6+z^8)-z(z^2+z^4+z^6+z^8)+z^{10}$

$=z^{10}=i$

0380 $\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}=\frac{2i}{2}=i$

$\frac{1-i}{1+i}=\frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}=\frac{-2i}{2}=-i$

$\therefore f(n)=\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{2n}-\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{4n}$

$=i^{2n}-(-i)^{4n}$

$=(-1)^n-1$ ··· ❶

즉 n이 짝수일 때 $f(n)=0$이고, n이 홀수일 때 $f(n)=-2$이므로

$f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(100)$

$=-2+0-2+\cdots+0$

$=-2\cdot50$

$=-100$ ··· ❷

답 -100

채점 기준	비율
❶ $f(n)$을 간단히 할 수 있다.	50 %
❷ $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(100)$의 값을 구할 수 있다.	50 %

0381 $z=\frac{1-i}{\sqrt{2}i}$에서

$z^2=\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}i}\right)^2=\frac{-2i}{-2}=i$

$z^3=z^2\cdot z=i\cdot\frac{1-i}{\sqrt{2}i}=\frac{1-i}{\sqrt{2}}$

$z^4=(z^2)^2=i^2=-1$

$z^5=z^4\cdot z=-z=\frac{-1+i}{\sqrt{2}i}$

$z^6=z^4\cdot z^2=-i$

$z^7=z^6\cdot z=(-i)\cdot\frac{1-i}{\sqrt{2}i}=\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$

$z^8=(z^4)^2=(-1)^2=1$

⋮

$w=\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$에서

$w^2=\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)^2=\frac{-2+2\sqrt{3}i}{4}=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$

$w^3=w^2\cdot w=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\cdot\frac{1+\sqrt{3}i}{2}=-1$

$w^4=w^3\cdot w=-w=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$

$w^5=w^3\cdot w^2=-w^2=\frac{1-\sqrt{3}i}{2}$

$w^6=(w^3)^2=(-1)^2=1$

⋮

n이 8의 배수일 때 $z^n=1$이고, n이 6의 배수일 때 $w^n=1$이므로 $z^n=w^n$을 만족시키는 가장 작은 자연수 n은 8과 6의 최소공배수인 24이다.

답 ⑤

참고 $n=8k-4$ (k는 자연수)일 때 $z^n=-1$이고 $n=6l-3$ (l은 자연수)일 때 $w^n=-1$이므로 $z^n=w^n=-1$을 만족시키는 자연수 n은 존재하지 않는다.

유형 12 음수의 제곱근의 계산

본책 56쪽

(1) $\sqrt{-a}=\sqrt{a}\,i$ $(a>0)$임을 이용하여 음수의 제곱근을 허수단위 i를 사용하여 나타낸다.
(2) 음수의 제곱근의 성질을 이용하여 계산한다.
① $a<0,\ b<0 \Rightarrow \sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$
② $a>0,\ b<0 \Rightarrow \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=-\sqrt{\dfrac{a}{b}}$

0382 ① $\sqrt{-3}\sqrt{7}=\sqrt{-21}$

③ $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{-7}}=-\sqrt{-\dfrac{3}{7}}$

④ $\dfrac{\sqrt{-3}}{\sqrt{-7}}=\sqrt{\dfrac{3}{7}}$

⑤ $\dfrac{\sqrt{-3}}{\sqrt{7}}=\sqrt{-\dfrac{3}{7}}$ 　답 ②

참고 $a<0,\ b<0$ 이외의 경우에는 $\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$
$a>0,\ b<0$ 이외의 경우에는 $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{a}{b}}$ (단, $b\neq0$)

0383 $\sqrt{-3}\sqrt{-12}+\sqrt{-4}\sqrt{9}+\dfrac{\sqrt{-8}}{\sqrt{-2}}+\dfrac{\sqrt{64}}{\sqrt{-4}}$
$=-\sqrt{36}+\sqrt{-36}+\sqrt{4}-\sqrt{-16}$
$=-6+6i+2-4i$
$=-4+2i$ 　…… ❶
따라서 $-4+2i=a+bi$이므로 복소수가 서로 같을 조건에 의하여
$a=-4,\ b=2$ 　…… ❷
$\therefore a+b=-2$ 　…… ❸
답 -2

채점 기준	비율
❶ 주어진 등식의 좌변을 간단히 할 수 있다.	60 %
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	10 %

0384 $0<a<1$이므로 　$a-1<0,\ 1-a>0$
$\therefore \sqrt{a-1}\sqrt{1-a}-\dfrac{\sqrt{1-a}}{\sqrt{a-1}}\sqrt{\dfrac{a-1}{1-a}}+\sqrt{a}\sqrt{-a}$
$=\sqrt{1-a}\,i\cdot\sqrt{1-a}-\dfrac{\sqrt{1-a}}{\sqrt{1-a}\,i}\cdot\sqrt{-1}+\sqrt{a}\cdot\sqrt{a}\,i$
$=(1-a)i-\dfrac{1}{i}\cdot i+ai$
$=i-1$ 　답 $i-1$

유형 13 음수의 제곱근의 성질

본책 57쪽

두 실수 a, b에 대하여
① $\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab} \Rightarrow a<0,\ b<0$ 또는 $a=0$ 또는 $b=0$
② $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=-\sqrt{\dfrac{a}{b}} \Rightarrow a>0,\ b<0$ 또는 $a=0,\ b\neq0$

0385 $\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$이므로 　$a<0,\ b<0$
즉 $-a>0$이므로 　$\dfrac{\sqrt{-a}}{\sqrt{b}}=-\sqrt{-\dfrac{a}{b}}$ 　답 ④

0386 $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=-\sqrt{\dfrac{a}{b}}$이므로 　$a>0,\ b<0$
① $\sqrt{a^2b}=\sqrt{a^2}\cdot\sqrt{b}=a\sqrt{b}$
② $\sqrt{ab^2}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b^2}=-b\sqrt{a}$
$\sqrt{b^2}=|b|=-b$
③ $\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}=\sqrt{\dfrac{b}{a}}$
④ $\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$
⑤ $\sqrt{-a}\sqrt{b}=-\sqrt{-ab}$ 　답 ②

0387 $\sqrt{b-a}\sqrt{c-b}=-\sqrt{(b-a)(c-b)}$이므로
$b-a<0,\ c-b<0$
$\therefore c<b<a$ 　…… ❶
$a-b>0,\ b-c>0,\ c-a<0$이므로
$|a-b|+|b-c|+|c-a|=a-b+b-c-(c-a)$
$=2a-2c$ 　…… ❷
답 $2a-2c$

채점 기준	비율
❶ a, b, c의 대소를 비교할 수 있다.	50 %
❷ 주어진 식을 간단히 할 수 있다.	50 %

0388 $\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$에서 　$a<0,\ b<0$
$\dfrac{\sqrt{c}}{\sqrt{b}}=-\sqrt{\dfrac{c}{b}}$에서 　$b<0,\ c>0$
$b<0,\ c>0$이므로 　$b-c<0$
$\therefore \sqrt{a^2}+\sqrt{c^2}-|b-c|=-a+c+(b-c)$
$=-a+b$ 　답 ①

0389 전략 연산을 시행한 결과를 이용하여 방정식을 세운다.
풀이 어떤 수 x를 연산 장치 A에 두 번 넣은 후 출력된 값은
$\left(\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)^2x=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}x$ 　…… ❶
연산 장치 B에 넣은 후 출력된 값은
$\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}x\cdot\dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}x$ 　…… ❷
따라서 연산 장치 C에 넣었을 때 출력된 값이 1이 되려면
$\dfrac{2}{(1+\sqrt{3}i)x}=1,\quad (1+\sqrt{3}i)x=2$
$\therefore x=\dfrac{2}{1+\sqrt{3}i}=\dfrac{2(1-\sqrt{3}i)}{(1+\sqrt{3}i)(1-\sqrt{3}i)}=\dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}$ 　…… ❸
답 $\dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}$

채점 기준	비율
❶ x를 연산 장치 A에 두 번 넣은 후 출력된 값을 간단히 할 수 있다.	30 %
❷ 연산 장치 B에 넣은 후 출력된 값을 간단히 할 수 있다.	30 %
❸ x의 값을 구할 수 있다.	40 %

0390 전략 먼저 $f(a, b)$를 (실수부분)+(허수부분)i 꼴로 정리한다.

풀이 $f(a, b)=\dfrac{a+bi}{a-bi}=\dfrac{(a+bi)^2}{(a-bi)(a+bi)}$

$=\dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}+\dfrac{2ab}{a^2+b^2}i$ ⋯ ❶

이때 $a=2b$이면

$$f(2b, b)=\frac{(2b)^2-b^2}{(2b)^2+b^2}+\frac{4b^2}{(2b)^2+b^2}i$$

$$=\frac{3}{5}+\frac{4}{5}i$$

이므로

$f(2, 1)=f(4, 2)=\cdots=f(40, 20)=\dfrac{3}{5}+\dfrac{4}{5}i$ ⋯ ❷

$\therefore f(2, 1)+f(4, 2)+\cdots+f(40, 20)$

$=\left(\dfrac{3}{5}+\dfrac{4}{5}i\right)\cdot 20=12+16i$ ⋯ ❸

답 $12+16i$

채점 기준	비율
❶ $f(a, b)$를 (실수부분)+(허수부분)i 꼴로 나타낼 수 있다.	30 %
❷ $f(2, 1)$, $f(4, 2)$, ⋯, $f(40, 20)$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ 주어진 식의 값을 구할 수 있다.	30 %

0391 전략 a_1, a_2, a_3, ⋯, a_{20} 중에서 -1, i, $1-i$의 개수를 각각 x, y, z라 하고 식을 세운다.

풀이 a_1, a_2, a_3, ⋯, a_{20} 중에서 -1, i, $1-i$의 개수를 각각 x, y, z라 하면

$x+y+z=20$ ⋯⋯ ㉠

$(-1)^2=1$, $i^2=-1$, $(1-i)^2=-2i$이므로

$a_1{}^2+a_2{}^2+a_3{}^2+\cdots+a_{20}{}^2=1\cdot x+(-1)\cdot y+(-2i)\cdot z$

$=x-y-2zi$

$x-y-2zi=8-12i$이므로 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$x-y=8$ ⋯⋯ ㉡

$-2z=-12$

즉 $z=6$이므로 이것을 ㉠에 대입하여 정리하면

$x+y=14$ ⋯⋯ ㉢

㉡, ㉢을 연립하여 풀면

$x=11$, $y=3$

$\therefore a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{20}=(-1)\cdot 11+i\cdot 3+(1-i)\cdot 6$

$=-5-3i$

따라서 구하는 합은 $-5-3=-8$

답 ①

0392 전략 주어진 교류 전기회로를 직렬연결, 병렬연결했을 때의 전체 임피던스를 각각 구한 후 그 크기를 구한다.

풀이 직렬연결했을 때의 전체 임피던스를 $z=R_1+X_1i$, 병렬연결했을 때의 전체 임피던스를 $z'=R_2+X_2i$라 하자.

$z=(1+i)+(1-i)=2$이므로 $R_1+X_1i=2$

즉 $R_1=2$, $X_1=0$이므로

$a=|z|=\sqrt{2^2+0^2}=2$

$\dfrac{1}{z'}=\dfrac{1}{1+i}+\dfrac{1}{1-i}=\dfrac{1-i+1+i}{(1+i)(1-i)}=1$에서 $z'=1$이므로

$R_2+X_2i=1$

즉 $R_2=1$, $X_2=0$이므로

$b=|z'|=\sqrt{1^2+0^2}=1$

$\therefore ab=2$

답 2

0393 전략 복소수가 실수이면 그 켤레복소수도 실수임을 이용한다.

풀이 ㄱ. z^2-z가 실수이므로 $\overline{z^2-z}$도 실수이다.

ㄴ. $z^2-z=(a+bi)^2-(a+bi)$

$=a^2+2abi-b^2-a-bi$

$=(a^2-a-b^2)+(2a-1)bi$

이때 z^2-z가 실수이고 $b\neq 0$이므로

$2a-1=0$ $\quad\therefore a=\dfrac{1}{2}$

$\therefore z+\overline{z}=2a=1$

ㄷ. $z\overline{z}=\left(\dfrac{1}{2}+bi\right)\left(\dfrac{1}{2}-bi\right)=\dfrac{1}{4}+b^2$

이때 b는 0이 아닌 실수이므로

$\dfrac{1}{4}+b^2>\dfrac{1}{4}$ $\quad\therefore z\overline{z}>\dfrac{1}{4}$

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

답 ⑤

0394 전략 $z_1=a+bi$, $z_2=c+di$ (a, b, c, d는 실수)라 하고, A, B를 a, b, c, d에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 $z_1=a+bi$, $z_2=c+di$ (a, b, c, d는 실수)라 하자.

ㄱ. $A=z_1\overline{z_1}+z_2\overline{z_2}=(a+bi)(a-bi)+(c+di)(c-di)$

$=a^2+b^2+c^2+d^2\geq 0$

ㄴ. $B=z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2$

$=(a+bi)(c-di)+(a-bi)(c+di)$

$=ac-adi+bci+bd+ac+adi-bci+bd$

$=2(ac+bd)$

따라서 B의 부호는 알 수 없다.

ㄷ. ㄱ, ㄴ에 의하여

$A-B=a^2+b^2+c^2+d^2-2(ac+bd)$

$=(a^2-2ac+c^2)+(b^2-2bd+d^2)$

$=(a-c)^2+(b-d)^2\geq 0$

$\therefore A\geq B$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ④

다른 풀이 ㄷ. $A-B=z_1\overline{z_1}+z_2\overline{z_2}-(z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2)$

$=z_1(\overline{z_1}-\overline{z_2})-z_2(\overline{z_1}-\overline{z_2})$

$=(z_1-z_2)(\overline{z_1}-\overline{z_2})=(z_1-z_2)(\overline{z_1-z_2})$

$=\{(a-c)+(b-d)i\}\{(a-c)-(b-d)i\}$

$=(a-c)^2+(b-d)^2\geq 0$

$\therefore A\geq B$

0395 전략 $z=a+bi$ (a, b는 실수)라 하고 주어진 식에 대입하여 a, b의 값을 구한다.

풀이 $z=a+bi$ (a, b는 실수)라 하면 $\overline{z}=a-bi$이므로

$\dfrac{2z-\overline{z}}{z\overline{z}}=1-i$에서

$\dfrac{2(a+bi)-(a-bi)}{(a+bi)(a-bi)}=1-i$

$\dfrac{a}{a^2+b^2}+\dfrac{3b}{a^2+b^2}i=1-i$ ⋯ ❶

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$$\frac{a}{a^2+b^2}=1,\ \frac{3b}{a^2+b^2}=-1$$

$$a^2+b^2=a,\ a^2+b^2=-3b$$

즉 $a=-3b$이므로 $\underbrace{10b^2}_{a^2+b^2=(-3b)^2+b^2=10b^2}=-3b$

$$b(10b+3)=0 \qquad \therefore b=0 \text{ 또는 } b=-\frac{3}{10}$$

그런데 $b=0$이면 $a=0$이고 $z=0$이므로 $\quad b=-\frac{3}{10}$

$$\therefore a=-3b=\frac{9}{10}$$ ⋯ ❷

$$\therefore z=\frac{9}{10}-\frac{3}{10}i$$ ⋯ ❸

답 $\frac{9}{10}-\frac{3}{10}i$

채점 기준	비율
❶ $z=a+bi$라 하고 주어진 등식에 대입하여 식을 정리할 수 있다.	50 %
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ z를 구할 수 있다.	10 %

0396 전략 조건 (나)에서 $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$임을 이용한다.

풀이 조건 (나)에서 $\quad z^3-(-\bar{z})^3=0$

$$z^3+(\bar{z})^3=0, \qquad (z+\bar{z})\{z^2-z\bar{z}+(\bar{z})^2\}=0$$

$$(z+\bar{z})\{(z+\bar{z})^2-3z\bar{z}\}=0$$

이때 조건 (가)에 의하여

$$z+\bar{z}=\{\sqrt{3}x+(x-2)i\}+\{\sqrt{3}x-(x-2)i\}=2\sqrt{3}x,$$

$$z\bar{z}=\{\sqrt{3}x+(x-2)i\}\{\sqrt{3}x-(x-2)i\}$$

$$=3x^2+(x-2)^2=4x^2-4x+4$$

이므로

$$2\sqrt{3}x\{(2\sqrt{3}x)^2-3(4x^2-4x+4)\}=0$$

$$x(12x-12)=0, \qquad x(x-1)=0$$

$$\therefore x=0 \text{ 또는 } x=1$$

따라서 모든 실수 x의 값의 합은 1이다. 답 ④

0397 전략 $z=a+bi$ (a, b는 실수)에 대하여 $\bar{z}=a-bi$임을 이용하여 z_3, z_4, z_5, ⋯를 z_1 또는 z_2로 나타낸다.

풀이 $z_2=\overline{z_1}(1+i)=(1-2i)(1+i)=3-i$

$z_3=\overline{z_2}(1+i)=(3+i)(1+i)=2+4i=2z_1$

$z_4=\overline{2z_1}(1+i)=2\overline{z_1}(1+i)=2z_2$

$z_5=\overline{2z_2}(1+i)=2\overline{z_2}(1+i)=2z_3=2^2z_1$

$z_6=\overline{2^2z_1}(1+i)=2^2\overline{z_1}(1+i)=2^2z_2$

$z_7=\overline{2^2z_2}(1+i)=2^2\overline{z_2}(1+i)=2^2z_3=2^3z_1$

⋮

$$\therefore z_{2k+1}=2^kz_1,\ z_{2k+2}=2^kz_2 \ (k\text{는 자연수})$$

따라서 $\underbrace{z_{100}}_{100=2\cdot49+2}=2^{49}z_2=2^{49}(3-i)$이므로 z_{100}의 실수부분은 $3\cdot2^{49}$이다. 답 ③

0398 전략 i^n (n은 자연수)은 i, -1, $-i$, 1이 반복되어 나타남을 이용한다.

풀이 $i=i^5=i^9=\cdots$, $i^2=i^6=i^{10}=\cdots=-1$,

$i^3=i^7=i^{11}=\cdots=-i$, $i^4=i^8=i^{12}=\cdots=1$이므로

$$\frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}+\cdots+\frac{1}{i^n}$$

$$=\frac{1}{i}-1-\frac{1}{i}+1+\cdots+\frac{1}{i^n}$$

$$=-i-1+i+1-\cdots+\frac{1}{i^n}$$

$$=\begin{cases} -i & (n=4m-3) \\ -1-i & (n=4m-2) \\ -1 & (n=4m-1) \\ 0 & (n=4m) \end{cases} \ (m\text{은 자연수})$$

즉 $n=4m-1$ (m은 자연수)일 때 주어진 등식이 성립한다.

이때 $n\le50$이므로

$$4m-1\le50, \qquad 4m\le51 \qquad \therefore m\le\frac{51}{4}$$

따라서 자연수 m은 1, 2, ⋯, 12의 12개이므로 구하는 n의 개수도 12이다. 답 ③

0399 전략 $\frac{z}{\bar{z}}$의 허수부분이 0임을 이용하여 z를 구한다.

풀이 $\bar{z}=a+i$이므로

$$\frac{z}{\bar{z}}=\frac{a-i}{a+i}=\frac{(a-i)^2}{(a+i)(a-i)}$$

$$=\frac{a^2-1-2ai}{a^2+1}=\frac{a^2-1}{a^2+1}-\frac{2a}{a^2+1}i$$

이때 $\frac{z}{\bar{z}}$가 실수이므로 $\quad a=0$

따라서 $z=-i$이므로

$$z^2=(-i)^2=i^2=-1,$$

$$z^3=(-1)\cdot(-i)=i,$$

$$z^4=(z^2)^2=(-1)^2=1,$$

$$z^5=z=-i,$$

⋮

$$\therefore 1+z+z^2+z^3+\cdots+z^{100}$$

$$=1+(-i-1+i+1)+(-i-1+i+1)$$

$$+\cdots+(-i-1+i+1)$$

$$=1$$

답 1

0400 전략 i^n (n은 자연수)은 i, -1, $-i$, 1이 반복되어 나타남을 이용한다.

풀이 $i=i^5=i^9=i^{13}=i^{17}$, $i^2=i^6=i^{10}=i^{14}=i^{18}=-1$,

$i^3=i^7=i^{11}=i^{15}=i^{19}=-i$, $i^4=i^8=i^{12}=i^{16}=1$이므로

$$(i+i^2)+(i^2+i^3)+(i^3+i^4)+\cdots+(i^{18}+i^{19})$$

$$=(i+i^2+i^3+\cdots+i^{18})+(i^2+i^3+i^4+\cdots+i^{19})$$

$$=\{(i-1-i+1)+(i-1-i+1)+\cdots+i-1\}$$

$$+\{(-1-i+1+i)+(-1-i+1+i)+\cdots-1-i\}$$

$$=(i-1)+(-1-i)$$

$$=-2$$

따라서 $-2=a+bi$이므로 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$$a=-2,\ b=0$$

$$\therefore 4(a+b)^2=16$$

답 16

다른 풀이 $i+i^{19}=i+(-i)=0$이므로

$$(i+i^2)+(i^2+i^3)+(i^3+i^4)+\cdots+(i^{18}+i^{19})$$
$$=i+\{(i^2+i^2)+(i^3+i^3)+(i^4+i^4)+\cdots+(i^{18}+i^{18})\}+i^{19}$$
$$=2(i^2+i^3+i^4+\cdots+i^{18})$$
$$=2\{(-1-i+1+i)+(-1-i+1+i)+\cdots-1\}$$
$$=2\cdot(-1)=-2$$

0401 전략 자연수 n에 대하여 $(\overline{z})^n=\overline{z^n}$임을 이용한다.

풀이 $z^4=\dfrac{-1+i}{\sqrt{2}}$이므로 $\overline{z^4}=\dfrac{-1-i}{\sqrt{2}}$

즉 $(\overline{z})^4=\overline{z^4}=\dfrac{-1-i}{\sqrt{2}}$이므로 ··· ❶

$$(\overline{z})^{1000}=\{(\overline{z})^4\}^{250}=\left(\frac{-1-i}{\sqrt{2}}\right)^{250}$$
$$=\left\{\left(\frac{-1-i}{\sqrt{2}}\right)^2\right\}^{125}=\left(\frac{2i}{2}\right)^{125}$$
$$=i^{125}=(i^4)^{31}\cdot i=i$$ ··· ❷

답 i

채점 기준	비율
❶ $(\overline{z})^4$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ $(\overline{z})^{1000}$의 값을 구할 수 있다.	60 %

0402 전략 z_n에 $n=1, 2, 3, 4$를 각각 대입하여 z_1, z_2, z_3, z_4를 구한다.

풀이 $z_1=i^2(1+i)=-1-i$이므로

$P_{z_1}=-x-y$

$z_2=i^3(1+i)^2=(-i)\cdot 2i=-2i^2=2$이므로

$P_{z_2}=2x$

$z_3=i^4(1+i)^3=2i(1+i)=2i+2i^2=-2+2i$이므로

$P_{z_3}=-2x+2y$

$z_4=i^5(1+i)^4=i\cdot(2i)^2=-4i$이므로

$P_{z_4}=-4y$

$$\therefore P_w=(P_{z_1}+P_{z_2})-(P_{z_3}+P_{z_4})$$
$$=(-x-y+2x)-(-2x+2y-4y)$$
$$=(x-y)-(-2x-2y)$$
$$=3x+y$$

즉 $P_w=3x+y$이므로 $w=3+i$

답 ②

0403 전략 주어진 수들의 곱이 -32인 경우를 나누어 n의 값을 구한다.

풀이 주사위를 던져서 0, 3, 5가 적어도 한 번 나오면 나온 수들의 곱이 -32가 될 수 없다.

$(1+i)^2=2i$이고 $(2i)^2=-4$이므로 주사위에 적힌 수들의 곱이 -32가 되는 경우는 다음과 같다.

$-32=8\cdot(-4)$

(i) $-32=2^3\cdot(2i)^2$인 경우

2가 3번, $2i$가 2번 나오면 되므로

$n=5$

(ii) $-32=2^3\cdot(1+i)^2\cdot 2i$인 경우

2가 3번, $1+i$가 2번, $2i$가 1번 나오면 되므로

$n=6$

(iii) $-32=2^3\cdot(1+i)^4$인 경우

2가 3번, $1+i$가 4번 나오면 되므로

$n=7$

이상에서 가능한 n의 값은 5, 6, 7이므로 구하는 합은

$5+6+7=18$

답 18

0404 전략 z를 구한 후 z^n (n은 자연수)의 규칙성을 찾는다.

풀이 $z^2+\overline{z}=(a+bi)^2+(a-bi)$

$=(a^2-b^2+a)+(2ab-b)i$

$z^2+\overline{z}=0$이므로 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$a^2-b^2+a=0,\ 2ab-b=0$

$2ab-b=0$에서 $b(2a-1)=0$

$\therefore a=\dfrac{1}{2}$ ($\because b>0$)

이것을 $a^2-b^2+a=0$에 대입하면

$b^2=\dfrac{3}{4}$ $\therefore b=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ($\because b>0$)

$\therefore z=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$ ··· ❶

따라서

$$z^2=\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)^2=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2},$$
$$z^3=z\cdot z^2=\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\cdot\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}=-1,$$
$$z^4=z\cdot z^3=\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\cdot(-1)=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2},$$
$$z^5=z^2\cdot z^3=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\cdot(-1)=\frac{1-\sqrt{3}i}{2},$$
$$z^6=(z^3)^2=1$$

이므로 z^n이 정수이려면 n은 3의 배수이어야 한다.

즉 구하는 자연수 n의 개수는 100 이하의 자연수 중 3의 배수의 개수와 같으므로 33이다. ··· ❷

답 33

채점 기준	비율
❶ z를 구할 수 있다.	40 %
❷ 자연수 n의 개수를 구할 수 있다.	60 %

0405 전략 X, Y가 실수일 때 $|X|+|Y|=0$이면 $X=0$, $Y=0$임을 이용한다.

풀이 조건 (가)에서 $a<0,\ b>0$ $\therefore a<b$

조건 (나)에서 $b+c=0,\ a+b-2=0$

$\therefore c=-b,\ a=-b+2=c+2$ $\therefore c<a$

$\therefore c<a<b$

답 ④

SSEN 특강

실수 a, b에 대하여 $|a|\ge 0$, $|b|\ge 0$이므로 $|a|+|b|=0$이면

$|a|=0,\ |b|=0$ $\therefore a=0,\ b=0$

04 이차방정식

0406 $x^2-x-20=0$에서 $(x+4)(x-5)=0$

$\therefore x=-4$ 또는 $x=5$ 답 $x=-4$ 또는 $x=5$

0407 $9x^2-6x+1=0$에서 $(3x-1)^2=0$

$\therefore x=\frac{1}{3}$ 답 $x=\frac{1}{3}$

0408 $5x^2-9x-2=0$에서 $(5x+1)(x-2)=0$

$\therefore x=-\frac{1}{5}$ 또는 $x=2$ 답 $x=-\frac{1}{5}$ 또는 $x=2$

0409 $x^2-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}=0$의 양변에 2를 곱하면

$2x^2-x-1=0,\quad (2x+1)(x-1)=0$

$\therefore x=-\frac{1}{2}$ 또는 $x=1$ 답 $x=-\frac{1}{2}$ 또는 $x=1$

0410 $x=\frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4\cdot1\cdot(-1)}}{2\cdot1}$

$=\frac{3\pm\sqrt{13}}{2}$ 답 $x=\frac{3\pm\sqrt{13}}{2}$

0411 $x=\frac{-5\pm\sqrt{5^2-4\cdot2\cdot4}}{2\cdot2}=\frac{-5\pm\sqrt{-7}}{4}$

$=\frac{-5\pm\sqrt{7}i}{4}$ 답 $x=\frac{-5\pm\sqrt{7}i}{4}$

0412 $3x^2-2\cdot2x+2=0$이므로

$x=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-3\cdot2}}{3}=\frac{2\pm\sqrt{-2}}{3}$

$=\frac{2\pm\sqrt{2}i}{3}$ 답 $x=\frac{2\pm\sqrt{2}i}{3}$

0413 $9x^2+2\cdot3x+5=0$이므로

$x=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-9\cdot5}}{9}=\frac{-3\pm\sqrt{-36}}{9}$

$=\frac{-3\pm6i}{9}=\frac{-1\pm2i}{3}$ 답 $x=\frac{-1\pm2i}{3}$

0414 $2x^2-5x+2=0$에서 $(2x-1)(x-2)=0$

$\therefore x=\frac{1}{2}$ 또는 $x=2$

따라서 주어진 이차방정식의 근은 실근이다.

답 $x=\frac{1}{2}$ 또는 $x=2$, 실근

0415 $16x^2-24x+9=0$에서 $(4x-3)^2=0$

$\therefore x=\frac{3}{4}$

따라서 주어진 이차방정식의 근은 실근이다.

답 $x=\frac{3}{4}$, 실근

0416 $x^2+4=0$에서 $x^2=-4$

$\therefore x=\pm\sqrt{-4}=\pm2i$

따라서 주어진 이차방정식의 근은 허근이다.

답 $x=\pm2i$, 허근

0417 $x=\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4\cdot1}}{4}=\frac{1\pm\sqrt{-3}}{4}$

$=\frac{1\pm\sqrt{3}i}{4}$

따라서 주어진 이차방정식의 근은 허근이다.

답 $x=\frac{1\pm\sqrt{3}i}{4}$, 허근

0418 주어진 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=3^2-4\cdot7\cdot(-1)=37>0$

따라서 서로 다른 두 실근을 갖는다. 답 서로 다른 두 실근

참고 이차방정식 $7x^2+3x-1=0$에서 x^2의 계수 7과 상수항 -1의 부호가 다르므로 이 방정식은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

0419 $4x^2-2\cdot6x+9=0$이므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-6)^2-4\cdot9=0$

따라서 중근을 갖는다. 답 중근

0420 $x^2+2\cdot\sqrt{3}x+5=0$이므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(\sqrt{3})^2-1\cdot5=-2<0$

따라서 서로 다른 두 허근을 갖는다. 답 서로 다른 두 허근

0421 보기에 주어진 각 이차방정식의 판별식을 D라 하면

ㄱ. $D=5^2-4\cdot1\cdot3=13>0$

ㄴ. $D=(-3)^2-4\cdot2\cdot2=-7<0$

ㄷ. $\frac{D}{4}=1^2-1\cdot(-6)=7>0$

ㄹ. $\frac{D}{4}=(-2)^2-4\cdot1=0$

ㅁ. $\frac{D}{4}=2^2-2\cdot3=-2<0$

ㅂ. $\frac{D}{4}=1^2-2\cdot(-1)=3>0$

(1) 서로 다른 두 실근을 가지면 $D>0$이므로 ㄱ, ㄷ, ㅂ

(2) 중근을 가지면 $D=0$이므로 ㄹ

(3) 서로 다른 두 허근을 가지면 $D<0$이므로 ㄴ, ㅁ

답 (1) ㄱ, ㄷ, ㅂ (2) ㄹ (3) ㄴ, ㅁ

0422 이차방정식 $2x^2-x-k=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(-1)^2-4\cdot2\cdot(-k)=1+8k$

(1) 서로 다른 두 실근을 가지려면 $D>0$이어야 하므로

$D=1+8k>0\quad \therefore k>-\frac{1}{8}$

(2) 중근을 가지려면 $D=0$이어야 하므로

$D=1+8k=0 \quad \therefore k=-\frac{1}{8}$

(3) 서로 다른 두 허근을 가지려면 $D<0$이어야 하므로

$D=1+8k<0 \quad \therefore k<-\frac{1}{8}$

답 (1) $k>-\frac{1}{8}$ (2) $-\frac{1}{8}$ (3) $k<-\frac{1}{8}$

0423 주어진 이차식이 완전제곱식이 되려면 이차방정식 $x^2+kx+7=0$이 중근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=k^2-4\cdot1\cdot7=0, \quad k^2=28$

$\therefore k=\pm2\sqrt{7}$

답 $\pm2\sqrt{7}$

0424 주어진 이차식이 완전제곱식이 되려면 이차방정식 $x^2-(k+1)x+k+4=0$이 중근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=\{-(k+1)\}^2-4\cdot1\cdot(k+4)=0$

$k^2-2k-15=0, \quad (k+3)(k-5)=0$

$\therefore k=-3$ 또는 $k=5$

답 -3, 5

0425 이차방정식 $x^2-x+2=0$에서 근과 계수의 관계에 의하여

(1) $\alpha+\beta=-\frac{-1}{1}=1$

(2) $\alpha\beta=\frac{2}{1}=2$

(3) $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=1^2-2\cdot2=-3$

(4) $(\alpha-1)(\beta-1)=\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1=2-1+1=2$

답 (1) 1 (2) 2 (3) -3 (4) 2

0426 이차방정식 $x^2-3x+1=0$에서 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-\frac{-3}{1}=3, \ \alpha\beta=\frac{1}{1}=1$

(1) $\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-\alpha\beta$

$=3^2-1=8$

(2) $\alpha^3\beta+\alpha\beta^3=\alpha\beta(\alpha^2+\beta^2)$

$=\alpha\beta\{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\}$

$=1\cdot(3^2-2\cdot1)=7$

(3) $\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}=\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta}=\frac{3^2-2\cdot1}{1}=7$

(4) $(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=3^2-4\cdot1=5$이므로

$|\alpha-\beta|=\sqrt{5}$

답 (1) 8 (2) 7 (3) 7 (4) $\sqrt{5}$

0427 $x^2-(-4+3)x+(-4)\cdot3=0$

$\therefore x^2+x-12=0$

답 $x^2+x-12=0$

0428 $x^2-\{(3+\sqrt{2})+(3-\sqrt{2})\}x+(3+\sqrt{2})(3-\sqrt{2})=0$

$\therefore x^2-6x+7=0$

답 $x^2-6x+7=0$

0429 $x^2-\{(2+i)+(2-i)\}x+(2+i)(2-i)=0$

$\therefore x^2-4x+5=0$

답 $x^2-4x+5=0$

0430 $3\left\{x^2-\left(-\frac{1}{3}+1\right)x+\left(-\frac{1}{3}\right)\cdot1\right\}=0$

$3\left(x^2-\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}\right)=0 \quad \therefore 3x^2-2x-1=0$

답 $3x^2-2x-1=0$

0431 $4\left[x^2-\left\{\left(-\frac{1}{2}+3i\right)+\left(-\frac{1}{2}-3i\right)\right\}x\right.$

$\left.+\left(-\frac{1}{2}+3i\right)\left(-\frac{1}{2}-3i\right)\right]=0$

$4\left(x^2+x+\frac{37}{4}\right)=0 \quad \therefore 4x^2+4x+37=0$

답 $4x^2+4x+37=0$

0432 두 수 α, β를 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은

$x^2-2x-7=0$

$\therefore x=-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-1\cdot(-7)}=1\pm2\sqrt{2}$

이때 $\alpha<\beta$이므로 $\alpha=1-2\sqrt{2}$, $\beta=1+2\sqrt{2}$

답 $\alpha=1-2\sqrt{2}$, $\beta=1+2\sqrt{2}$

0433 두 수 α, β를 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은

$x^2+3x-1=0$

$\therefore x=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4\cdot1\cdot(-1)}}{2}=\frac{-3\pm\sqrt{13}}{2}$

이때 $\alpha<\beta$이므로 $\alpha=\frac{-3-\sqrt{13}}{2}$, $\beta=\frac{-3+\sqrt{13}}{2}$

답 $\alpha=\frac{-3-\sqrt{13}}{2}$, $\beta=\frac{-3+\sqrt{13}}{2}$

0434 $x^2+x-4=0$에서 근의 공식에 의하여

$x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot1\cdot(-4)}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{17}}{2}$

$\therefore x^2+x-4=\left(x-\frac{-1+\sqrt{17}}{2}\right)\left(x-\frac{-1-\sqrt{17}}{2}\right)$

$=\left(x+\frac{1-\sqrt{17}}{2}\right)\left(x+\frac{1+\sqrt{17}}{2}\right)$

답 $\left(x+\frac{1-\sqrt{17}}{2}\right)\left(x+\frac{1+\sqrt{17}}{2}\right)$

0435 $x^2+25=0$에서 $x^2=-25 \quad \therefore x=\pm5i$

$\therefore x^2+25=(x+5i)(x-5i)$

답 $(x+5i)(x-5i)$

0436 $3x^2-2x+2=0$에서 근의 공식에 의하여

$x=\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-3\cdot2}}{3}=\frac{1\pm\sqrt{-5}}{3}$

$=\frac{1\pm\sqrt{5}i}{3}$

$\therefore 3x^2-2x+2=3\left(x-\frac{1+\sqrt{5}i}{3}\right)\left(x-\frac{1-\sqrt{5}i}{3}\right)$

답 $3\left(x-\frac{1+\sqrt{5}i}{3}\right)\left(x-\frac{1-\sqrt{5}i}{3}\right)$

0437 a, b가 유리수이고 주어진 이차방정식의 한 근이 $2-\sqrt{3}$이므로 다른 한 근은 $2+\sqrt{3}$이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$(2-\sqrt{3})+(2+\sqrt{3})=-a$, $(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})=b$

$\therefore a=-4,\ b=1$ 답 $a=-4,\ b=1$

0438 a, b가 유리수이고 주어진 이차방정식의 한 근이 $-5+3\sqrt{2}$이므로 다른 한 근은 $-5-3\sqrt{2}$이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$(-5+3\sqrt{2})+(-5-3\sqrt{2})=-a$,

$(-5+3\sqrt{2})(-5-3\sqrt{2})=b$

$\therefore a=10,\ b=7$ 답 $a=10,\ b=7$

0439 a, b가 실수이고 주어진 이차방정식의 한 근이 $1-2i$이므로 다른 한 근은 $1+2i$이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$(1-2i)+(1+2i)=-a$, $(1-2i)(1+2i)=b$

$\therefore a=-2,\ b=5$ 답 $a=-2,\ b=5$

0440 a, b가 실수이고 주어진 이차방정식의 한 근이 $3+4i$이므로 다른 한 근은 $3-4i$이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$(3+4i)+(3-4i)=-a$, $(3+4i)(3-4i)=b$

$\therefore a=-6,\ b=25$ 답 $a=-6,\ b=25$

유형 01 이차방정식의 풀이 본책 66쪽

이차방정식을 풀 때에는 다음과 같은 순서로 한다.

(i) 이차방정식을 (x에 대한 이차식)$=0$ 꼴로 정리한다.

(ii) 인수분해 또는 근의 공식을 이용하여 해를 구한다.

0441 근의 공식을 이용하여 해를 구하면

$$x=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4\cdot1\cdot4}}{2}=\frac{-3\pm\sqrt{7}i}{2}$$

따라서 $a=-3$, $b=7$이므로

$a+b=4$ 답 4

0442 $(x+3)^2=x(3x-11)$에서

$x^2+6x+9=3x^2-11x$, $2x^2-17x-9=0$

$(2x+1)(x-9)=0$ $\therefore x=-\frac{1}{2}$ 또는 $x=9$ 답 ③

0443 $\underline{\frac{4}{3}x(x-1)-x+4=\frac{(x-3)^2}{2}}$에서

└ 양변에 6을 곱한다.

$8x^2-8x-6x+24=3x^2-18x+27$

$5x^2+4x-3=0$

$$\therefore x=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-5\cdot(-3)}}{5}=\frac{-2\pm\sqrt{19}}{5}$$

따라서 $\alpha=\frac{-2+\sqrt{19}}{5}$이므로 $5\alpha=-2+\sqrt{19}$

$\therefore 5\alpha-\sqrt{19}=-2$ 답 ①

0444 $(x*x)+(2*x)=0$에서

$(x^2-x+x)+(2x-2+x)=0$

$x^2+3x-2=0$

$$\therefore x=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4\cdot1\cdot(-2)}}{2}=\frac{-3\pm\sqrt{17}}{2}$$ 답 ①

0445 주어진 방정식의 양변에 $\sqrt{2}+1$을 곱하면

$(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)x^2+(\sqrt{2}+1)(3-\sqrt{2})x+\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)=0$

$x^2+(1+2\sqrt{2})x+\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)=0$

$(x+\sqrt{2}+1)(x+\sqrt{2})=0$

$\therefore x=-\sqrt{2}-1$ 또는 $x=-\sqrt{2}$

답 $x=-\sqrt{2}-1$ 또는 $x=-\sqrt{2}$

참고 x^2의 계수가 무리수인 이차방정식은 x^2의 계수를 유리화한 후 인수분해 또는 근의 공식을 이용하여 해를 구한다.

유형 02 한 근이 주어진 이차방정식 본책 66쪽

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 한 근이 α이다.

➡ $x=\alpha$를 $ax^2+bx+c=0$에 대입하면 등식이 성립한다.

➡ $a\alpha^2+b\alpha+c=0$

0446 이차방정식 $x^2-2kx-k+1=0$의 한 근이 -1이므로

$(-1)^2-2k\cdot(-1)-k+1=0$

$\therefore k=-2$

$k=-2$를 주어진 이차방정식에 대입하면

$x^2+4x+3=0$, $(x+3)(x+1)=0$

$\therefore x=-3$ 또는 $x=-1$

따라서 다른 한 근은 -3이다. 답 ④

0447 이차방정식 $x^2+kx+\sqrt{2}-2=0$의 한 근이 $1-\sqrt{2}$이므로

$(1-\sqrt{2})^2+k(1-\sqrt{2})+\sqrt{2}-2=0$

$3-2\sqrt{2}+k(1-\sqrt{2})+\sqrt{2}-2=0$

$1-\sqrt{2}+(1-\sqrt{2})k=0$, $(1-\sqrt{2})k=\sqrt{2}-1$

$\therefore k=-1$ 답 -1

0448 이차방정식 $x^2+(a-1)x-5a=0$의 한 근이 -5이므로

$(-5)^2+(a-1)\cdot(-5)-5a=0$

$30-10a=0$ $\therefore a=3$ ··· ❶

이차방정식 $kx^2-7x+k+1=0$의 한 근이 3이므로

$k\cdot3^2-7\cdot3+k+1=0$

$10k-20=0$ $\therefore k=2$ ··· ❷

$\therefore ak=6$ ··· ❸

답 6

채점 기준	비율
❶ a의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ k의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ ak의 값을 구할 수 있다.	20 %

0449 주어진 이차방정식의 한 근이 -1이므로

$k\cdot(-1)^2-(a+1)\cdot(-1)-kb=0$

$(1-b)k+a+1=0$

이 등식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하므로

$1-b=0,\ a+1=0$

따라서 $a=-1,\ b=1$이므로 $\quad a+b=0$ 　　답 ③

SSEN 특강 항등식에 대한 여러 가지 표현

다음은 모두 k에 대한 항등식을 나타낸다.
① k의 값에 관계없이 항상 성립하는 등식
② 모든 k에 대하여 성립하는 등식
③ 임의의 k에 대하여 성립하는 등식

0450 주어진 이차방정식의 한 근이 α이므로

$\underline{\alpha^2-\alpha+1=0}$ ← $\alpha=0$이면 등식이 성립하지 않으므로 $\alpha\neq0$

$\alpha\neq0$이므로 양변을 α로 나누면

$\alpha-1+\frac{1}{\alpha}=0 \qquad \therefore \alpha+\frac{1}{\alpha}=1$

$\therefore \alpha^2+\frac{1}{\alpha^2}=\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)^2-2=1^2-2=-1$ 　　답 -1

유형 03 절댓값 기호를 포함한 방정식

본책 67쪽

① $|x|=\begin{cases} x & (x\geq0) \\ -x & (x<0)\end{cases}$임을 이용하여 절댓값 기호 안의 식의 값이 0이 되는 x의 값을 기준으로 x의 값의 범위를 나누어서 방정식을 푼다.
② $\sqrt{x^2}$을 포함한 방정식 ➡ $\sqrt{x^2}=|x|$임을 이용한다.

0451 $x^2+|3x-2|=2$에서

(i) $x<\frac{2}{3}$일 때, $\quad x^2-(3x-2)=2$

$x^2-3x=0, \quad x(x-3)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=3$

그런데 $x<\frac{2}{3}$이므로 $\quad x=0$

(ii) $x\geq\frac{2}{3}$일 때, $\quad x^2+(3x-2)=2$

$x^2+3x-4=0, \quad (x+4)(x-1)=0$

$\therefore x=-4$ 또는 $x=1$

그런데 $x\geq\frac{2}{3}$이므로 $\quad x=1$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 근은

$x=0$ 또는 $x=1$

따라서 모든 근의 합은 1이다. 　　답 ①

0452 $2x^2+9|x|-5=0$에서

(i) $x<0$일 때, $\quad 2x^2-9x-5=0$

$(2x+1)(x-5)=0 \qquad \therefore x=-\frac{1}{2}$ 또는 $x=5$

그런데 $x<0$이므로 $\quad x=-\frac{1}{2}$

(ii) $x\geq0$일 때, $\quad 2x^2+9x-5=0$

$(x+5)(2x-1)=0 \qquad \therefore x=-5$ 또는 $x=\frac{1}{2}$

그런데 $x\geq0$이므로 $\quad x=\frac{1}{2}$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 근은

$x=-\frac{1}{2}$ 또는 $x=\frac{1}{2}$ 　　답 $x=-\frac{1}{2}$ 또는 $x=\frac{1}{2}$

다른 풀이 $x^2=|x|^2$이므로 주어진 방정식은

$2|x|^2+9|x|-5=0, \qquad (2|x|-1)(|x|+5)=0$

그런데 $|x|\geq0$이므로 $\qquad |x|=\frac{1}{2}$

$\therefore x=-\frac{1}{2}$ 또는 $x=\frac{1}{2}$

0453 $|x\triangle3|=x\triangle x$에서 $\qquad |x+3-3x|=x+x-x^2$

$\therefore |-2x+3|=-x^2+2x$ ··· ❶

(i) $x<\frac{3}{2}$일 때, $\quad -2x+3=-x^2+2x$

$x^2-4x+3=0, \qquad (x-1)(x-3)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=3$

그런데 $x<\frac{3}{2}$이므로 $\quad x=1$ ··· ❷

(ii) $x\geq\frac{3}{2}$일 때, $\quad -(-2x+3)=-x^2+2x$

$x^2=3 \qquad \therefore x=\pm\sqrt{3}$

그런데 $x\geq\frac{3}{2}$이므로 $\quad x=\sqrt{3}$ ··· ❸

(i), (ii)에서 구하는 x의 값은

$x=1$ 또는 $x=\sqrt{3}$ ··· ❹

답 $x=1$ 또는 $x=\sqrt{3}$

채점 기준	비율
❶ $\|x\triangle3\|=x\triangle x$를 변형할 수 있다.	10 %
❷ $x<\frac{3}{2}$일 때 x의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $x\geq\frac{3}{2}$일 때 x의 값을 구할 수 있다.	40 %
❹ x의 값을 구할 수 있다.	10 %

0454 방정식 $|4x^2-(3a-1)x-2a-1|=1$의 한 근이 a이므로

$|4a^2-(3a-1)a-2a-1|=1, \qquad |a^2-a-1|=1$

$\therefore a^2-a-1=\pm1$

(i) $a^2-a-1=1$일 때, $\quad a^2-a-2=0$

$(a+1)(a-2)=0 \qquad \therefore a=-1$ 또는 $a=2$

(ii) $a^2-a-1=-1$일 때, $\quad a^2-a=0$

$a(a-1)=0 \qquad \therefore a=0$ 또는 $a=1$

(i), (ii)에서 구하는 합은

$-1+2+0+1=2$ 　　답 2

0455 $\sqrt{(x-1)^2}+6=x^2+\sqrt{x^2}+3$에서

$|x-1|+6=x^2+|x|+3$

$\therefore x^2-|x-1|+|x|-3=0$

(i) $x<0$일 때,

$x-1<0$이므로 $\quad x^2+(x-1)-x-3=0$

$x^2-4=0, \quad x^2=4$

$\therefore x=\pm 2$

그런데 $x<0$이므로 $\quad x=-2$

(ii) $0\le x<1$일 때,

$x-1<0$이므로 $\quad x^2+(x-1)+x-3=0$

$x^2+2x-4=0 \quad \therefore x=-1\pm\sqrt{5}$

그런데 $0\le x<1$이므로 $x=-1\pm\sqrt{5}$는 근이 아니다.

(iii) $x\ge 1$일 때,

$x-1\ge 0$이므로 $\quad x^2-(x-1)+x-3=0$

$x^2-2=0, \quad x^2=2$

$\therefore x=\pm\sqrt{2}$

그런데 $x\ge 1$이므로 $\quad x=\sqrt{2}$

이상에서 주어진 방정식의 근은

$x=-2$ 또는 $x=\sqrt{2}$

답 ③

유형 04 가우스 기호를 포함한 방정식

본책 68쪽

(1) 실수 x에 대하여 x보다 크지 않은 최대의 정수를 $[x]$로 나타내고, 이를 가우스 기호라 한다.

(2) 가우스 기호를 포함한 방정식을 풀 때에는 다음과 같은 순서로 한다.

(i) 주어진 방정식에서 $[x]$의 값을 구한다.

(ii) $[x]$의 값이 정수인 것만을 택한다.

(iii) $[x]=n$ (n은 정수)이면 $n\le x<n+1$임을 이용하여 x의 값의 범위를 구한다.

0456 $2[x]^2+5[x]-3=0$에서

$([x]+3)(2[x]-1)=0$

$\therefore [x]=-3$ 또는 $[x]=\frac{1}{2}$

그런데 $[x]$는 정수이므로 $\quad [x]=-3$

$\therefore -3\le x<-2$

답 $-3\le x<-2$

0457 $[x]^2-3[x]-4=0$에서

$([x]+1)([x]-4)=0$

$\therefore [x]=-1$ 또는 $[x]=4$

$\therefore -1\le x<0$ 또는 $4\le x<5$

따라서 주어진 방정식의 해가 아닌 것은 ③이다.

답 ③

0458 $2x^2-x+3[x]=0$에서

(i) $-2<x<-1$일 때,

$[x]=-2$이므로 주어진 방정식은

$2x^2-x-6=0, \quad (2x+3)(x-2)=0$

$\therefore x=-\frac{3}{2}$ 또는 $x=2$

그런데 $-2<x<-1$이므로 $\quad x=-\frac{3}{2}$ ··· ❶

(ii) $-1\le x<0$일 때,

$[x]=-1$이므로 주어진 방정식은

$2x^2-x-3=0, \quad (x+1)(2x-3)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=\frac{3}{2}$

그런데 $-1\le x<0$이므로 $\quad x=-1$ ··· ❷

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 근은

$x=-\frac{3}{2}$ 또는 $x=-1$ ··· ❸

답 $x=-\frac{3}{2}$ 또는 $x=-1$

채점 기준	비율
❶ $-2<x<-1$일 때 x의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ $-1\le x<0$일 때 x의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ 주어진 방정식의 근을 구할 수 있다.	20 %

유형 05 이차방정식의 활용

본책 68쪽

이차방정식의 활용 문제를 풀 때에는 다음과 같은 순서로 한다.

(i) 문제의 의미를 파악하여 구하는 것을 미지수 x로 놓는다.

(ii) 주어진 조건을 이용하여 방정식을 세운다.

(iii) 방정식을 풀고 구한 근이 문제의 조건에 맞는지 확인한다.

0459 처음 정사각형 모양의 땅의 한 변의 길이를 x m라 하면 새로 만들어진 직사각형 모양의 땅의 가로의 길이는 $(x-6)$ m, 세로의 길이는 $(x+4)$ m이므로

$(x-6)(x+4)=\frac{2}{3}x^2, \quad x^2-2x-24=\frac{2}{3}x^2$

$x^2-6x-72=0, \quad (x+6)(x-12)=0$

$\therefore x=-6$ 또는 $x=12$

그런데 $x>6$이므로 $\quad x=12$ $\quad x-6>0$에서 $\quad x>6$

따라서 처음 정사각형 모양의 땅의 한 변의 길이는 12 m이다.

답 12 m

0460 길의 폭을 x m라 하면 남은 땅의 가로, 세로의 길이는 각각 $(28-x)$ m, $(20-2x)$ m이므로

$(28-x)(20-2x)=288$

$x^2-38x+136=0, \quad (x-4)(x-34)=0$

$\therefore x=4$ 또는 $x=34$

그런데 $0<x<10$이므로 $\quad x=4$ $\quad 20-2x>0$에서 $x<10$

따라서 구하는 길의 폭은 4 m이다.

답 ③

0461 처음 정삼각형 ABC의 한 변의 길이를 x cm라 하면

$\overline{A'B}=x+3$ (cm), $\overline{A'C}=x+6$ (cm)

$\triangle A'BC$는 직각삼각형이므로

$(x+6)^2=x^2+(x+3)^2$

$x^2-6x-27=0, \quad (x+3)(x-9)=0$

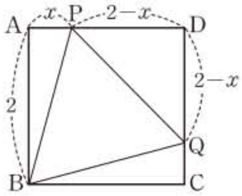
$\therefore x=-3$ 또는 $x=9$

그런데 $x>0$이므로 $\quad x=9$

따라서 처음 정삼각형 ABC의 한 변의 길이는 9 cm이다.

답 ②

0462 △PBQ가 정삼각형이므로



△ABP와 △CBQ에서

$\angle PAB = \angle QCB = 90°$,

$\overline{PB} = \overline{QB}$, $\overline{AB} = \overline{CB}$

$\therefore$ △ABP≡△CBQ

(RHS 합동)

따라서 $\overline{AP} = x$라 하면 $\overline{CQ} = x$이므로

$\overline{PD} = \overline{QD} = 2-x$

△PQD에서 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{PQ}^2 = (2-x)^2 + (2-x)^2$

△ABP에서 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{PB}^2 = x^2 + 2^2$

△PBQ는 정삼각형이므로 $\overline{PQ}^2 = \overline{PB}^2$에서

$(2-x)^2 + (2-x)^2 = x^2 + 2^2$

$x^2 - 8x + 4 = 0$ $\quad\therefore x = 4 \pm 2\sqrt{3}$

그런데 $0 < x < 2$이므로 $\quad x = 4 - 2\sqrt{3}$

따라서 $\overline{AP}$의 길이는 $4-2\sqrt{3}$이다. 답 $4-2\sqrt{3}$

유형 06 이차방정식의 근의 판별 본책 69쪽

계수가 실수인 이차방정식의 판별식을 D라 할 때

① 서로 다른 두 실근을 가지면 ➡ $D>0$
② 중근을 가지면 ➡ $D=0$
(실근을 가지면 ➡ $D \geq 0$)
③ 서로 다른 두 허근을 가지면 ➡ $D<0$

0463 이차방정식 $x^2 - 2(k+3)x + k^2 - 1 = 0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4} = \{-(k+3)\}^2 - (k^2-1) > 0$

$k^2 + 6k + 9 - k^2 + 1 > 0$

$6k + 10 > 0$ $\quad\therefore k > -\frac{5}{3}$

따라서 가장 작은 정수 k의 값은 -1이다. 답 ②

0464 이차방정식 $x^2 + ax + a - 1 = 0$의 판별식을 D라 하면

$D = a^2 - 4(a-1) = 0$, $\quad a^2 - 4a + 4 = 0$

$(a-2)^2 = 0$ $\quad\therefore a = 2$

$a=2$를 주어진 방정식에 대입하면

$x^2 + 2x + 1 = 0$, $\quad (x+1)^2 = 0$ $\quad\therefore x = -1$

따라서 $m = -1$이므로 $\quad a + m = 1$ 답 ③

0465 이차방정식 $2x^2 - 4x - (k-5) = 0$의 판별식을 D_1이라 하면

$\frac{D_1}{4} = (-2)^2 + 2(k-5) < 0$

$2k - 6 < 0$ $\quad\therefore k < 3$ ······ ㉠

이차방정식 $x^2 - (k+1)x + k + 4 = 0$의 판별식을 D_2라 하면

$D_2 = \{-(k+1)\}^2 - 4(k+4) = 0$

$k^2 + 2k + 1 - 4k - 16 = 0$, $\quad k^2 - 2k - 15 = 0$

$(k+3)(k-5) = 0$

$\therefore k = -3$ 또는 $k = 5$ ······ ㉡

㉠, ㉡에서 $\quad k = -3$ 답 -3

0466 주어진 방정식이 이차방정식이므로

$k^2 - 1 \neq 0$, $\quad (k+1)(k-1) \neq 0$

$\therefore k \neq -1$, $k \neq 1$ ······ ㉠ ⋯ ❶

이차방정식 $(k^2-1)x^2 - 2(k+1)x + 1 = 0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4} = \{-(k+1)\}^2 - (k^2-1) \geq 0$

$k^2 + 2k + 1 - k^2 + 1 \geq 0$

$2k + 2 \geq 0$ $\quad\therefore k \geq -1$ ······ ㉡ ⋯ ❷

㉠, ㉡에서 $\quad -1 < k < 1$ 또는 $k > 1$ ⋯ ❸

답 $-1 < k < 1$ 또는 $k > 1$

채점 기준	비율
❶ 주어진 방정식이 이차방정식이기 위한 k의 조건을 구할 수 있다.	30 %
❷ 판별식을 이용하여 k의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %
❸ k의 값의 범위를 구할 수 있다.	30 %

0467 이차방정식 $x^2 + (a+2k)x + k^2 - 2k - b = 0$의 판별식을 D라 하면

$D = (a+2k)^2 - 4(k^2 - 2k - b) = 0$

$a^2 + 4ak + 4k^2 - 4k^2 + 8k + 4b = 0$

$(4a+8)k + a^2 + 4b = 0$

이 등식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하므로

$4a + 8 = 0$, $a^2 + 4b = 0$

따라서 $a = -2$, $b = -1$이므로 $\quad a + b = -3$ 답 ③

유형 07 계수의 조건이 주어진 이차방정식의 근의 판별 본책 69쪽

계수가 실수인 이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$의 근은
➡ $b^2 - 4ac$의 부호를 조사하여 판별한다.

0468 이차방정식 $ax^2 - bx - c = 0$의 판별식을 D라 하면

$D = b^2 + 4ac$ ······ ㉠

$b = a - c$를 ㉠에 대입하면

$D = (a-c)^2 + 4ac = (a+c)^2 \geq 0$

따라서 이차방정식 $ax^2 - bx - c = 0$은 실근을 갖는다. 답 ①

0469 이차방정식 $x^2 + 2ax + a^2 - 2a + 4 = 0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4} = a^2 - (a^2 - 2a + 4) = 2a - 4$

이때 $a < 2$에서 $2a - 4 < 0$이므로 $\quad \frac{D}{4} < 0$

따라서 이차방정식 $x^2 + 2ax + a^2 - 2a + 4 = 0$은 서로 다른 두 허근을 갖는다. 답 서로 다른 두 허근

0470 이차방정식 $x^2-2ax+b^2+1=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$$\frac{D_1}{4}=(-a)^2-(b^2+1)=0$$

$$\therefore a^2=b^2+1 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

이차방정식 $x^2+4ax+2b+1=0$의 판별식을 D_2라 하면

$$\begin{aligned}\frac{D_2}{4}&=(2a)^2-(2b+1)\\&=4(b^2+1)-(2b+1)\ (\because ㉠)\\&=4b^2-2b+3\\&=4\left(b-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{11}{4}>0\end{aligned}$$

따라서 이차방정식 $x^2+4ax+2b+1=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

답 서로 다른 두 실근

0471 $\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}=-\sqrt{\dfrac{b}{a}}$에서 $a<0$, $b>0$

ㄱ. 이차방정식 $x^2+ax-b=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$$D_1=a^2+4b>0$$

이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다.

ㄴ. 이차방정식 $x^2+bx+a=0$의 판별식을 D_2라 하면

$$D_2=b^2-4a>0$$

이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다.

ㄷ. 이차방정식 $ax^2+bx+1=0$의 판별식을 D_3이라 하면

$$D_3=b^2-4a>0$$

이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다.

ㄹ. 이차방정식 $x^2-2ax+b=0$의 판별식을 D_4라 하면

$$\frac{D_4}{4}=a^2-b$$

a^2-b의 값의 부호는 알 수 없으므로 이 이차방정식의 근은 판별할 수 없다.

이상에서 항상 서로 다른 두 실근을 갖는 이차방정식은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ㄱ, ㄴ, ㄷ

0472 이차방정식 $P(x)=0$, $Q(x)=0$의 판별식을 각각 D_1, D_2라 하면

$$\frac{D_1}{4}=(a+1)^2-a^2=2a+1,\ \frac{D_2}{4}=a^2-(a-1)^2=2a-1$$

ㄱ. $P(x)=0$이 실근을 가지면

$$\frac{D_1}{4}=2a+1\geq 0$$

$2a+1\geq 0$의 양변에서 2를 빼면

$$2a-1\geq -2$$

즉 $\dfrac{D_2}{4}\geq -2$이므로 $Q(x)=0$이 항상 실근을 갖는다고 할 수 없다.

ㄴ. $P(x)=0$이 중근을 가지면

$$\frac{D_1}{4}=2a+1=0$$

$2a+1=0$의 양변에서 2를 빼면

$$2a-1=-2$$

즉 $\dfrac{D_2}{4}=-2<0$이므로 $Q(x)=0$은 서로 다른 두 허근을 갖는다.

ㄷ. $P(x)=0$이 서로 다른 두 허근을 가지면

$$\frac{D_1}{4}=2a+1<0$$

$2a+1<0$의 양변에서 2를 빼면

$$2a-1<-2$$

즉 $\dfrac{D_2}{4}<-2$이므로 $Q(x)=0$도 서로 다른 두 허근을 갖는다.

이상에서 옳은 것은 ㄷ뿐이다.

답 ③

유형 08 이차방정식의 판별식과 삼각형의 모양

본책 70쪽

판별식을 이용하여 주어진 이차방정식의 미정계수 사이의 관계를 파악한 후 다음을 이용하여 삼각형의 모양을 판단한다.

삼각형의 세 변의 길이가 a, b, c $(a\leq b\leq c)$일 때

① $a=b$ 또는 $b=c$ 또는 $c=a$ ➡ 이등변삼각형
② $a=b=c$ ➡ 정삼각형
③ $a^2+b^2>c^2$ ➡ 예각삼각형
④ $a^2+b^2=c^2$ ➡ 빗변의 길이가 c인 직각삼각형
⑤ $a^2+b^2<c^2$ ➡ 둔각삼각형

0473 이차방정식 $x^2+2(a+b+c)x+3(ab+bc+ca)=0$의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=(a+b+c)^2-3(ab+bc+ca)=0$$

$$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=0$$

양변에 2를 곱하면

$$2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca=0$$

$$(a^2-2ab+b^2)+(b^2-2bc+c^2)+(c^2-2ca+a^2)=0$$

$$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$$

a, b, c가 실수이므로

$$a-b=0,\ b-c=0,\ c-a=0$$

$$\therefore a=b=c$$

따라서 a, b, c를 세 변의 길이로 하는 삼각형은 정삼각형이다.

답 ①

0474 이차방정식 $(a+c)x^2+2bx+a-c=0$의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=b^2-(a+c)(a-c)<0$$

$$b^2-(a^2-c^2)<0 \qquad \therefore a^2>b^2+c^2$$

따라서 a, b, c를 세 변의 길이로 하는 삼각형은 둔각삼각형이다.

답 둔각삼각형

0475 이차방정식 $3x^2-(a+3b)x+ab=0$의 판별식을 D라 하면

$$D=\{-(a+3b)\}^2-4\cdot 3\cdot ab=0$$

$$a^2+6ab+9b^2-12ab=0,\qquad a^2-6ab+9b^2=0$$

$$(a-3b)^2=0 \qquad \therefore a=3b$$

따라서 직각삼각형의 빗변의 길이는

$$\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{(3b)^2+b^2}=\sqrt{10b^2}=\sqrt{10}b\ (\because b>0)$$

답 ④

유형 09 이차식이 완전제곱식이 되는 조건

본책 71쪽

이차식 ax^2+bx+c가 완전제곱식으로 인수분해된다.
⇒ 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$이 중근을 갖는다.
⇒ $b^2-4ac=0$

0476 주어진 이차식이 완전제곱식이면 x에 대한 이차방정식 $x^2-2(k-1)x+k^2-5k+4=0$이 중근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=\{-(k-1)\}^2-(k^2-5k+4)=0$$
$$k^2-2k+1-k^2+5k-4=0$$
$$3k-3=0 \qquad \therefore k=1$$

답 ⑤

0477 주어진 식이 x에 대한 이차식이므로

$k\neq 0$ ······ ㉠

또 주어진 이차식이 완전제곱식이 되려면 이차방정식 $kx^2+6kx+k+8=0$이 중근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=(3k)^2-k(k+8)=0$$
$$8k^2-8k=0, \qquad 8k(k-1)=0$$

$\therefore k=0$ 또는 $k=1$ ······ ㉡

㉠, ㉡에서 $k=1$

답 1

0478 주어진 이차식이 완전제곱식이면 x에 대한 이차방정식 $x^2-(ak+b)x+k^2+c-1=0$이 중근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$$D=\{-(ak+b)\}^2-4(k^2+c-1)=0$$
$$a^2k^2+2abk+b^2-4k^2-4c+4=0$$
$$(a^2-4)k^2+2abk+b^2-4c+4=0$$

이 등식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하므로

$$a^2-4=0,\ 2ab=0,\ b^2-4c+4=0$$
$$\therefore a^2=4,\ b=0,\ c=1$$
$$\therefore a^2+b^2+c^2=5$$

답 ②

0479 주어진 이차식이 $4(x+k)^2$으로 인수분해되면 완전제곱식이 된다.
즉 x에 대한 이차방정식 $4x^2-(3a-5)x+a^2-5a+2=0$이 중근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=\{-(3a-5)\}^2-4\cdot 4\cdot(a^2-5a+2)=0$ ··· ❶

$9a^2-30a+25-16a^2+80a-32=0$

$7a^2-50a+7=0, \qquad (7a-1)(a-7)=0$

$\therefore a=7\ (\because a>1)$ ··· ❷

따라서 주어진 이차식은 $4x^2-16x+16$이고, 이것은 $4(x-2)^2$으로 인수분해되므로

$k=-2$ ··· ❸

$\therefore a-k=9$ ··· ❹

답 9

채점 기준	비율
❶ 판별식을 이용하여 a에 대한 식을 세울 수 있다.	40 %
❷ a의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ k의 값을 구할 수 있다.	20 %
❹ $a-k$의 값을 구할 수 있다.	10 %

유형 10 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 식의 값 구하기 (1)

본책 71쪽

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근이 α, β일 때, α, β에 대한 식의 값은 다음과 같은 순서로 구한다.
(i) $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$, $\alpha\beta=\frac{c}{a}$임을 이용하여 $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$의 값을 구한다.
(ii) 주어진 식을 $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$에 대한 식으로 변형한다.
(iii) (ii)의 식에 (i)의 값을 대입하여 주어진 식의 값을 구한다.

0480 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=2,\ \alpha\beta=\frac{4}{3}$$
$$\therefore \alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$$
$$=2^3-3\cdot\frac{4}{3}\cdot 2=0$$

답 0

0481 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=-\frac{1}{2},\ \alpha\beta=-\frac{5}{2}$$
$$\therefore (\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$$
$$=\left(-\frac{1}{2}\right)^2-4\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)$$
$$=\frac{41}{4}$$
$$\therefore |\alpha-\beta|=\frac{\sqrt{41}}{2}$$

답 ②

0482 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=5,\ \alpha\beta=1$ ······ ㉠ ··· ❶

$\therefore (\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^2=\alpha+\beta+2\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}$

$=\alpha+\beta+2\sqrt{\alpha\beta}$ ($\because$ ㉠에서 $\alpha>0,\ \beta>0$)

$=5+2\cdot 1$

$=7$ ··· ❷

$\therefore \sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}=\sqrt{7}$ ··· ❸

답 $\sqrt{7}$

채점 기준	비율
❶ $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$의 값을 구할 수 있다.	30 %
❷ $(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^2$의 값을 구할 수 있다.	50 %
❸ $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$의 값을 구할 수 있다.	20 %

0483 $|x^2-4x|=1$에서 $\qquad x^2-4x=\pm 1$

(i) $x^2-4x=1$, 즉 $x^2-4x-1=0$의 두 근을 α, β라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=4,\ \alpha\beta=-1$$

(ii) $x^2-4x=-1$, 즉 $x^2-4x+1=0$의 두 근을 γ, δ라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\gamma+\delta=4,\ \gamma\delta=1$$

(i), (ii)에서

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\delta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}+\frac{\gamma+\delta}{\gamma\delta}$$
$$=\frac{4}{-1}+\frac{4}{1}=0$$

답 0

유형 11 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 식의 값 구하기 (2) 본책 72쪽

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근이 α, β일 때, 주어진 식이 이 방정식에 α 또는 β를 대입한 식을 변형한 꼴이면 식의 값은 다음과 같은 순서로 구한다.

(i) $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$, $\alpha\beta=\frac{c}{a}$임을 이용하여 $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$의 값을 구한다.
(ii) $a\alpha^2+b\alpha+c=0$, $a\beta^2+b\beta+c=0$임을 이용하여 주어진 식을 간단히 한다.
(iii) (ii)의 식에 (i)의 값을 대입하여 주어진 식의 값을 구한다.

0484 α, β가 주어진 이차방정식의 두 근이므로

$$\alpha^2-(3a-2)\alpha+1=0,\ \beta^2-(3a-2)\beta+1=0$$
$$\therefore\ \alpha^2-3a\alpha+1=-2\alpha,\ \beta^2-3a\beta+1=-2\beta$$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha\beta=1$이므로

$$(\alpha^2-3a\alpha+1)(\beta^2-3a\beta+1)=(-2\alpha)\cdot(-2\beta)$$
$$=4\alpha\beta$$
$$=4\cdot1=4$$

답 ④

0485 α는 주어진 이차방정식의 근이므로

$$\alpha^2-4\alpha+7=0 \qquad \therefore\ \alpha^2=4\alpha-7$$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=4$이므로

$$\alpha^2+4\beta=4\alpha-7+4\beta$$
$$=4(\alpha+\beta)-7$$
$$=4\cdot4-7=9$$

답 9

0486 α, β가 주어진 이차방정식의 두 근이므로

$$\alpha^2-\alpha-3=0,\ \beta^2-\beta-3=0$$
$$\therefore\ \alpha^2-\alpha=3,\ \beta^2-\beta=3$$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=1,\ \alpha\beta=-3$$
$$\therefore\ (\alpha^3-\alpha^2-\alpha-1)(\beta^3-\beta^2-\beta-1)$$
$$=\{\alpha(\alpha^2-\alpha)-\alpha-1\}\{\beta(\beta^2-\beta)-\beta-1\}$$
$$=(2\alpha-1)(2\beta-1)$$
$$=4\alpha\beta-2(\alpha+\beta)+1$$
$$=4\cdot(-3)-2\cdot1+1=-13$$

답 -13

0487 α, β가 주어진 이차방정식의 두 근이므로

$$\alpha^2+2\alpha-4=0,\ \beta^2+2\beta-4=0$$
$$\therefore\ \alpha^2+3\alpha-4=\alpha,\ \beta^2+3\beta-4=\beta$$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=-2,\ \alpha\beta=-4$$
$$\therefore\ \frac{\beta}{\alpha^2+3\alpha-4}+\frac{\alpha}{\beta^2+3\beta-4}=\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}$$
$$=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}$$
$$=\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta}$$
$$=\frac{(-2)^2-2\cdot(-4)}{-4}$$
$$=-3$$

답 ③

0488 α, β가 주어진 이차방정식의 두 근이므로

$$\alpha^2+\alpha-1=0,\ \beta^2+\beta-1=0$$
$$\therefore\ \alpha^2+\alpha=1,\ \beta^2+\beta=1$$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=-1,\ \alpha\beta=-1$$
$$\therefore\ \alpha^5+\beta^5+\alpha^4+\beta^4+\alpha^3+\beta^3$$
$$=\alpha^3(\alpha^2+\alpha+1)+\beta^3(\beta^2+\beta+1)$$
$$=2(\alpha^3+\beta^3)=2\{(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)\}$$
$$=2\{(-1)^3-3\cdot(-1)\cdot(-1)\}$$
$$=-8$$

답 ①

0489 α, β가 주어진 이차방정식의 두 근이므로

$$\alpha^2-4\alpha-1=0,\ \beta^2-4\beta-1=0$$
$$\therefore\ \alpha^2-4\alpha=1,\ \beta^2-4\beta=1$$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=4,\ \alpha\beta=-1$$
$$\therefore\ (\sqrt{\alpha^4-8\alpha^3+16\alpha^2+4\alpha}-\sqrt{\beta^4-8\beta^3+16\beta^2+4\beta})^2$$
$$=\{\sqrt{(\alpha^2-4\alpha)^2+4\alpha}-\sqrt{(\beta^2-4\beta)^2+4\beta}\}^2$$
$$=(\sqrt{4\alpha+1}-\sqrt{4\beta+1})^2$$
$$=4\alpha+1-2\sqrt{(4\alpha+1)(4\beta+1)}+4\beta+1$$
$$=4(\alpha+\beta)+2-2\sqrt{16\alpha\beta+4(\alpha+\beta)+1}$$
$$=4\cdot4+2-2\sqrt{16\cdot(-1)+4\cdot4+1}$$
$$=16$$

답 ④

참고 $\alpha^2-4\alpha-1=0$, $\beta^2-4\beta-1=0$에서 $4\alpha+1=\alpha^2$, $4\beta+1=\beta^2$이므로 $4\alpha+1\ge0$, $4\beta+1\ge0$
$\therefore\ \sqrt{4\alpha+1}\cdot\sqrt{4\beta+1}=\sqrt{(4\alpha+1)(4\beta+1)}$

유형 12 미정계수의 결정; 근의 조건이 주어진 경우 본책 72쪽

이차방정식의 두 근의 조건이 주어지면 두 근을 다음과 같이 놓고 근과 계수의 관계를 이용하여 미정계수를 구한다.

① 두 근의 비가 $m:n$이면 두 근은
⇒ $m\alpha$, $n\alpha$ $(\alpha\neq0)$
② 두 근의 차가 p이면 두 근은
⇒ α, $\alpha+p$ 또는 $\alpha-p$, α
③ 한 근이 다른 근의 k배이면 두 근은
⇒ α, $k\alpha$ $(\alpha\neq0)$

0490 주어진 이차방정식의 두 근을 2α, $3\alpha\,(\alpha\neq0)$라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$2\alpha+3\alpha=5(m+2)\quad\therefore\ \alpha=m+2\quad\cdots\cdots$ ㉠

$2\alpha\cdot3\alpha=-6m\quad\therefore\ \alpha^2=-m\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$(m+2)^2=-m,\quad m^2+5m+4=0$

$(m+4)(m+1)=0\quad\therefore\ m=-4$ 또는 $m=-1$

따라서 모든 실수 m의 값의 곱은 4이다.

답 ⑤

0491 주어진 이차방정식의 두 근을 α, $\alpha+4$라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+(\alpha+4)=2k\quad\therefore\ \alpha=k-2\quad\cdots\cdots$ ㉠

$\alpha(\alpha+4)=k-2\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$(k-2)(k+2)=k-2,\quad k^2-4=k-2$

$k^2-k-2=0,\quad (k+1)(k-2)=0$

$\therefore\ k=-1$ 또는 $k=2$

따라서 모든 실수 k의 값의 합은 1이다.

답 1

다른 풀이 주어진 이차방정식의 두 근을 α, $\beta\,(\alpha>\beta)$라 하면

$\alpha-\beta=4$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2k$, $\alpha\beta=k-2$

이때 $(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$이므로

$4^2=(2k)^2-4(k-2),\quad k^2-k-2=0$

$(k+1)(k-2)=0\quad\therefore\ k=-1$ 또는 $k=2$

0492 주어진 이차방정식의 두 근을 α, $2\alpha\,(\alpha\neq0)$라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+2\alpha=-6m\quad\therefore\ \alpha=-2m\quad\cdots\cdots$ ㉠

$\alpha\cdot2\alpha=-m^2+1\quad\therefore\ 2\alpha^2=-m^2+1\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$2\cdot(-2m)^2=-m^2+1,\quad 9m^2=1$

$m^2=\frac{1}{9}\quad\therefore\ m=\frac{1}{3}\ (\because\ m>0)$

답 ①

0493 주어진 이차방정식의 두 근을 α, $\alpha+1$이라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+(\alpha+1)=-(k+2)\quad\therefore\ k=-2\alpha-3\quad\cdots\cdots$ ㉠

$\alpha(\alpha+1)=3k-1\quad\therefore\ \alpha^2+\alpha=3k-1\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$\alpha^2+\alpha=3(-2\alpha-3)-1,\quad \alpha^2+7\alpha+10=0$

$(\alpha+5)(\alpha+2)=0\quad\therefore\ \alpha=-5$ 또는 $\alpha=-2$

$\alpha=-5$를 ㉠에 대입하면 $\quad k=7$

$\alpha=-2$를 ㉠에 대입하면 $\quad k=1$

그런데 $k>1$이므로 $\quad k=7$

답 7

0494 주어진 이차방정식의 두 근을 α, $-\alpha\,(\alpha\neq0)$라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+(-\alpha)=-(k^2-k-2)\quad\cdots\cdots$ ㉠

$\alpha\cdot(-\alpha)=-2k+3\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠에서 $\quad k^2-k-2=0,\quad (k+1)(k-2)=0$

$\therefore\ k=-1$ 또는 $k=2\quad\cdots\cdots$ ㉢

㉡에서 두 근의 부호가 서로 다르므로

$-2k+3<0\quad\therefore\ k>\frac{3}{2}\quad\cdots\cdots$ ㉣

㉢, ㉣에서 $\quad k=2$

답 2

SSEN 특강 절댓값이 같고 부호가 서로 다른 두 실근

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 실근 α, β의 절댓값이 같고 부호가 서로 다르면

➡ $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}=0$, $\alpha\beta=\frac{c}{a}<0$

0495 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 곱이 $-16<0$이므로 두 근의 부호는 서로 다르다.

주어진 이차방정식의 두 근을 α, $-4\alpha\,(\alpha\neq0)$라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+(-4\alpha)=-(k-3)$

$\therefore\ 3\alpha=k-3\quad\cdots\cdots$ ㉠

$\alpha\cdot(-4\alpha)=-16,\quad \alpha^2=4$

$\therefore\ \alpha=-2$ 또는 $\alpha=2\quad\cdots$ ❶

$\alpha=-2$를 ㉠에 대입하면

$-6=k-3\quad\therefore\ k=-3$

$\alpha=2$를 ㉠에 대입하면

$6=k-3\quad\therefore\ k=9\quad\cdots$ ❷

따라서 모든 실수 k의 값의 합은

$-3+9=6\quad\cdots$ ❸

답 6

채점 기준	비율
❶ α의 값을 구할 수 있다.	50 %
❷ k의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ 모든 실수 k의 값의 합을 구할 수 있다.	10 %

참고 주어진 이차방정식의 두 근을 $-\alpha$, 4α로 놓고 위와 같은 방법으로 풀 수도 있다.

유형 13 미정계수의 결정; 근의 관계식이 주어진 경우 본책 73쪽

이차방정식의 두 근 α, β에 대한 관계식이 주어지면 이 식을 $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$에 대한 식으로 변형한 후 근과 계수의 관계를 이용하여 미정계수를 구한다.

0496 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=k-2$, $\alpha\beta=k+3$

그런데 $\alpha+\beta<0$이므로

$k-2<0\quad\therefore\ k<2\quad\cdots\cdots$ ㉠

한편

$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$
$=(k-2)^2-2(k+3)$
$=k^2-6k-2$

이므로 $\alpha^2+\beta^2=5$에서

$k^2-6k-2=5, \quad k^2-6k-7=0$

$(k+1)(k-7)=0 \quad \therefore k=-1$ 또는 $k=7$ ...... ㉡

㉠, ㉡에서 $\quad k=-1$ 답 ②

0497 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=3m,\ \alpha\beta=m^2+2m$

$\therefore (\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$
$=(3m)^2-4(m^2+2m)$
$=5m^2-8m$

$(\alpha-\beta)^2=4$에서 $\quad 5m^2-8m=4$

$5m^2-8m-4=0, \quad (5m+2)(m-2)=0$

$\therefore m=2$ ($\because$ m은 자연수) 답 2

0498 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=a,\ \alpha\beta=b$ ⋯ ❶

$(\alpha-1)(\beta-1)=-1$에서 $\quad \alpha\beta-(\alpha+\beta)+1=-1$

$b-a+1=-1 \quad \therefore a-b=2$ ...... ㉠

$(2\alpha-1)(2\beta-1)=1$에서 $\quad 4\alpha\beta-2(\alpha+\beta)+1=1$

$4b-2a+1=1 \quad \therefore a-2b=0$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\quad a=4,\ b=2$ ⋯ ❷

$\therefore ab=8$ ⋯ ❸

답 8

채점 기준	비율
❶ 근과 계수의 관계를 이용하여 $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$를 구할 수 있다.	20 %
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	70 %
❸ ab의 값을 구할 수 있다.	10 %

0499 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=a,\ \alpha\beta=-2a$

$a>0$에서 $\alpha\beta<0$이므로

$(|\alpha|+|\beta|)^2=|\alpha|^2+|\beta|^2+2|\alpha\beta|$
$=\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta$
$=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$
$=a^2-4\cdot(-2a)$
$=a^2+8a$

$(|\alpha|+|\beta|)^2=3^2$에서 $\quad a^2+8a=9$

$a^2+8a-9=0, \quad (a+9)(a-1)=0$

$\therefore a=1$ ($\because a>0$)

따라서 $\alpha+\beta=1,\ \alpha\beta=-2$이므로

$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$
$=1^2-2\cdot(-2)=5$ 답 5

0500 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=1-2|a|,\ \alpha\beta=a$

$\alpha^2\beta+\alpha\beta^2+\alpha^2+\beta^2+\alpha+\beta=6$에서

$\alpha\beta(\alpha+\beta)+(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta+\alpha+\beta=6$

$a(1-2|a|)+(1-2|a|)^2-2a+(1-2|a|)=6$

$4a^2-2a|a|-a-6|a|-4=0$

(i) $a\geq 0$일 때,

$4a^2-2a^2-a-6a-4=0, \quad 2a^2-7a-4=0$

$(2a+1)(a-4)=0 \quad \therefore a=-\frac{1}{2}$ 또는 $a=4$

그런데 $a\geq 0$이므로 $\quad a=4$

(ii) $a<0$일 때,

$4a^2+2a^2-a+6a-4=0, \quad 6a^2+5a-4=0$

$(3a+4)(2a-1)=0 \quad \therefore a=-\frac{4}{3}$ 또는 $a=\frac{1}{2}$

그런데 $a<0$이므로 $\quad a=-\frac{4}{3}$

(i), (ii)에서 $a=4$ 또는 $a=-\frac{4}{3}$이므로 구하는 합은

$4+\left(-\frac{4}{3}\right)=\frac{8}{3}$ 답 ④

유형 14 미정계수의 결정; 두 이차방정식이 주어진 경우 본책 74쪽

두 이차방정식의 근이 모두 α, β로 나타내어져 있으면 근과 계수의 관계를 이용하여 α, β에 대한 식을 세운 후 두 식을 연립하여 미정계수를 구한다.

0501 이차방정식 $x^2-2ax-4=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2a,\ \alpha\beta=-4$ ...... ㉠

이차방정식 $x^2+bx-12=0$의 두 근이 $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$(\alpha+\beta)+\alpha\beta=-b,\ (\alpha+\beta)\alpha\beta=-12$ ...... ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$2a-4=-b,\ -8a=-12 \quad \therefore a=\frac{3}{2},\ b=1$

$\therefore a+b=\frac{5}{2}$ 답 ④

0502 이차방정식 $x^2-ax-b=0$의 두 근이 -2, 3이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$-2+3=a,\ (-2)\cdot 3=-b$

$\therefore a=1,\ b=6$ ⋯ ❶

따라서 이차방정식 $ax^2-bx-2a+b=0$에 $a=1$, $b=6$을 대입하면 $x^2-6x+4=0$이므로 두 근의 곱은 4이다. ⋯ ❷

답 4

채점 기준	비율
❶ a, b의 값을 구할 수 있다.	50 %
❷ 이차방정식 $ax^2-bx-2a+b=0$의 두 근의 곱을 구할 수 있다.	50 %

0503 이차방정식 $2x^2+ax+1=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-\frac{a}{2},\ \alpha\beta=\frac{1}{2}$ ...... ㉠

이차방정식 $x^2+3x-b=0$의 두 근이 $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\beta}$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=-3,\ \frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{\beta}=-b$$

$$\therefore \alpha+\beta=-3\alpha\beta,\ \alpha\beta=-\frac{1}{b} \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠을 ㉡에 대입하면

$$-\frac{a}{2}=-\frac{3}{2},\ \frac{1}{2}=-\frac{1}{b} \qquad \therefore a=3,\ b=-2$$

$$\therefore a-b=5$$

답 ④

0504 이차방정식 $x^2-ax+b=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=a,\ \alpha\beta=b \qquad \cdots\cdots ㉠$$

이차방정식 $x^2-(2a+3)x+b+6=0$의 두 근이 α^2, β^2이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha^2+\beta^2=2a+3,\ \alpha^2\beta^2=b+6$$

$$\therefore (\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=2a+3,\ (\alpha\beta)^2=b+6 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠을 ㉡에 대입하면

$$a^2-2b=2a+3,\ b^2=b+6$$

$b^2=b+6$에서 $\quad b^2-b-6=0$

$$(b+2)(b-3)=0 \qquad \therefore b=-2\ (\because b<0)$$

$a^2-2b=2a+3$에서 $\quad a^2+4=2a+3$

$$a^2-2a+1=0,\qquad (a-1)^2=0$$

$$\therefore a=1$$

$$\therefore a^3+b^3=-7$$

답 ①

유형 15 이차방정식의 작성
본책 75쪽

두 수 α, β를 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은
⇒ $x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$

0505 이차방정식 $2x^2-x+7=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=\frac{1}{2},\ \alpha\beta=\frac{7}{2}$$

$$\therefore (\alpha-1)+(\beta-1)=\alpha+\beta-2=\frac{1}{2}-2=-\frac{3}{2},$$

$$(\alpha-1)(\beta-1)=\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1=\frac{7}{2}-\frac{1}{2}+1=4$$

따라서 $\alpha-1$, $\beta-1$을 두 근으로 하고 x^2의 계수가 2인 이차방정식은

$$2\left(x^2+\frac{3}{2}x+4\right)=0 \qquad \therefore 2x^2+3x+8=0$$

답 $2x^2+3x+8=0$

0506 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=-a,\ \alpha\beta=b$$

$$\therefore \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=-\frac{a}{b},\ \frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{\beta}=\frac{1}{\alpha\beta}=\frac{1}{b}$$

따라서 $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\beta}$을 두 근으로 하는 이차방정식은

$$x^2+\frac{a}{b}x+\frac{1}{b}=0 \qquad \therefore bx^2+ax+1=0$$

답 ④

0507 이차방정식 $x^2-2x-2=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=2,\ \alpha\beta=-2 \qquad \cdots ❶$$

$$\begin{aligned}\therefore \frac{1+\alpha}{1-\beta}+\frac{1+\beta}{1-\alpha}&=\frac{(1+\alpha)(1-\alpha)+(1+\beta)(1-\beta)}{(1-\beta)(1-\alpha)}\\&=\frac{1-\alpha^2+1-\beta^2}{1-\alpha-\beta+\alpha\beta}\\&=\frac{2-\{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\}}{1-(\alpha+\beta)+\alpha\beta}\\&=\frac{2-\{2^2-2\cdot(-2)\}}{1-2+(-2)}=2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{1+\alpha}{1-\beta}\cdot\frac{1+\beta}{1-\alpha}&=\frac{1+\alpha+\beta+\alpha\beta}{1-\alpha-\beta+\alpha\beta}\\&=\frac{1+2+(-2)}{1-2+(-2)}=-\frac{1}{3}\end{aligned} \qquad \cdots ❷$$

따라서 $\frac{1+\alpha}{1-\beta}$, $\frac{1+\beta}{1-\alpha}$를 두 근으로 하고 x^2의 계수가 3인 이차방정식은

$$3\left(x^2-2x-\frac{1}{3}\right)=0 \qquad \therefore 3x^2-6x-1=0 \qquad \cdots ❸$$

답 $3x^2-6x-1=0$

채점 기준	비율
❶ $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$의 값을 구할 수 있다.	20 %
❷ $\frac{1+\alpha}{1-\beta}+\frac{1+\beta}{1-\alpha}$, $\frac{1+\alpha}{1-\beta}\cdot\frac{1+\beta}{1-\alpha}$의 값을 구할 수 있다.	50 %
❸ 이차방정식을 구할 수 있다.	30 %

0508 $\overline{AB}=\overline{AH}+\overline{BH}$에서

$$\alpha+\beta=8$$

△ABP는 $\angle APB=90°$인 직각삼각형이므로 $\overline{PH}^2=\overline{AH}\cdot\overline{BH}$
└ 반원에 대한 원주각의 크기는 90°이다.
에서 $\quad \alpha\beta=9$

$$\begin{aligned}\therefore \alpha^2+\beta^2&=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\\&=8^2-2\cdot9=46,\end{aligned}$$

$$\alpha^2\beta^2=(\alpha\beta)^2=9^2=81$$

따라서 α^2, β^2을 두 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은

$$x^2-46x+81=0$$

이므로 $\quad a=-46,\ b=81$

$$\therefore a-b=-127$$

답 -127

0509 이차방정식 $x^2+(a-2)x-b=0$의 두 근이 -1, α이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$-1+\alpha=-(a-2),\ -1\cdot\alpha=-b$$

$$\therefore a=-\alpha+3,\ b=\alpha \qquad \cdots\cdots ㉠$$

이차방정식 $x^2+(b+2)x-a=0$의 두 근이 3, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$3+\beta=-(b+2),\ 3\beta=-a \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠을 ㉡에 대입하면

$3+\beta=-(\alpha+2)$, $3\beta=\alpha-3$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$\alpha=-3$, $\beta=-2$

따라서 -3, -2를 두 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은
└두 근의 합: -5, 두 근의 곱: 6

$x^2+5x+6=0$

이므로 $p=5$, $q=6$

$\therefore p+q=11$ 답 ⑤

유형 16 잘못 보고 푼 이차방정식 본책 75쪽

① x의 계수를 잘못 보고 풀어 얻은 두 근의 곱은 원래의 이차방정식의 두 근의 곱과 같다.
② 상수항을 잘못 보고 풀어 얻은 두 근의 합은 원래의 이차방정식의 두 근의 합과 같다.

0510 준수는 a와 c를 바르게 보고 풀었으므로 두 근의 곱은

$\frac{c}{a}=-2\cdot6=-12$

$\therefore c=-12a$ ...... ㉠

민지는 a와 b를 바르게 보고 풀었으므로 두 근의 합은

$-\frac{b}{a}=(-2+\sqrt{7})+(-2-\sqrt{7})=-4$

$\therefore b=4a$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 $ax^2+bx+c=0$에 대입하면

$ax^2+4ax-12a=0$

$a\neq0$이므로 양변을 a로 나누면

$x^2+4x-12=0$, $(x+6)(x-2)=0$

$\therefore x=-6$ 또는 $x=2$

따라서 음수인 근은 -6이다. 답 -6

0511 하늘이는 b를 바르게 보고 풀었으므로 두 근의 곱은

$\frac{b}{3}=-\frac{2}{3}$ $\therefore b=-2$

혜진이는 a를 바르게 보고 풀었으므로 두 근의 합은

$-\frac{a}{3}=\frac{5}{3}$ $\therefore a=-5$

$\therefore a+b=-7$ 답 -7

0512 정혁이와 다은이가 푼 이차방정식을 $x^2+ax+b=0$ (a, b는 상수)이라 하자. ···➊

정혁이는 b를 바르게 보고 풀었으므로 두 근의 곱은

$b=(4+\sqrt{3}i)(4-\sqrt{3}i)=19$ ···➋

다은이는 a를 바르게 보고 풀었으므로 두 근의 합은

$-a=(-1+\sqrt{5})+(-1-\sqrt{5})=-2$

$\therefore a=2$ ···➌

따라서 구하는 이차방정식은

$x^2+2x+19=0$ ···➍

답 $x^2+2x+19=0$

채점 기준	비율
➊ 이차방정식을 $x^2+ax+b=0$으로 놓을 수 있다.	20 %
➋ b의 값을 구할 수 있다.	30 %
➌ a의 값을 구할 수 있다.	30 %
➍ 이차방정식을 구할 수 있다.	20 %

0513 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 근의 공식을

$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-ac}}{2a}$로 잘못 적용하여 얻은 두 근이 -2, 1이므로

$\frac{-b+\sqrt{b^2-ac}}{2a}+\frac{-b-\sqrt{b^2-ac}}{2a}=(-2)+1=-1$

$\frac{-2b}{2a}=-1$ $\therefore a=b$ ...... ㉠

$\frac{-b+\sqrt{b^2-ac}}{2a}\cdot\frac{-b-\sqrt{b^2-ac}}{2a}=-2\cdot1=-2$

$\frac{b^2-(b^2-ac)}{4a^2}=\frac{c}{4a}=-2$ $\therefore c=-8a$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 $ax^2+bx+c=0$에 대입하면

$ax^2+ax-8a=0$

따라서 원래의 이차방정식의 두 근의 곱은

$\frac{-8a}{a}=-8$ 답 ①

다른 풀이 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$에서 근의 공식은

$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

이므로 주어진 근의 공식은 c를 $\frac{1}{4}c$로 잘못 대입한 것과 같다.

이때 -2, 1을 두 근으로 하고 x^2의 계수가 a인 이차방정식은

$a\{x^2-(-2+1)x-2\}=0$, $ax^2+ax-2a=0$

이므로 원래의 이차방정식의 상수항은

$-2a\cdot4=-8a$

즉 원래의 이차방정식은 $ax^2+ax-8a=0$이므로 두 근의 곱은

$\frac{-8a}{a}=-8$

유형 17 이차식의 인수분해 본책 76쪽

x에 대한 이차식 ax^2+bx+c가 쉽게 인수분해되지 않을 때에는 다음과 같은 순서로 인수분해한다.
(i) 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근 α, β를 구한다.
(ii) $ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$로 인수분해한다.

0514 $x^2-2x+6=0$에서 근의 공식에 의하여

$x=-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-1\cdot6}=1\pm\sqrt{5}i$

$\therefore x^2-2x+6=\{x-(1+\sqrt{5}i)\}\{x-(1-\sqrt{5}i)\}$
$=(x-1-\sqrt{5}i)(x-1+\sqrt{5}i)$ 답 ①

0515 $x^2+4x+5=0$에서 근의 공식에 의하여

$x=-2\pm\sqrt{2^2-1\cdot5}=-2\pm i$

$\therefore x^2+4x+5=\{x-(-2+i)\}\{x-(-2-i)\}$
$=(x+2-i)(x+2+i)$

따라서 인수인 것은 ⑤이다. 답 ⑤

0516 $\frac{1}{2}x^2-x+1=0$, 즉 $x^2-2x+2=0$에서 근의 공식에 의하여

$x=-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-1\cdot2}=1\pm i$ ⋯ ❶

$\therefore \frac{1}{2}x^2-x+1=\frac{1}{2}\{x-(1+i)\}\{x-(1-i)\}$

$=\frac{1}{2}(x-1-i)(x-1+i)$ ⋯ ❷

따라서 $a=-1$, $b=1$이므로

$a-b=-2$ ⋯ ❸

답 -2

채점 기준	비율
❶ 이차방정식 $\frac{1}{2}x^2-x+1=0$의 근을 구할 수 있다.	40 %
❷ 주어진 이차식을 인수분해할 수 있다.	40 %
❸ $a-b$의 값을 구할 수 있다.	20 %

유형 18 이차방정식 $f(x)=0$의 근을 이용하여 $f(ax+b)=0$의 근 구하기 (본책 77쪽)

이차방정식 $f(x)=0$의 두 근이 α, β이면 $f(\alpha)=0$, $f(\beta)=0$이므로 $f(ax+b)=0$의 두 근은
➡ $ax+b=\alpha$, $ax+b=\beta$에서
$x=\frac{\alpha-b}{a}$ 또는 $x=\frac{\beta-b}{a}$

0517 $f(\alpha)=0$, $f(\beta)=0$이므로 $f(4x-3)=0$이려면

$4x-3=\alpha$ 또는 $4x-3=\beta$

$\therefore x=\frac{\alpha+3}{4}$ 또는 $x=\frac{\beta+3}{4}$

따라서 이차방정식 $f(4x-3)=0$의 두 근의 합은

$\frac{\alpha+3}{4}+\frac{\beta+3}{4}=\frac{\alpha+\beta+6}{4}=\frac{6+6}{4}=3$

답 ②

다른 풀이 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근이 α, β이므로

$f(x)=a(x-\alpha)(x-\beta)\ (a\neq0)$

로 놓으면 $f(4x-3)=0$에서

$f(4x-3)=a(4x-3-\alpha)(4x-3-\beta)=0$

$\therefore x=\frac{\alpha+3}{4}$ 또는 $x=\frac{\beta+3}{4}$

0518 방정식 $f(x)=0$이 -2를 근으로 가지므로

$f(-2)=0$

각 방정식의 좌변에 $x=-1$을 대입하면

① $f(-1+1)=f(0)$
② $f(-(-1)+1)=f(2)$
③ $f((-1)^2-1)=f(0)$
④ $f(3\cdot(-1)+1)=f(-2)=0$
⑤ $f((-1)^2+1)=f(2)$

답 ④

0519 $f(\alpha)=0$, $f(\beta)=0$이므로 $f(3x-1)=0$이려면

$3x-1=\alpha$ 또는 $3x-1=\beta$

$\therefore x=\frac{\alpha+1}{3}$ 또는 $x=\frac{\beta+1}{3}$ ⋯ ❶

따라서 이차방정식 $f(3x-1)=0$의 두 근의 곱은

$\frac{\alpha+1}{3}\cdot\frac{\beta+1}{3}=\frac{\alpha\beta+\alpha+\beta+1}{9}$

$=\frac{-2+5+1}{9}=\frac{4}{9}$ ⋯ ❷

답 $\frac{4}{9}$

채점 기준	비율
❶ 이차방정식 $f(3x-1)=0$의 두 근을 α, β에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	50 %
❷ 이차방정식 $f(3x-1)=0$의 두 근의 곱을 구할 수 있다.	50 %

0520 $f(2-3\alpha)=0$, $f(2-3\beta)=0$이므로 $f(4x)=0$이려면

$4x=2-3\alpha$ 또는 $4x=2-3\beta$

$\therefore x=\frac{2-3\alpha}{4}$ 또는 $x=\frac{2-3\beta}{4}$

따라서 이차방정식 $f(4x)=0$의 두 근의 곱은

$\frac{2-3\alpha}{4}\cdot\frac{2-3\beta}{4}=\frac{4-6(\alpha+\beta)+9\alpha\beta}{16}$

$=\frac{4-6\cdot(-1)+9\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)}{16}$

$=\frac{7}{16}$

답 $\frac{7}{16}$

유형 19 $f(\alpha)=f(\beta)=k$를 만족시키는 이차식 $f(x)$ 구하기 (본책 77쪽)

이차식 $f(x)$에 대하여 $f(\alpha)=f(\beta)=k$이면 $f(\alpha)-k=0$, $f(\beta)-k=0$이므로 이차방정식 $f(x)-k=0$의 두 근은 α, β이다.

0521 $f(\alpha)=f(\beta)=-1$이므로

$f(\alpha)+1=0$, $f(\beta)+1=0$

따라서 이차방정식 $f(x)+1=0$의 두 근이 α, β이고, $f(x)$의 x^2의 계수가 1이므로

$f(x)+1=(x-\alpha)(x-\beta)=x^2-3x-5$

따라서 $f(x)=x^2-3x-6$이므로

$f(3)=-6$

답 ②

0522 $f(\alpha)=1$, $f(\beta)=1$이므로

$f(\alpha)-1=0$, $f(\beta)-1=0$

따라서 이차방정식 $f(x)-1=0$, 즉 $x^2+4x-3=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-4$, $\alpha\beta=-3$

$\therefore \alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$

$=(-4)^3-3\cdot(-3)\cdot(-4)$

$=-100$

답 ①

0523 이차방정식 $x^2+2x-6=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha\beta=-6$

$\therefore f(\alpha)=f(\beta)=-6$

04 이차방정식

즉 이차방정식 $f(x)+6=0$의 두 근이 α, β이므로

$f(x)+6=a(x^2+2x-6)\ (a\neq0)$

으로 놓을 수 있다.

이때 $f(0)=6$이므로

$12=-6a \quad \therefore a=-2$

따라서 $f(x)=-2(x^2+2x-6)-6$이므로

$f(-1)=8$ 답 8

다른 풀이 이차방정식 $x^2+2x-6=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-2,\ \alpha\beta=-6$ ······ ㉠

이차식 $f(x)$에 대하여 $f(0)=6$이므로

$f(x)=ax^2+bx+6\ (a\neq0)$

으로 놓을 수 있다.

이때 $f(\alpha)=f(\beta)=-6$이므로

$f(\alpha)+6=0,\ f(\beta)+6=0$

따라서 이차방정식 $f(x)+6=0$, 즉 $ax^2+bx+12=0$의 두 근이 α, β이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-\frac{b}{a},\ \alpha\beta=\frac{12}{a}$ ······ ㉡

㉠, ㉡에서 $-\frac{b}{a}=-2,\ \frac{12}{a}=-6$

$\therefore a=-2,\ b=-4$

즉 $f(x)=-2x^2-4x+6$이므로 $f(-1)=8$

0524 이차방정식 $2x^2-2x+3=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=1,\ \alpha\beta=\frac{3}{2}$

$\therefore \alpha=1-\beta,\ \beta=1-\alpha$

$P(\alpha)=\beta$, $P(\beta)=\alpha$에서 $P(\alpha)=1-\alpha$, $P(\beta)=1-\beta$이므로

$P(\alpha)+\alpha-1=0,\ P(\beta)+\beta-1=0$

따라서 이차방정식 $P(x)+x-1=0$의 두 근이 α, β이고, $P(x)$의 x^2의 계수가 1이므로

$P(x)+x-1=(x-\alpha)(x-\beta)$

$=x^2-x+\frac{3}{2}$

$\therefore P(x)=x^2-2x+\frac{5}{2}$ 답 $x^2-2x+\frac{5}{2}$

다른 풀이 이차방정식 $2x^2-2x+3=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=1,\ \alpha\beta=\frac{3}{2}$

$P(x)=x^2+ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$P(\alpha)=\alpha^2+a\alpha+b=\beta$ ······ ㉠

$P(\beta)=\beta^2+a\beta+b=\alpha$ ······ ㉡

㉠$-$㉡을 하면

$\alpha^2-\beta^2+a(\alpha-\beta)=-(\alpha-\beta)$

$(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)+a(\alpha-\beta)+(\alpha-\beta)=0$

$(\alpha-\beta)(\alpha+\beta+a+1)=0$

$\alpha\neq\beta$이므로 $\alpha+\beta+a+1=0$

$1+a+1=0 \quad \therefore a=-2$

㉠$+$㉡을 하면

$\alpha^2+\beta^2+a(\alpha+\beta)+2b=\alpha+\beta$

$\{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\}+a(\alpha+\beta)+2b=\alpha+\beta$

$1^2-2\cdot\frac{3}{2}+(-2)\cdot1+2b=1 \quad \therefore b=\frac{5}{2}$

$\therefore P(x)=x^2-2x+\frac{5}{2}$

유형 20 이차방정식의 켤레근 본책 78쪽

① 계수가 모두 유리수인 이차방정식의 한 근이 $p+q\sqrt{m}$이면
➡ 다른 한 근은
$p-q\sqrt{m}$ (단, p, q는 유리수, $q\neq0$, $\sqrt{m}$은 무리수)

② 계수가 모두 실수인 이차방정식의 한 근이 $p+qi$이면
➡ 다른 한 근은 $p-qi$ (단, p, q는 실수, $q\neq0$, $i=\sqrt{-1}$)

0525 a, b가 실수이므로 $a-b$, ab도 실수이다.

즉 이차방정식 $x^2+(a-b)x+ab=0$의 한 근이 $3+\sqrt{2}i$이면 다른 한 근은 $3-\sqrt{2}i$이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$(3+\sqrt{2}i)+(3-\sqrt{2}i)=-(a-b)$,

$(3+\sqrt{2}i)(3-\sqrt{2}i)=ab$

이므로 $a-b=-6,\ ab=11$

$\therefore a^2+b^2=(a-b)^2+2ab$

$=(-6)^2+2\cdot11=58$ 답 58

0526 $\frac{1}{\sqrt{2}-1}=\frac{\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}=1+\sqrt{2}$

a, b가 유리수이므로 이차방정식 $x^2+ax-b=0$의 한 근이 $1+\sqrt{2}$이면 다른 한 근은 $1-\sqrt{2}$이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$(1+\sqrt{2})+(1-\sqrt{2})=-a,\ (1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})=-b$

이므로 $a=-2,\ b=1$

$\therefore ab=-2$ 답 ③

0527 $\frac{b+i}{1-i}=\frac{(b+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{(b-1)+(b+1)i}{2}$

a, b가 실수이므로 이차방정식 $x^2-4x+a=0$의 한 근이 $\frac{(b-1)+(b+1)i}{2}$이면 다른 한 근은 $\frac{(b-1)-(b+1)i}{2}$이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\frac{(b-1)+(b+1)i}{2}+\frac{(b-1)-(b+1)i}{2}=4$

$b-1=4 \quad \therefore b=5$

즉 두 근은 $2+3i$, $2-3i$이므로

$a=(2+3i)(2-3i)=13$

$\therefore a+b=18$ 답 ⑤

0528 m, n이 실수이므로 이차방정식 $x^2+mx+n=0$의 한 근이 $-1+2i$이면 다른 한 근은 $-1-2i$이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$(-1+2i)+(-1-2i)=-m,\ (-1+2i)(-1-2i)=n$

이므로 $m=2,\ n=5$ ⋯➊

$\therefore \frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\frac{1}{2}+\frac{1}{5}=\frac{7}{10},\ \frac{1}{m}\cdot\frac{1}{n}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{10}$

$\frac{1}{m},\ \frac{1}{n}$을 두 근으로 하고 x^2의 계수가 10인 이차방정식은

$10\left(x^2-\frac{7}{10}x+\frac{1}{10}\right)=0$

$\therefore 10x^2-7x+1=0$ ⋯➋

따라서 $a=-7,\ b=1$이므로

$b-a=8$ ⋯➌

답 8

채점 기준	비율
➊ $m,\ n$의 값을 구할 수 있다.	40 %
➋ $\frac{1}{m},\ \frac{1}{n}$을 두 근으로 하고 x^2의 계수가 10인 이차방정식을 구할 수 있다.	40 %
➌ $b-a$의 값을 구할 수 있다.	20 %

0529 조건 (가)에서 나머지정리에 의하여 $f(2)=9$이므로

$4+2m+n=9$

$\therefore 2m+n=5$ ⋯⋯ ㉠

$m,\ n$이 실수이므로 조건 (나)에서 이차방정식 $x^2+mx+n=0$의 한 근이 $a+3i$이면 다른 한 근은 $a-3i$이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$(a+3i)+(a-3i)=-m,\ (a+3i)(a-3i)=n$

이므로 $2a=-m,\ a^2+9=n$

$\therefore m=-2a,\ n=a^2+9$

이것을 ㉠에 대입하면

$-4a+(a^2+9)=5,\quad a^2-4a+4=0$

$(a-2)^2=0 \quad \therefore a=2$

따라서 $m=-4,\ n=13$이므로

$m+n=9$

답 ⑤

0530 전략 $2022=a$로 놓고 주어진 방정식을 푼다.

풀이 $2022=a$로 놓으면 $(2022x)^2-2021\cdot2023x-1=0$에서

$a^2x^2-(a-1)(a+1)x-1=0$

$a^2x^2-(a^2-1)x-1=0,\quad (a^2x+1)(x-1)=0$

$x=-\frac{1}{a^2}$ 또는 $x=1 \quad \therefore x=-\frac{1}{2022^2}$ 또는 $x=1$

이때 $-\frac{1}{2022^2}<1$이므로 $\alpha=1$

또 $x^2+2022x-2023=0$에서

$(x+2023)(x-1)=0 \quad \therefore x=-2023$ 또는 $x=1$

이때 $-2023<1$이므로 $\beta=-2023$

$\therefore \alpha-\beta=2024$

답 ⑤

0531 전략 $\alpha^2+2\alpha-1=0$임을 이용하여 주어진 α에 대한 다항식을 간단히 한다.

풀이 α가 이차방정식 $x^2+2x-1=0$의 근이므로

$\alpha^2+2\alpha-1=0 \quad \therefore \alpha^2=1-2\alpha$

$\therefore \alpha(\alpha^2+3\alpha-4)(\alpha^2+\alpha-6)$

$=\alpha(1-2\alpha+3\alpha-4)(1-2\alpha+\alpha-6)$

$=\alpha(\alpha-3)(-\alpha-5)$

$=-\alpha(\alpha^2+2\alpha-15)$

$=-\alpha(1-2\alpha+2\alpha-15)$

$=-\alpha\cdot(-14)=14\alpha$ ⋯➊

그런데 $x^2+2x-1=0$에서 $x=-1\pm\sqrt{2}$이므로

$\alpha=-1+\sqrt{2}\ (\because \alpha>0)$ ⋯➋

$\therefore \alpha(\alpha^2+3\alpha-4)(\alpha^2+\alpha-6)=14\alpha=-14+14\sqrt{2}$ ⋯➌

답 $-14+14\sqrt{2}$

채점 기준	비율
➊ 주어진 다항식을 간단히 할 수 있다.	60 %
➋ α의 값을 구할 수 있다.	20 %
➌ 식의 값을 구할 수 있다.	20 %

0532 전략 $x=2+\sqrt{3}$을 주어진 이차방정식에 대입한다.

풀이 이차방정식 $ax^2+\sqrt{3}bx+c=0$의 한 근이 $2+\sqrt{3}$이므로

$a(2+\sqrt{3})^2+\sqrt{3}b(2+\sqrt{3})+c=0$

$\therefore (7a+3b+c)+(4a+2b)\sqrt{3}=0$

이때 $a,\ b,\ c$는 유리수이므로

$7a+3b+c=0,\ 4a+2b=0$

$\therefore b=-2a,\ c=-a$

따라서 주어진 이차방정식은 $a(x^2-2\sqrt{3}x-1)=0$이고 이 이차방정식의 두 근은

$x=-(-\sqrt{3})\pm\sqrt{(-\sqrt{3})^2-1\cdot(-1)}=\sqrt{3}\pm2$

즉 $\beta=\sqrt{3}-2$이므로

$\alpha+\frac{1}{\beta}=2+\sqrt{3}+\frac{1}{\sqrt{3}-2}=0$

답 ③

참고 $ax^2+\sqrt{3}bx+c=0$에서 $\sqrt{3}b$는 유리수가 아니므로 이 방정식의 다른 한 근은 $2-\sqrt{3}$이 아니다.

0533 전략 $z^2+z+1=0$임을 이용하여 주어진 z에 대한 다항식을 간단히 한다.

풀이 z가 이차방정식 $x^2+x+1=0$의 근이므로

$z^2+z+1=0 \quad \therefore z+1=-z^2$

$\therefore z^n(1+z)^{2n}=z^n\cdot(-z^2)^{2n}$

$=z^n\cdot z^{4n}=z^{5n}$ ⋯⋯ ㉠

한편 $z^2+z+1=0$에서 $(z-1)(z^2+z+1)=0$

$z^3-1=0 \quad \therefore z^3=1$

㉠에서 z^{5n}의 값이 양의 실수이려면 $n=3k$ (k는 자연수) 꼴이어야 한다.

따라서 $3k\le50$에서 $k\le\underbrace{\frac{50}{3}}_{16.6\cdots}$

즉 자연수 n의 개수는 16이다.

답 16

0534 전략 $\overline{AP}=x$라 하고 닮음인 두 삼각형을 찾는다.

풀이 $\overline{AP}=x$라 하면 $\triangle ABD\backsim\triangle SOD$ (AA 닮음)이므로

$\overline{AB}:\overline{SO}=\overline{AD}:\overline{SD}$

$2:x=4:\overline{SD} \quad \therefore \overline{SD}=2x$

□APOS의 넓이는

$$\overline{AP}\cdot\overline{AS}=\overline{AP}\cdot(\overline{AD}-\overline{SD})$$
$$=x(4-2x)$$
$$=4x-2x^2$$

□OQCR의 넓이는

$$\overline{OQ}\cdot\overline{OR}=(\overline{SQ}-\overline{SO})\cdot\overline{OR}$$
$$=(\overline{AB}-\overline{AP})\cdot\overline{SD}$$
$$=(2-x)\cdot 2x$$
$$=4x-2x^2$$

□APOS와 □OQCR의 넓이의 합이 3이므로

$$4x-2x^2+4x-2x^2=3$$
$$4x^2-8x+3=0, \quad (2x-1)(2x-3)=0$$
$$\therefore x=\frac{1}{2} \text{ 또는 } x=\frac{3}{2}$$

이때 $\overline{AP}<\overline{PB}$에서 $x<2-x$, 즉 $x<1$이므로

$$x=\frac{1}{2}$$

따라서 $\overline{AP}$의 길이는 $\frac{1}{2}$이다. 답 ③

0535 전략 이차방정식의 판별식을 D라 할 때, 이차방정식이 중근을 가질 조건은 $D=0$임을 이용한다.

풀이 이차방정식 $x^2-2ax+10a-2b=0$의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=a^2-10a+2b=0$$
$$(a^2-10a+25)-25+2b=0$$
$$\therefore (a-5)^2=25-2b$$

b는 자연수이고 $25-2b\geq 0$이므로 $\quad b\leq\frac{25}{2}$

$$\therefore b=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 12$$

또 a, $(a-5)^2$도 자연수이므로

$b=8$일 때, $\quad (a-5)^2=9 \quad \therefore a=2$ 또는 $a=8$

$b=12$일 때, $\quad (a-5)^2=1 \quad \therefore a=4$ 또는 $a=6$

$\therefore a+b=10$ 또는 $a+b=16$ 또는 $a+b=18$

따라서 $a+b$의 값 중 가장 큰 값은 18이다. 답 18

0536 전략 $n=1$인 경우와 $n\neq 1$인 경우로 나누어 생각한다.

풀이 (i) $n=1$일 때,

$-2x+1=0$이므로 $\quad x=\frac{1}{2}$

$$\therefore f(1)=1$$

(ii) $n\neq 1$일 때,

이차방정식 $(n-1)x^2-2x+1=0$의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=(-1)^2-(n-1)=2-n$$

$n=0$이면 $\frac{D}{4}=2>0$이므로 $\quad f(0)=2$

$n=2$이면 $\frac{D}{4}=0$이므로 $\quad f(2)=1$

$n=3$이면 $\frac{D}{4}=-1<0$이므로 $\quad f(3)=0$

(i), (ii)에서

$$f(0)+f(1)+f(2)+f(3)=2+1+1+0=4$$

답 4

0537 전략 $x=\alpha$를 각 이차방정식에 대입한 후 세 식을 더하여 a, b, c의 조건식을 찾는다.

풀이 ㄱ. 세 이차방정식이 공통인 실근 α를 가지므로

$a\alpha^2-2b\alpha+c=0$ …… ㉠

$-2b\alpha^2+c\alpha+a=0$ …… ㉡

$c\alpha^2+a\alpha-2b=0$ …… ㉢

㉠+㉡+㉢을 하면

$$(a-2b+c)\alpha^2+(a-2b+c)\alpha+(a-2b+c)=0$$
$$(a-2b+c)(\alpha^2+\alpha+1)=0$$

이때 $\alpha^2+\alpha+1=\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$이므로

$$a-2b+c=0$$

ㄴ. $a-2b+c=0$에서 $2b=a+c$이므로 이차방정식

$ax^2-2bx+c=0$에서 $\quad ax^2-(a+c)x+c=0$

$(ax-c)(x-1)=0 \quad \therefore x=\frac{c}{a}$ 또는 $x=1$

이때 $0<c<a$이므로 $\quad \frac{c}{a}<1$

즉 이차방정식 $ax^2-2bx+c=0$은 1보다 작은 실근을 갖는다.

ㄷ. ㄴ에서 이차방정식 $ax^2-2bx+c=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

이차방정식 $-2bx^2+cx+a=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$$D_1=c^2-4\cdot(-2b)\cdot a=c^2+8ab>0$$

이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다.

이차방정식 $cx^2+ax-2b=0$의 판별식을 D_2라 하면

$$D_2=a^2-4c\cdot(-2b)=a^2+8bc>0$$

이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다.

따라서 세 이차방정식 중에서 중근을 갖는 이차방정식은 존재하지 않는다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ③

0538 전략 주어진 이차식을 x에 대하여 내림차순으로 정리하였을 때, (이차식)$=0$의 판별식이 완전제곱식이어야 함을 이용한다.

풀이 주어진 이차식을 x에 대하여 내림차순으로 정리하면

$$2x^2-(3y+5)x-2y^2+ky+3$$

이때 x에 대한 이차방정식 $2x^2-(3y+5)x-2y^2+ky+3=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$$D_1=\{-(3y+5)\}^2-4\cdot 2\cdot(-2y^2+ky+3)$$
$$=9y^2+30y+25+16y^2-8ky-24$$
$$=25y^2+2(15-4k)y+1$$

이 완전제곱식이어야 한다.

y에 대한 이차방정식 $25y^2+2(15-4k)y+1=0$의 판별식을 D_2라 하면

$$\frac{D_2}{4}=(15-4k)^2-25=0$$
$$16k^2-120k+225-25=0, \quad 2k^2-15k+25=0$$
$$(2k-5)(k-5)=0 \quad \therefore k=5\ (\because k\text{는 정수})$$

답 5

참고 주어진 식을 y에 대하여 내림차순으로 정리해도 같은 결과를 얻을 수 있다.

SSEN 특강 이차식이 두 일차식의 곱으로 인수분해되는 조건

① 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ (a는 상수, b, c는 y에 대한 다항식)의 근은

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

이므로 b^2-4ac가 완전제곱식일 때, ax^2+bx+c가 두 일차식의 곱으로 인수분해될 수 있다.

② x, y에 대한 이차식 A가 두 일차식의 곱으로 인수분해될 때에는 다음과 같은 순서로 해결한다.

(i) A를 x (또는 y)에 대하여 내림차순으로 정리한다.

(ii) $A=0$의 판별식 D가 완전제곱식이어야 한다.

(iii) $D=0$의 판별식이 0이다.

0539 전략 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 $\alpha_n+\beta_n$, $\alpha_n\beta_n$을 n에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha_n+\beta_n=6n+16$, $\alpha_n\beta_n=n^2-8$ ⋯ ❶

$$\therefore \frac{1}{\alpha_n+1}+\frac{1}{\beta_n+1}=\frac{\beta_n+1+\alpha_n+1}{(\alpha_n+1)(\beta_n+1)}$$

$$=\frac{\alpha_n+\beta_n+2}{\alpha_n\beta_n+(\alpha_n+\beta_n)+1}$$

$$=\frac{(6n+16)+2}{(n^2-8)+(6n+16)+1}$$

$$=\frac{6(n+3)}{(n+3)^2}=\frac{6}{n+3}$$ ⋯ ❷

$$\therefore \left(\frac{1}{\alpha_1+1}+\frac{1}{\alpha_2+1}+\frac{1}{\alpha_3+1}\right)+\left(\frac{1}{\beta_1+1}+\frac{1}{\beta_2+1}+\frac{1}{\beta_3+1}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{\alpha_1+1}+\frac{1}{\beta_1+1}\right)+\left(\frac{1}{\alpha_2+1}+\frac{1}{\beta_2+1}\right)+\left(\frac{1}{\alpha_3+1}+\frac{1}{\beta_3+1}\right)$$

$$=\frac{3}{2}+\frac{6}{5}+1=\frac{37}{10}$$ ⋯ ❸

따라서 $p=10$, $q=37$이므로 $p+q=47$ ⋯ ❹

답 47

채점 기준	비율
❶ $\alpha_n+\beta_n$, $\alpha_n\beta_n$을 n에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	20 %
❷ $\frac{1}{\alpha_n+1}+\frac{1}{\beta_n+1}$을 간단히 할 수 있다.	30 %
❸ $\left(\frac{1}{\alpha_1+1}+\frac{1}{\alpha_2+1}+\frac{1}{\alpha_3+1}\right)+\left(\frac{1}{\beta_1+1}+\frac{1}{\beta_2+1}+\frac{1}{\beta_3+1}\right)$의 값을 구할 수 있다.	30 %
❹ $p+q$의 값을 구할 수 있다.	20 %

0540 전략 조건 (가), (나)에서 α, β가 될 수 있는 수를 먼저 구한 후 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 p, q의 값을 구한다.

풀이 조건 (나)에서 양의 약수가 3개인 자연수는 소수의 제곱인 수이고 조건 (가)에서 $\alpha\le150$, $\beta\le150$이므로 α, β가 될 수 있는 수는

2^2, 3^2, 5^2, 7^2, 11^2, 즉 4, 9, 25, 49, 121

한편 이차방정식 $x^2-px+q=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$p=\alpha+\beta$, $q=\alpha\beta$

조건 (가)에 의하여 p, q는 150 이하의 서로 다른 자연수이므로 순서쌍 (p, q)는

$(4+9, 4\cdot9)$, $(4+25, 4\cdot25)$,

즉 $(13, 36)$, $(29, 100)$

의 2개이다.

답 ②

0541 전략 $|x|=a$ $(a>0)$이면 $x=\pm a$임을 이용한다.

풀이 $|x^2+x-k-2|=1$에서

$x^2+x-k-2=\pm1$

(i) $x^2+x-k-2=1$에서

$x^2+x-k-3=0$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 곱은

$-k-3$ ⋯ ❶

(ii) $x^2+x-k-2=-1$에서

$x^2+x-k-1=0$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 곱은

$-k-1$ ⋯ ❷

주어진 방정식의 모든 근의 곱이 24이므로 (i), (ii)에 의하여

$(-k-3)(-k-1)=24$

$k^2+4k-21=0$, $(k+7)(k-3)=0$

$\therefore k=3$ ($\because k>0$) ⋯ ❸

답 3

채점 기준	비율
❶ $x^2+x-k-2=1$에서 두 근의 곱을 구할 수 있다.	30 %
❷ $x^2+x-k-2=-1$에서 두 근의 곱을 구할 수 있다.	30 %
❸ 양수 k의 값을 구할 수 있다.	40 %

참고 두 방정식 $x^2+x-k-3=0$, $x^2+x-k-1=0$을 동시에 만족시키는 x의 값은 없으므로 두 방정식의 공통인 근은 존재하지 않는다.
또 방정식 $x^2+x-k-3=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$D_1=1^2-4\cdot1\cdot(-k-3)=4k+13$

방정식 $x^2+x-k-1=0$의 판별식을 D_2라 하면

$D_2=1^2-4\cdot1\cdot(-k-1)=4k+5$

따라서 $k>0$이면 $D_1>0$, $D_2>0$이므로 주어진 방정식은 서로 다른 네 실근을 갖는다.

0542 전략 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 α, β, γ, a, b의 관계식을 찾는다.

풀이 이차방정식 $x^2+(a-6)x-1=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-a+6$ ⋯⋯ ㉠

$\alpha\beta=-1$ ⋯⋯ ㉡

이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 두 근이 α, γ이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\gamma=-a$ ⋯⋯ ㉢

$\alpha\gamma=b$ ⋯⋯ ㉣ ⋯ ❶

㉠−㉢을 하면 $\beta-\gamma=6$

이때 $2\alpha=\beta-\gamma$이므로 $2\alpha=6$ $\therefore \alpha=3$

$\alpha=3$을 ㉡에 대입하여 풀면 $\beta=-\frac{1}{3}$

$\alpha=3$, $\beta=-\frac{1}{3}$을 ㉠에 대입하여 풀면 $a=\frac{10}{3}$

$\alpha=3$, $a=\frac{10}{3}$을 ㉢에 대입하여 풀면 $\gamma=-\frac{19}{3}$

$\alpha=3$, $\gamma=-\dfrac{19}{3}$를 ㉣에 대입하여 풀면 $\quad b=-19$ ⋯ ❷

$\therefore 3a+b=-9$ ⋯ ❸

답 -9

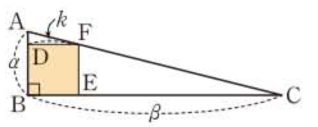
채점 기준	비율
❶ 근과 계수의 관계를 이용하여 α, β, γ, a, b의 관계식을 구할 수 있다.	40 %
❷ α, β, γ, a, b의 값을 구할 수 있다.	50 %
❸ $3a+b$의 값을 구할 수 있다.	10 %

0543 전략 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$의 값을 구하고 닮음인 두 삼각형을 찾는다.

풀이 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=4,\ \alpha\beta=2$$

오른쪽 그림과 같이 직각삼각형 ABC에 내접하는 정사각형 DBEF의 한 변의 길이를 k라 하면



$$\triangle \mathrm{ADF} \backsim \triangle \mathrm{ABC}\ (\mathrm{AA}\ 닮음)$$

이므로

$$\overline{\mathrm{AD}}:\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{DF}}:\overline{\mathrm{BC}}$$

$$(\alpha-k):\alpha=k:\beta$$

$$\alpha k=\beta(\alpha-k),\qquad (\alpha+\beta)k=\alpha\beta$$

$$\therefore k=\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

$k^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$ $\quad$ $4k=4\cdot\frac{1}{2}=2$

따라서 정사각형 DBEF의 넓이는 $\dfrac{1}{4}$, 둘레의 길이는 2이므로 $\dfrac{1}{4}$, 2를 두 근으로 하고 x^2의 계수가 4인 이차방정식은

$$4\left\{x^2-\left(\frac{1}{4}+2\right)x+\frac{1}{4}\cdot 2\right\}=0$$

$$4\left(x^2-\frac{9}{4}x+\frac{1}{2}\right)=0$$

$$\therefore 4x^2-9x+2=0$$

즉 $m=-9$, $n=2$이므로

$$m+n=-7$$

답 ⑤

0544 전략 잘못 적용한 근의 공식을 이용하여 두 근의 합과 곱을 먼저 구한다.

풀이 유진이가 잘못 적용한 근의 공식에 의하면 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$에서 두 근의 합은

$$\frac{a+\sqrt{a^2-4bc}}{2b}+\frac{a-\sqrt{a^2-4bc}}{2b}=\frac{2a}{2b}=\frac{a}{b} \quad \cdots\cdots ㉠$$

두 근의 곱은

$$\frac{a+\sqrt{a^2-4bc}}{2b}\cdot\frac{a-\sqrt{a^2-4bc}}{2b}=\frac{a^2-(a^2-4bc)}{4b^2}$$

$$=\frac{c}{b} \quad \cdots\cdots ㉡$$

[1단계]에서 이차방정식 $kX^2+X-8=0$의 두 근은 p, q이므로 ㉠, ㉡에 의하여

$$p+q=k,\ pq=-8 \quad \cdots\cdots ㉢$$

[2단계]에서 $\alpha+4=p$, $\beta+4=q$이므로

$$(\alpha+5)(\beta+5)=(p+1)(q+1)$$

$$=pq+p+q+1$$

$$=-8+k+1\ (\because ㉢)$$

$$=k-7$$

즉 $k-7=2$이므로 $\quad k=9$

따라서 $9(x+4)^2+(x+4)-8=0$, 즉 $9x^2+73x+140=0$의 두 근의 합은 $-\dfrac{73}{9}$이다.

답 $-\dfrac{73}{9}$

0545 전략 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 $\alpha+\beta$의 값을 구하고 $\alpha^2+\alpha+1=0$, $\beta^2+\beta+1=0$임을 이용한다.

풀이 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=-1$$

α가 이차방정식 $x^2+x+1=0$의 한 근이므로

$$\alpha^2+\alpha+1=0$$

이 식에 $\alpha+1=-\beta$를 대입하면

$$\alpha^2-\beta=0 \qquad \therefore \beta=\alpha^2$$

또 β가 이차방정식 $x^2+x+1=0$의 한 근이므로

$$\beta^2+\beta+1=0$$

이 식에 $\beta+1=-\alpha$를 대입하면

$$\beta^2-\alpha=0 \qquad \therefore \alpha=\beta^2$$

따라서 $f(\alpha)=f(\beta^2)=-4\beta$, $f(\beta)=f(\alpha^2)=-4\alpha$이므로

$$f(\alpha)+4\beta=0,\ f(\beta)+4\alpha=0$$

이 식에 각각 $\alpha=-\beta-1$, $\beta=-\alpha-1$을 대입하면

$$f(\alpha)+4(-\alpha-1)=0,\ f(\beta)+4(-\beta-1)=0$$

$$f(\alpha)-4\alpha-4=0,\ f(\beta)-4\beta-4=0$$

즉 이차방정식 $f(x)-4x-4=0$의 두 근이 α, β이고 $f(x)$의 최고차항의 계수가 1이므로

$$f(x)-4x-4=(x-\alpha)(x-\beta)$$

$$=x^2+x+1$$

따라서 $f(x)=x^2+5x+5$이므로

$$p=5,\ q=5$$

$$\therefore p+q=10$$

답 10

다른 풀이 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=-1,\ \alpha\beta=1$$

$f(\alpha^2)=-4\alpha$, $f(\beta^2)=-4\beta$이므로

$$\alpha^4+p\alpha^2+q=-4\alpha \quad \cdots\cdots ㉠$$

$$\beta^4+p\beta^2+q=-4\beta \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠+㉡을 하면

$$\alpha^4+\beta^4+p(\alpha^2+\beta^2)+2q=-4(\alpha+\beta)$$

이때

$$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=-1,$$

$$\alpha^4+\beta^4=(\alpha^2+\beta^2)^2-2\alpha^2\beta^2=-1$$

이므로

$$-1-p+2q=4 \qquad \therefore p-2q=-5 \quad \cdots\cdots ㉢$$

㉠−㉡을 하면

$$\alpha^4-\beta^4+p(\alpha^2-\beta^2)=-4(\alpha-\beta)$$

$$(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)(\alpha^2+\beta^2)+p(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)+4(\alpha-\beta)=0$$

$$5(\alpha-\beta)-p(\alpha-\beta)=0,\qquad (\alpha-\beta)(5-p)=0$$

$\therefore p=5\ (\because \alpha\neq\beta)$

$p=5$를 ㉢에 대입하면 $q=5$

$x^2+x+1=0$의 판별식을 D라 하면
$D=1-4\cdot1=-3<0$
따라서 서로 다른 두 허근을 갖는다.

$\therefore p+q=10$

0546 전략 이차방정식의 켤레근의 성질을 이용한다.

풀이 $\alpha=a+bi$ (a, b는 실수, $b\neq0$)라 하면 p가 실수이므로 이차방정식 $x^2-px+p+3=0$의 다른 한 근은 $\overline{\alpha}=a-bi$이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\overline{\alpha}=2a=p \qquad \therefore a=\frac{p}{2}$ ……㉠

$\alpha\overline{\alpha}=a^2+b^2=p+3$ ……㉡

한편

$\alpha^3=(a+bi)^3=a^3+3a^2bi-3ab^2-b^3i$
$\quad=(a^3-3ab^2)+(3a^2b-b^3)i$

이고 α^3이 실수이려면 $3a^2b-b^3=0$이어야 한다.

이때 $b\neq0$이므로 $b(3a^2-b^2)=0$에서

$3a^2-b^2=0 \qquad \therefore b^2=3a^2=\frac{3p^2}{4}\ (\because ㉠)$

$a^2=\frac{p^2}{4}$, $b^2=\frac{3p^2}{4}$을 ㉡에 대입하면

$\frac{p^2}{4}+\frac{3p^2}{4}=p+3 \qquad \therefore p^2-p-3=0$

따라서 모든 실수 p의 값의 곱은 -3이다. 답 ②

다른 풀이 이차방정식 $x^2-px+p+3=0$의 한 근이 α이므로

$\alpha^2-p\alpha+p+3=0$, 즉 $\alpha^2=p\alpha-p-3$

$\therefore \alpha^3=p\alpha^2-p\alpha-3\alpha$
$\quad=p(p\alpha-p-3)-p\alpha-3\alpha$
$\quad=p^2\alpha-p^2-3p-p\alpha-3\alpha$
$\quad=(p^2-p-3)\alpha-p^2-3p$

이때 p는 실수, α는 허수이므로 α^3이 실수이려면

$p^2-p-3=0$

Ⅱ. 방정식

05 이차방정식과 이차함수

0547 이차방정식 $x^2+x-2=0$에서

$(x+2)(x-1)=0 \qquad \therefore x=-2$ 또는 $x=1$ 답 -2, 1

0548 이차방정식 $3x^2-7x+2=0$에서

$(3x-1)(x-2)=0 \qquad \therefore x=\frac{1}{3}$ 또는 $x=2$ 답 $\frac{1}{3}$, 2

0549 이차방정식 $-4x^2+12x-9=0$에서

$4x^2-12x+9=0$, $\quad(2x-3)^2=0 \qquad \therefore x=\frac{3}{2}$ 답 $\frac{3}{2}$

0550 이차방정식 $x^2-5x+5=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(-5)^2-4\cdot1\cdot5=5>0$

따라서 주어진 이차함수의 그래프와 x축의 교점은 2개이다.

답 2

0551 이차방정식 $2x^2-x+5=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(-1)^2-4\cdot2\cdot5=-39<0$

따라서 주어진 이차함수의 그래프와 x축의 교점은 없다.

답 0

0552 이차방정식 $-4x^2+4x-1=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=2^2-(-4)\cdot(-1)=0$

따라서 주어진 이차함수의 그래프와 x축의 교점은 1개이다.

답 1

0553 이차방정식 $x^2-2x-k=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-1)^2-1\cdot(-k)=1+k>0$

$\therefore k>-1$ 답 $k>-1$

0554 $\frac{D}{4}=1+k=0 \qquad \therefore k=-1$ 답 -1

0555 $\frac{D}{4}=1+k<0 \qquad \therefore k<-1$ 답 $k<-1$

0556 이차방정식 $x^2-4x+k=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-2)^2-1\cdot k=4-k$

주어진 이차함수의 그래프가 x축과 만나려면 $D\geq0$이어야 하므로

$4-k\geq0 \qquad \therefore k\leq4$ 답 $k\leq4$

0557 $x^2-x+5=3x+1$에서

$x^2-4x+4=0$

$(x-2)^2=0 \qquad \therefore x=2$ 답 2

0558 $-x^2+4x+1=-x+5$에서 $\quad x^2-5x+4=0$

$(x-1)(x-4)=0 \qquad \therefore x=1$ 또는 $x=4$ 답 $1,\ 4$

0559 $-3x^2+5x+7=-x-2$에서

$3x^2-6x-9=0, \qquad x^2-2x-3=0$

$(x+1)(x-3)=0 \qquad \therefore x=-1$ 또는 $x=3$ 답 $-1,\ 3$

0560 $x^2+2x+2=-x+1$, 즉 $x^2+3x+1=0$의 판별식을 D라 하면 $\quad D=3^2-4\cdot1\cdot1=5>0$

따라서 주어진 이차함수의 그래프와 직선은 서로 다른 두 점에서 만난다. 답 서로 다른 두 점에서 만난다.

0561 $2x^2-3x+4=x+2$, 즉 $x^2-2x+1=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-1)^2-1\cdot1=0$

따라서 주어진 이차함수의 그래프와 직선은 한 점에서 만난다.(접한다.) 답 한 점에서 만난다.(접한다.)

0562 $-x^2+6x+1=2x+7$, 즉 $x^2-4x+6=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-2)^2-1\cdot6=-2<0$

따라서 주어진 이차함수의 그래프와 직선은 만나지 않는다.

답 만나지 않는다.

0563 $x^2-3x-4=x+k$, 즉 $x^2-4x-4-k=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-2)^2-1\cdot(-4-k)=k+8>0$

$\therefore k>-8$ 답 $k>-8$

0564 $\frac{D}{4}=k+8=0 \qquad \therefore k=-8$ 답 -8

0565 $\frac{D}{4}=k+8<0 \qquad \therefore k<-8$ 답 $k<-8$

0566 $2x^2-x+2=x+m$, 즉 $2x^2-2x+2-m=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-1)^2-2\cdot(2-m)=2m-3$

주어진 이차함수의 그래프와 직선이 만나려면 $D\geq0$이어야 하므로

$2m-3\geq0 \qquad \therefore m\geq\frac{3}{2}$ 답 $m\geq\frac{3}{2}$

0567 답 최솟값: -7, $x=-6$

0568 답 최댓값: 3, $x=1$

0569 답 최솟값: -2, $x=-5$

0570 $y=x^2+2x+3=(x+1)^2+2$

따라서 $x=-1$일 때 최솟값은 2이고, 최댓값은 없다.

답 최솟값: 2, 최댓값: 없다.

0571 $y=3x^2-12x+15=3(x-2)^2+3$

따라서 $x=2$일 때 최솟값은 3이고, 최댓값은 없다.

답 최솟값: 3, 최댓값: 없다.

0572 $y=-x^2-4x+5=-(x+2)^2+9$

따라서 $x=-2$일 때 최댓값은 9이고, 최솟값은 없다.

답 최댓값: 9, 최솟값: 없다.

0573 $y=-\frac{1}{2}x^2+x+1=-\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{3}{2}$

따라서 $x=1$일 때 최댓값은 $\frac{3}{2}$이고, 최솟값은 없다.

답 최댓값: $\frac{3}{2}$, 최솟값: 없다.

0574 $y=(x^2-8x+16)-16+a+2=(x-4)^2+a-14$

이 함수의 최솟값이 -1이므로

$a-14=-1 \qquad \therefore a=13$ 답 13

0575 $y=-\frac{1}{4}(x^2-4x+4)-(-1)+2a$

$\quad=-\frac{1}{4}(x-2)^2+2a+1$

이 함수의 최댓값이 5이므로

$2a+1=5 \qquad \therefore a=2$ 답 2

0576 주어진 함수의 x^2의 계수가 1이고 $x=1$에서 최솟값 -3을 가지므로

$y=(x-1)^2-3=x^2-2x-2$

$\therefore a=-2,\ b=-2$ 답 $a=-2,\ b=-2$

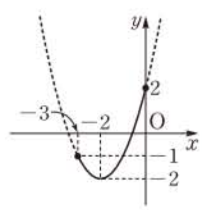
0577 주어진 함수의 x^2의 계수가 -2이고 $x=-1$에서 최댓값 4를 가지므로

$y=-2(x+1)^2+4=-2x^2-4x+2$

$\therefore a=-4,\ b=2$ 답 $a=-4,\ b=2$

0578 $f(x)=x^2+4x+2=(x+2)^2-2$

$-3\leq x\leq0$에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고

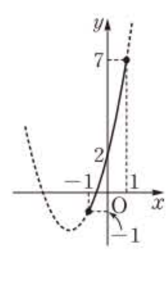


$f(-3)=-1,\ f(-2)=-2,$

$f(0)=2$

따라서 $f(x)$의 최댓값은 2, 최솟값은 -2이다. 답 최댓값: 2, 최솟값: -2

0579 $-1\leq x\leq1$에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고

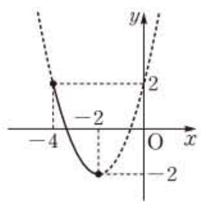


$f(-1)=-1,\ f(1)=7$

따라서 $f(x)$의 최댓값은 7, 최솟값은 -1이다.

답 최댓값: 7, 최솟값: -1

0580 $-4\le x\le -2$에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고



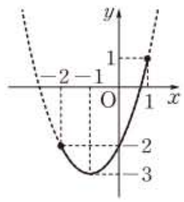
$f(-4)=2,\ f(-2)=-2$

따라서 $f(x)$의 최댓값은 2, 최솟값은 -2이다.

답 최댓값: 2, 최솟값: -2

0581 $f(x)=x^2+2x-2=(x+1)^2-3$

$-2\le x\le 1$에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고



$f(-2)=-2,\ f(-1)=-3,$

$f(1)=1$

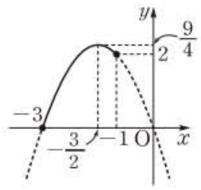
따라서 $f(x)$의 최댓값은 1, 최솟값은 -3이다.

답 최댓값: 1, 최솟값: -3

0582 $f(x)=-x^2-3x$

$=-\left(x+\dfrac{3}{2}\right)^2+\dfrac{9}{4}$

$-3\le x\le -1$에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고



$f(-3)=0,\ f\left(-\dfrac{3}{2}\right)=\dfrac{9}{4},$

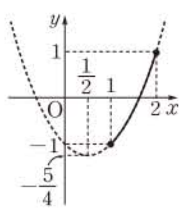
$f(-1)=2$

따라서 $f(x)$의 최댓값은 $\dfrac{9}{4}$, 최솟값은 0이다.

답 최댓값: $\dfrac{9}{4}$, 최솟값: 0

0583 $f(x)=x^2-x-1=\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{5}{4}$

$1\le x\le 2$에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고



$f(1)=-1,\ f(2)=1$

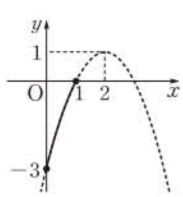
따라서 $f(x)$의 최댓값은 1, 최솟값은 -1이다.

답 최댓값: 1, 최솟값: -1

0584 $f(x)=-x^2+4x-3$

$=-(x-2)^2+1$

$0\le x\le 1$에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고



$f(0)=-3,\ f(1)=0$

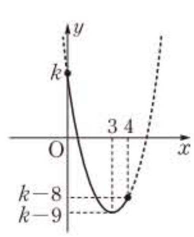
따라서 $f(x)$의 최댓값은 0, 최솟값은 -3이다.

답 최댓값: 0, 최솟값: -3

0585 $f(x)=x^2-6x+k$

$=(x-3)^2+k-9$

이므로 $0\le x\le 4$에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 $x=0$에서 최댓값 k를 가지므로

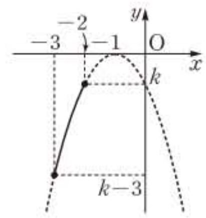
$k=4$

답 4

0586 $f(x)=-x^2-2x+k$

$=-(x+1)^2+k+1$

이므로 $-3\le x\le -2$에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 $x=-2$에서 최댓값 k를 가지므로

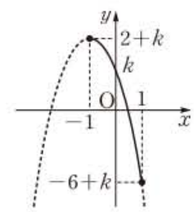
$k=-1$

답 -1

0587 $f(x)=-2x^2-4x+k$

$=-2(x+1)^2+2+k$

이므로 $-1\le x\le 1$에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 $x=1$에서 최솟값 $-6+k$를 가지므로

$-6+k=-4$

$\therefore\ k=2$

답 2

유형 01 이차함수의 그래프와 x축의 교점

본책 86쪽

이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표가 α, β이다.

➡ 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 실근이 α, β이다.

➡ 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용한다.

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a},\ \alpha\beta=\frac{c}{a}$$

0588 이차함수 $y=2x^2+ax+b$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표가 -1, 4이므로 -1, 4는 이차방정식 $2x^2+ax+b=0$의 두 근이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$-1+4=-\dfrac{a}{2},\ -1\cdot 4=\dfrac{b}{2}$

이므로 $a=-6,\ b=-8$

$\therefore\ ab=48$

답 48

0589 이차함수 $y=x^2-ax+b$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표가 -3, -2이므로 -3, -2는 이차방정식 $x^2-ax+b=0$의 두 근이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$-3+(-2)=a,\ (-3)\cdot(-2)=b$

이므로 $a=-5,\ b=6$

이차함수 $y=x^2-6x+5$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표는 이차방정식 $x^2-6x+5=0$의 근이므로

$(x-1)(x-5)=0\qquad \therefore\ x=1$ 또는 $x=5$

따라서 두 점 사이의 거리는

$5-1=4$

답 ④

0590 이차방정식 $3x^2+ax-2=0$의 두 근을 α, β라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-\dfrac{a}{3},\ \alpha\beta=-\dfrac{2}{3}$ ······ ㉠

이때 주어진 이차함수의 그래프가 x축과 만나는 두 점 사이의 거리가 $\frac{5}{3}$이므로 $|\alpha-\beta|=\frac{5}{3}$

양변을 제곱하면 $(\alpha-\beta)^2=\frac{25}{9}$

$\therefore (\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=\frac{25}{9}$ ...... ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $\frac{a^2}{9}+\frac{8}{3}=\frac{25}{9}$

$a^2=1 \quad \therefore a=\pm 1$

따라서 모든 상수 a의 값의 곱은 -1이다. 답 -1

다른 풀이 이차방정식 $3x^2+ax-2=0$의 두 근을 α, $\alpha+\frac{5}{3}$라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\left(\alpha+\frac{5}{3}\right)=-\frac{a}{3}$ ...... ㉠

$\alpha\left(\alpha+\frac{5}{3}\right)=-\frac{2}{3}$ ...... ㉡

㉡에서 $\alpha^2+\frac{5}{3}\alpha+\frac{2}{3}=0$

$3\alpha^2+5\alpha+2=0, \quad (\alpha+1)(3\alpha+2)=0$

$\therefore \alpha=-1$ 또는 $\alpha=-\frac{2}{3}$ ...... ㉢

㉢을 ㉠에 대입하면 $a=1$ 또는 $a=-1$

0591 꼭짓점의 좌표가 $(-2, -1)$이므로 주어진 이차함수를 $y=a(x+2)^2-1$이라 하면

$y=a(x+2)^2-1=ax^2+4ax+4a-1$ ...... ㉠

이때 주어진 이차함수의 그래프의 축의 방정식이 $x=-2$이고 $\overline{PQ}=4$이므로 두 점 P, Q의 x좌표는 -4, 0이다.

즉 -4, 0은 이차방정식 $ax^2+4ax+4a-1=0$의 두 근이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$-4\cdot 0=\frac{4a-1}{a}, \quad 4a-1=0 \quad \therefore a=\frac{1}{4}$ ··· ❶

$a=\frac{1}{4}$을 ㉠에 대입하면 $y=\frac{1}{4}x^2+x$

따라서 $b=1$, $c=0$이므로 ··· ❷

$a+b+c=\frac{5}{4}$ ··· ❸

답 $\frac{5}{4}$

채점 기준	비율
❶ a의 값을 구할 수 있다.	60 %
❷ b, c의 값을 구할 수 있다.	20 %
❸ $a+b+c$의 값을 구할 수 있다.	20 %

다른 풀이 주어진 이차함수를 $y=a(x+2)^2-1$이라 하면 이차방정식 $a(x+2)^2-1=0$에서

꼭짓점이 제3사분면 위에 있고 x축과 두 점에서 만나므로 $a>0$

$(x+2)^2=\frac{1}{a}, \quad x+2=\pm\sqrt{\frac{1}{a}}$

$\therefore x=-2\pm\sqrt{\frac{1}{a}}$

따라서 두 점 P, Q의 x좌표가 $-2+\sqrt{\frac{1}{a}}$, $-2-\sqrt{\frac{1}{a}}$이고

$\overline{PQ}=4$이므로 $-2+\sqrt{\frac{1}{a}}-\left(-2-\sqrt{\frac{1}{a}}\right)=4$

$\sqrt{\frac{1}{a}}=2, \quad \frac{1}{a}=4 \quad \therefore a=\frac{1}{4}$

따라서 주어진 이차함수는 $y=\frac{1}{4}(x+2)^2-1=\frac{1}{4}x^2+x$

0592 $2\overline{OA}=\overline{OB}$이므로 $A(-\alpha, 0)$, $B(2\alpha, 0)$ $(\alpha>0)$이라 하면 $-\alpha$, 2α는 이차방정식 $f(x)=0$의 근이다.

이때 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근의 합이 1이므로

$-\alpha+2\alpha=1 \quad \therefore \alpha=1$

$\therefore A(-1, 0), B(2, 0)$

한편 이차방정식 $f(4x-k)=0$의 두 근은 $4x-k=-1$, $4x-k=2$에서 $x=\frac{k-1}{4}$ 또는 $x=\frac{k+2}{4}$

이차방정식 $f(4x-k)=0$의 두 근의 합이 -1이므로

$\frac{k-1}{4}+\frac{k+2}{4}=-1, \quad 2k+1=-4$

$\therefore k=-\frac{5}{2}$

답 ①

유형 02 이차함수의 그래프와 x축의 위치 관계
본책 86쪽

이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프와 x축의 위치 관계는 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식을 D라 할 때

① $D>0$ ➡ 서로 다른 두 점에서 만난다.
② $D=0$ ➡ 한 점에서 만난다.(접한다.)
③ $D<0$ ➡ 만나지 않는다.

0593 이차함수 $y=x^2+(2-m)x+\frac{m^2}{4}$의 그래프가 x축과 서로 다른 두 점에서 만나므로 방정식 $x^2+(2-m)x+\frac{m^2}{4}=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(2-m)^2-4\cdot\frac{m^2}{4}>0, \quad -4m+4>0$

$4m<4 \quad \therefore m<1$

따라서 정수 m의 최댓값은 0이다. 답 0

0594 이차함수 $y=x^2+2kx-4k$의 그래프가 x축과 한 점에서 만나므로 방정식 $x^2+2kx-4k=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$\frac{D_1}{4}=k^2-(-4k)=0, \quad k^2+4k=0$

$k(k+4)=0 \quad \therefore k=0$ 또는 $k=-4$ ...... ㉠ ··· ❶

또 이차함수 $y=-2x^2+x+k$의 그래프가 x축과 만나지 않으므로 방정식 $-2x^2+x+k=0$의 판별식을 D_2라 하면

$D_2=1^2-4\cdot(-2)\cdot k<0, \quad 8k<-1$

$\therefore k<-\frac{1}{8}$ ...... ㉡ ··· ❷

㉠, ㉡에서 $k=-4$ ··· ❸

답 -4

채점 기준	비율
❶ 이차함수 $y=x^2+2kx-4k$의 그래프가 x축과 한 점에서 만나도록 하는 k의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ 이차함수 $y=-2x^2+x+k$의 그래프가 x축과 만나지 않도록 하는 k의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %
❸ k의 값을 구할 수 있다.	20 %

0595 이차함수 $y=x^2-2ax-b^2+9$의 그래프가 x축과 만나지 않으므로 방정식 $x^2-2ax-b^2+9=0$의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=(-a)^2-(-b^2+9)<0 \qquad \therefore a^2+b^2<9$$

따라서 이를 만족시키는 자연수 a, b의 순서쌍 (a, b)는 $(1, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 1)$, $(2, 2)$의 4개이다. 답 4

0596 이차함수 $y=x^2+(2m-1)x+m^2+m-2$의 그래프가 x축과 만나므로 방정식 $x^2+(2m-1)x+m^2+m-2=0$의 판별식을 D라 하면

$$D=(2m-1)^2-4(m^2+m-2)\geq 0$$

$$-8m+9\geq 0 \qquad \therefore m\leq \frac{9}{8}$$

따라서 실수 m의 최댓값은 $\frac{9}{8}$이다. 답 ⑤

0597 이차함수 $y=x^2+2(a+k)x+k^2+6k+b$의 그래프가 x축에 접하므로 방정식 $x^2+2(a+k)x+k^2+6k+b=0$의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=(a+k)^2-(k^2+6k+b)=0$$

$$a^2+2ak+k^2-k^2-6k-b=0$$

$$\therefore (2a-6)k+a^2-b=0$$

이 식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하므로

$$2a-6=0, \ a^2-b=0$$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $\quad a=3, \ b=9$

$$\therefore ab=27$$

답 ④

SSEN 특강 항등식의 성질

① $ax+b=0$이 x에 대한 항등식 ➡ $a=0$, $b=0$
② $ax^2+bx+c=0$이 x에 대한 항등식 ➡ $a=0$, $b=0$, $c=0$
③ $ax^2+bx+c=a'x^2+b'x+c'$이 x에 대한 항등식
➡ $a=a'$, $b=b'$, $c=c'$

유형 03 이차함수의 그래프와 직선의 교점

본책 87쪽

이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=g(x)$의 교점의 x좌표가 α, β이다.
➡ 이차방정식 $f(x)=g(x)$의 두 실근이 α, β이다.
➡ 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용한다.

0598 이차함수 $y=2x^2-3x+1$의 그래프와 직선 $y=ax+b$의 두 교점의 x좌표가 -2, 3이므로 -2, 3은 이차방정식

$$2x^2-3x+1=ax+b, \text{ 즉 } 2x^2-(a+3)x+1-b=0$$

의 두 근이다.
따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$-2+3=\frac{a+3}{2}, \ -2\cdot 3=\frac{1-b}{2}$$

이므로 $\quad a+3=2, \ 1-b=-12$

$$\therefore a=-1, \ b=13$$

$$\therefore a+b=12$$

답 ③

0599 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프와 직선 $y=mx+n$의 두 교점의 x좌표가 -3, 2이므로 -3, 2는 이차방정식

$$ax^2+bx+c=mx+n, \text{ 즉 } ax^2+(b-m)x+c-n=0$$

의 두 근이다.
따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 모든 실근의 곱은

$$-3\cdot 2=-6$$

답 -6

0600 이차함수 $f(x)=x^2+3x-5$의 그래프가 직선 $y=ax-4$와 서로 다른 두 점 $(x_1, f(x_1))$, $(x_2, f(x_2))$에서 만나므로 x_1, x_2는 이차방정식

$$x^2+3x-5=ax-4, \text{ 즉 } x^2+(3-a)x-1=0$$

의 두 근이다.
따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$x_1+x_2=-(3-a)$$

이므로 $\quad -(3-a)=6$

$$\therefore a=9$$

답 9

0601 이차함수 $y=x^2+px+q$의 그래프와 직선 $y=3x-1$의 한 교점의 x좌표가 $1-\sqrt{3}$이므로 $1-\sqrt{3}$은 이차방정식

$$x^2+px+q=3x-1, \text{ 즉 } x^2+(p-3)x+q+1=0$$

의 한 근이다. ··· ❶
이때 이 이차방정식의 계수가 모두 유리수이고 한 근이 $1-\sqrt{3}$이므로 다른 한 근은 $1+\sqrt{3}$이다. ··· ❷
따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$(1-\sqrt{3})+(1+\sqrt{3})=-(p-3),$$

$$(1-\sqrt{3})(1+\sqrt{3})=q+1$$

이므로 $\quad 2=-p+3, \ -2=q+1$

$$\therefore p=1, \ q=-3 \qquad ··· ❸$$

$$\therefore p-q=4 \qquad ··· ❹$$

답 4

채점 기준	비율
❶ $1-\sqrt{3}$을 한 근으로 갖는 이차방정식을 세울 수 있다.	20 %
❷ 이차방정식의 다른 한 근이 $1+\sqrt{3}$임을 알 수 있다.	20 %
❸ p, q의 값을 구할 수 있다.	40 %
❹ $p-q$의 값을 구할 수 있다.	20 %

0602 이차함수 $y=x^2-2$의 그래프와 직선 $y=mx$의 두 교점의 x좌표의 차가 4이므로 이차방정식

$$x^2-2=mx, \text{ 즉 } x^2-mx-2=0$$

의 두 근의 차가 4이다.
즉 두 근을 α, β라 하면

$$|\alpha-\beta|=4 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=m, \ \alpha\beta=-2 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠의 양변을 제곱하면 $\quad (\alpha-\beta)^2=16$

$$\therefore (\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=16 \qquad \cdots\cdots ㉢$$

㉡을 ㉢에 대입하면 $\quad m^2+8=16$

$$m^2=8 \qquad \therefore m=2\sqrt{2} \ (\because m>0)$$

답 $2\sqrt{2}$

0603 이차함수 $y=x^2+6x$, 즉 $y=(x+3)^2-9$의 그래프를 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동하면

$y+3=(x-4+3)^2-9$

$\therefore\ y=(x-1)^2-12$

두 점 P, Q는 이차함수 $y=(x-1)^2-12$의 그래프와 직선 $y=mx$의 교점이므로 두 점 P, Q의 x좌표는 이차방정식

$(x-1)^2-12=mx$, 즉 $x^2-(m+2)x-11=0$

의 두 근이다.

이때 두 점 P, Q의 x좌표의 합이 0이므로 이차방정식 $x^2-(m+2)x-11=0$의 두 근의 합이 0이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$m+2=0 \qquad \therefore\ m=-2$ 답 -2

0604 이차함수 $y=f(x)$의 이차항의 계수는 1이고 $y=f(x)$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표가 α, β이므로 α, β는 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근이다.

$\therefore\ f(x)=(x-\alpha)(x-\beta)$ $\cdots\cdots$ ㉠

또 이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=g(x)$의 두 교점의 x좌표가 α, γ이므로 α, γ는 이차방정식

$f(x)=g(x)$, 즉 $f(x)-g(x)=0$

의 두 근이다. 이차항의 계수가 1인 이차함수이다.

$\therefore\ f(x)-g(x)=(x-\alpha)(x-\gamma)$

$\therefore\ g(x)=(x-\alpha)(x-\beta)-(x-\alpha)(x-\gamma)$ ($\because$ ㉠)

$=(x-\alpha)(x-\beta-x+\gamma)$

$=2(x-\alpha)$

이때 $g(0)=-2$이므로

$-2\alpha=-2 \qquad \therefore\ \alpha=1$

$\therefore\ \beta=\alpha+3=4$, $\gamma=\beta+2=6$

따라서 $f(x)=(x-1)(x-4)$이므로

$f(\alpha+\beta+\gamma)=f(11)=70$ 답 ④

유형 04 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계 본책 88쪽

이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프와 직선 $y=mx+n$의 위치 관계는 이차방정식 $ax^2+bx+c=mx+n$, 즉 $ax^2+(b-m)x+c-n=0$의 판별식을 D라 할 때

① $D>0$ ➡ 서로 다른 두 점에서 만난다.

② $D=0$ ➡ 한 점에서 만난다.(접한다.)

③ $D<0$ ➡ 만나지 않는다.

0605 이차함수 $y=x^2+kx+2$의 그래프와 직선 $y=x+1$이 접하므로 방정식 $x^2+kx+2=x+1$, 즉 $x^2+(k-1)x+1=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(k-1)^2-4=0, \qquad k^2-2k-3=0$

$(k+1)(k-3)=0 \qquad \therefore\ k=-1$ 또는 $k=3$

따라서 모든 실수 k의 값의 합은 $\quad -1+3=2$ 답 ⑤

0606 직선 $y=x-m+n-1$이 이차함수 $y=x^2-1$의 그래프와 항상 서로 다른 두 점에서 만나므로 방정식 $x-m+n-1=x^2-1$, 즉 $x^2-x+m-n=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(-1)^2-4(m-n)>0$

$\therefore\ 4m-4n-1<0$ 답 ③

0607 이차함수 $y=x^2-2x+k$의 그래프와 직선 $y=2x-1$이 적어도 한 점에서 만나야 하므로 방정식 $x^2-2x+k=2x-1$, 즉 $x^2-4x+k+1=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-2)^2-(k+1)\ge 0$

$3-k\ge 0 \qquad \therefore\ k\le 3$

따라서 자연수 k는 1, 2, 3의 3개이다. 답 3

0608 이차함수 $y=x^2-4ax+5a^2-1$의 그래프와 직선 $y=-2x+k$가 만나지 않아야 하므로 방정식 $x^2-4ax+5a^2-1=-2x+k$, 즉 $x^2-2(2a-1)x+5a^2-1-k=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=\{-(2a-1)\}^2-(5a^2-1-k)<0$

$\therefore\ k<a^2+4a-2$

(i) $a=1$일 때, $k<3$이므로 $\qquad f(1)=2$

(ii) $a=2$일 때, $k<10$이므로 $\qquad f(2)=9$

(iii) $a=3$일 때, $k<19$이므로 $\qquad f(3)=18$

이상에서 $\qquad f(1)+f(2)+f(3)=29$ 답 29

0609 이차함수 $y=x^2-2kx+3$의 그래프가 직선 $y=-4x-k^2$보다 항상 위쪽에 있으려면 이차함수의 그래프와 직선이 만나지 않아야 하므로 방정식 $x^2-2kx+3=-4x-k^2$, 즉 $x^2-2(k-2)x+k^2+3=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=\{-(k-2)\}^2-(k^2+3)<0$ ⋯ ❶

$-4k+1<0 \qquad \therefore\ k>\frac{1}{4}$ ⋯ ❷

따라서 정수 k의 최솟값은 1이다. ⋯ ❸

답 1

채점 기준	비율
❶ 주어진 이차함수의 그래프가 직선보다 항상 위쪽에 있도록 하는 조건을 구할 수 있다.	60 %
❷ k의 값의 범위를 구할 수 있다.	20 %
❸ 정수 k의 최솟값을 구할 수 있다.	20 %

유형 05 이차함수의 그래프에 접하는 직선의 방정식 본책 89쪽

① 기울기가 m이고 이차함수 $y=f(x)$의 그래프에 접하는 직선

➡ $y=mx+b$로 놓고, 이차방정식 $f(x)=mx+b$의 판별식 D가 $D=0$임을 이용하여 b의 값을 구한다.

② 점 (p, q)를 지나고 이차함수 $y=f(x)$의 그래프에 접하는 직선

➡ $y=a(x-p)+q$로 놓고, 이차방정식 $f(x)=a(x-p)+q$의 판별식 D가 $D=0$임을 이용하여 a의 값을 구한다.

0610 직선 $y=ax+b$가 직선 $y=-2x+1$에 평행하므로

$a=-2$

직선 $y=-2x+b$가 이차함수 $y=x^2+2x-3$의 그래프와 접하므로 방정식 $x^2+2x-3=-2x+b$, 즉 $x^2+4x-3-b=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=2^2-(-3-b)=0 \qquad \therefore b=-7$

$\therefore a+b=-9$ 답 ③

참고 두 직선 $y=ax+b$, $y=a'x+b'$이 평행하면 $a=a'$, $b\neq b'$이다.

0611 직선 $y=x+m$을 y축의 방향으로 $-2m$만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$y=x+m-2m=x-m$

이 직선이 이차함수 $y=x^2-x+2$의 그래프와 접하므로 방정식 $x^2-x+2=x-m$, 즉 $x^2-2x+2+m=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-1)^2-(2+m)=0$

$-1-m=0 \qquad \therefore m=-1$ 답 -1

0612 점 $(-3, 1)$을 지나는 직선의 방정식을 $y=a(x+3)+1$이라 하면 이 직선이 이차함수 $y=-x^2+2x+5$의 그래프와 접하므로 방정식 $-x^2+2x+5=a(x+3)+1$, 즉 $x^2+(a-2)x+3a-4=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(a-2)^2-4(3a-4)=0$

$\therefore a^2-16a+20=0$

이 이차방정식의 두 실근을 α, β라 하면 α, β는 두 직선의 기울기이므로 구하는 기울기의 곱은 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha\beta=20$ 답 20

참고 이차방정식 $a^2-16a+20=0$의 판별식을 D'이라 하면

$\frac{D'}{4}=(-8)^2-20=44>0$

따라서 $a^2-16a+20=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

0613 기울기가 4인 직선의 방정식을 $y=4x+a$라 하면 이 직선이 이차함수 $y=2x^2$의 그래프와 접하므로 방정식 $2x^2=4x+a$, 즉 $2x^2-4x-a=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$\frac{D_1}{4}=(-2)^2-2\cdot(-a)=0, \qquad 4+2a=0$

$\therefore a=-2$

따라서 직선 $y=4x-2$가 이차함수 $y=-x^2-kx-k-5$의 그래프와 접하므로 방정식 $-x^2-kx-k-5=4x-2$, 즉 $x^2+(k+4)x+k+3=0$의 판별식을 D_2라 하면

$D_2=(k+4)^2-4(k+3)=0$

$k^2+4k+4=0, \qquad (k+2)^2=0$

$\therefore k=-2$ 답 ②

0614 구하는 직선의 방정식을 $y=mx+n$이라 하자.
이 직선이 이차함수 $y=x^2-2ax+a^2-1$의 그래프와 접하므로 방정식 $x^2-2ax+a^2-1=mx+n$, 즉 $x^2-(2a+m)x+a^2-1-n=0$의 판별식을 D라 하면

$D=\{-(2a+m)\}^2-4(a^2-1-n)=0$

$\therefore 4ma+(m^2+4+4n)=0$ ⋯ ❶

이 식이 a의 값에 관계없이 항상 성립하므로

$4m=0$, $m^2+4+4n=0$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $\quad m=0$, $n=-1$

따라서 구하는 직선의 방정식은 $\quad y=-1$ ⋯ ❷

답 $y=-1$

채점 기준	비율
❶ 직선이 주어진 이차함수의 그래프와 접하기 위한 조건을 이용하여 식을 세울 수 있다.	50 %
❷ 직선의 방정식을 구할 수 있다.	50 %

유형 **06** **이차함수의 최대, 최소** 본책 89쪽

(1) 이차함수 $f(x)$가 $x=p$에서 최솟값 또는 최댓값을 갖는다.
➡ $f(x)=a(x-p)^2+q$로 놓는다.
(2) 이차함수 $y=a(x-p)^2+q$는
① $a>0$일 때, $x=p$에서 최솟값 q를 갖는다.
② $a<0$일 때, $x=p$에서 최댓값 q를 갖는다.

0615 $y=\frac{1}{2}x^2-2x+k=\frac{1}{2}(x-2)^2-2+k$이므로 $x=2$에서 최솟값 $-2+k$를 갖는다.
$y=-2x^2-4x-3k=-2(x+1)^2+2-3k$이므로 $x=-1$에서 최댓값 $2-3k$를 갖는다.
따라서 $-2+k=2-3k$이므로

$k=1$ 답 1

0616 이차함수 $y=x^2+2ax+b$가 $x=-2$에서 최솟값 -8을 가지므로

$x^2+2ax+b=(x+2)^2-8$
$=x^2+4x-4$

따라서 $2a=4$, $b=-4$이므로 $\quad a=2$, $b=-4$

$\therefore a+b=-2$ 답 ②

0617 이차함수 $f(x)=ax^2+bx+c$가 $x=1$에서 최댓값 1을 가지므로 $\quad f(x)=a(x-1)^2+1$

$f(-1)=-7$에서 $\quad -7=a(-1-1)^2+1$

$4a=-8 \qquad \therefore a=-2$ ⋯ ❶

$\therefore f(x)=-2(x-1)^2+1=-2x^2+4x-1$ ⋯ ❷

따라서 $a=-2$, $b=4$, $c=-1$이므로

$2a+b+c=-1$ ⋯ ❸

답 -1

채점 기준	비율
❶ a의 값을 구할 수 있다.	60 %
❷ $f(x)$를 구할 수 있다.	20 %
❸ $2a+b+c$의 값을 구할 수 있다.	20 %

0618 $f(x)=2x^2-4x-3a+1=2(x-1)^2-3a-1$이므로 $f(x)$는 $x=1$에서 최솟값 $-3a-1$을 갖는다.
즉 $-3a-1\geq-4$이므로 $\quad -3a\geq-3$

$\therefore a\leq1$

$g(x)=-x^2-6x+2b-1=-(x+3)^2+2b+8$이므로 $g(x)$는 $x=-3$에서 최댓값 $2b+8$을 갖는다.
즉 $2b+8\le 2$이므로 $\quad 2b\le -6$
$\therefore b\le -3$
따라서 $a+b$는 $a=1$, $b=-3$일 때 최댓값 -2를 갖는다.

답 ①

0619 $y=x^2-2ax+4a-4=(x-a)^2-a^2+4a-4$
이므로 $x=a$에서 최솟값 $-a^2+4a-4$를 갖는다. ··· ❶
$\therefore m=-a^2+4a-4=-(a-2)^2$
따라서 m은 $a=2$에서 최댓값 0을 갖는다. ··· ❷

답 0

채점 기준	비율
❶ 주어진 이차함수의 최솟값을 구할 수 있다.	50 %
❷ m의 최댓값을 구할 수 있다.	50 %

0620 점 (a, b)가 이차함수 $y=x^2-4x+3$의 그래프 위의 점이므로 $\quad b=a^2-4a+3$

$$\begin{aligned}\therefore 3a^2-2b+1&=3a^2-2(a^2-4a+3)+1\\&=a^2+8a-5\\&=(a+4)^2-21\end{aligned}$$

따라서 구하는 최솟값은 -21이다.

답 -21

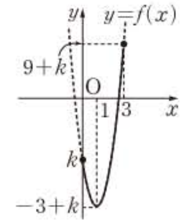
0621 조건 (나)에서 이차함수 $f(x)$의 최댓값이 4이므로 $f(x)=a(x-m)^2+4\ (a<0)$라 하자. 조건 (가)에서 $f(1)=2$이므로
$a(1-m)^2+4=2$, 즉 $a(1-m)^2=-2$ ······ ㉠
한편 조건 (다)의 방정식 $f(x)+10=0$에서
$a(x-m)^2+4+10=0$
즉 $ax^2-2amx+am^2+14=0$의 두 실근의 합이 6이므로
$\dfrac{2am}{a}=6 \qquad \therefore m=3$
$m=3$을 ㉠에 대입하면
$4a=-2 \qquad \therefore a=-\dfrac{1}{2}$
따라서 $f(x)=-\dfrac{1}{2}(x-3)^2+4$이므로 이차방정식 $-\dfrac{1}{2}(x-3)^2+4=0$, 즉 $x^2-6x+1=0$의 두 실근의 곱은 근과 계수의 관계에 의하여 1이다.
양변에 -2를 곱하면
$(x-3)^2-8=0$
$\therefore x^2-6x+1=0$

답 ①

유형 07 제한된 범위에서의 이차함수의 최대, 최소 본책 90쪽

$\alpha\le x\le\beta$에서 이차함수 $f(x)=a(x-p)^2+q$의 최댓값과 최솟값은
① $\alpha\le p\le\beta$일 때
⇒ $f(\alpha)$, $f(\beta)$, q 중 가장 큰 값이 최댓값, 가장 작은 값이 최솟값이다.
② $p<\alpha$ 또는 $p>\beta$일 때
⇒ $f(\alpha)$, $f(\beta)$ 중 큰 값이 최댓값, 작은 값이 최솟값이다.

0622 $f(x)=3x^2-6x+k$
$=3(x-1)^2-3+k$
이므로 $0\le x\le 3$에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



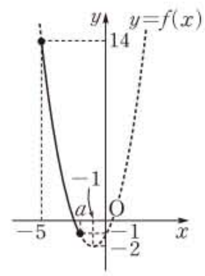
$x=3$에서 최댓값 $9+k$를 가지므로
$9+k=4 \qquad \therefore k=-5$
따라서 $f(x)$의 최솟값은
$-3+(-5)=-8$

답 ①

0623 $y=-2x^2+4x+a=-2(x-1)^2+2+a$
$-2\le x\le 1$에서 $x=1$일 때 최댓값은 $a+2$이고, $x=-2$일 때 최솟값은 $a-16$이다.
따라서 구하는 차는
$(a+2)-(a-16)=18$

답 ⑤

0624 $f(x)=x^2+2x-1=(x+1)^2-2$
라 하면 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, $f(-1)=-2$이므로



$a<-1$
$a\ge -1$이면 $f(x)$의 최솟값은 -2이다.
$f(-5)=14$이므로 $f(x)$는 $x=-5$에서 최댓값을 갖고, $x=a$에서 최솟값을 갖는다.
따라서 $f(a)=-1$이므로
$a^2+2a-1=-1, \qquad a^2+2a=0$
$a(a+2)=0 \qquad \therefore a=-2\ (\because a<-1)$

답 -2

0625 $f(x)=ax^2-4ax+b=a(x-2)^2-4a+b$라 하면
(i) $a>0$일 때,
$f(x)$는 $x=-1$에서 최댓값 4를 갖고, $x=1$에서 최솟값 2를 가지므로
$f(-1)=5a+b=4$,
$f(1)=-3a+b=2$
위의 두 식을 연립하여 풀면 $\quad a=\dfrac{1}{4}$, $b=\dfrac{11}{4}$
$\therefore a+b=3$ ··· ❶
(ii) $a<0$일 때,
$f(x)$는 $x=-1$에서 최솟값 2를 갖고, $x=1$에서 최댓값 4를 가지므로
$f(-1)=5a+b=2$,
$f(1)=-3a+b=4$
위의 두 식을 연립하여 풀면 $\quad a=-\dfrac{1}{4}$, $b=\dfrac{13}{4}$
$\therefore a+b=3$ ··· ❷
(i), (ii)에서 $\quad a+b=3$ ··· ❸

답 3

채점 기준	비율
❶ $a>0$일 때, $a+b$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ $a<0$일 때, $a+b$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	20 %

0626 $y=-x^2+2kx=-(x-k)^2+k^2$

(i) $k<3$일 때, 꼭짓점의 x좌표가 주어진 범위에 속하지 않는다.

주어진 함수는 $x=3$에서 최댓값 $6k-9$를 가지므로

$6k-9=15 \qquad \therefore k=4$

이때 $k<3$이므로 조건을 만족시키는 k의 값은 존재하지 않는다.

(ii) $k\ge3$일 때, 꼭짓점의 x좌표가 주어진 범위에 속한다.

주어진 함수는 $x=k$에서 최댓값 k^2을 가지므로

$k^2=15 \qquad \therefore k=\pm\sqrt{15}$

이때 $k\ge3$이므로 $\quad k=\sqrt{15}$

(i), (ii)에서 $\quad k=\sqrt{15}$

답 $\sqrt{15}$

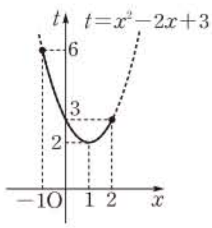
유형 08 공통부분이 있는 함수의 최대, 최소
본책 91쪽

함수 $y=\{f(x)\}^2+af(x)+b$의 최댓값과 최솟값은 다음과 같은 순서로 구한다.
(i) $f(x)=t$로 놓고 t의 값의 범위를 구한다.
(ii) $y=t^2+at+b$를 $y=(t-p)^2+q$ 꼴로 변형한다.
(iii) (i)의 범위에서 최댓값 또는 최솟값을 구한다.

0627 $x^2-2x+3=t$로 놓으면

$t=(x-1)^2+2$

$-1\le x\le2$이므로 오른쪽 그림에서



$2\le t\le6$

이때 주어진 함수는

$y=t^2-2t-4$

$=(t-1)^2-5\ (2\le t\le6)$

따라서 $t=2$일 때 최솟값은 -4이고, $t=6$일 때 최댓값은 20이므로 최댓값과 최솟값의 합은

$20+(-4)=16$

답 ②

0628 $x^2+4x=t$로 놓으면

$t=(x+2)^2-4\ge-4$

이때 주어진 함수는

$y=t^2-2t-5=(t-1)^2-6\ (t\ge-4)$

따라서 $t=1$일 때 최솟값은 -6이다.

답 -6

0629 $x^2-6x+7=t$로 놓으면

$t=(x-3)^2-2\ge-2$

이때 주어진 함수는

$y=-2t^2+4(t-7)+k+20$

$=-2t^2+4t+k-8$

$=-2(t-1)^2+k-6\ (t\ge-2)$

따라서 $t=1$일 때 최댓값 $k-6$을 가지므로

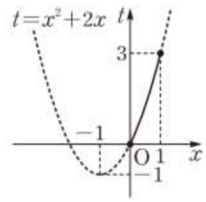
$k-6=2 \qquad \therefore k=8$

답 ④

0630 $x^2+2x=t$로 놓으면

$t=(x+1)^2-1$

$0\le x\le1$이므로 오른쪽 그림에서



$0\le t\le3$

이때 주어진 함수는

$y=t^2+4t=(t+2)^2-4\ (0\le t\le3)$

따라서 $t=0$일 때 최솟값은 0이고, $t=3$일 때 최댓값은 21이다. ··· ❶

즉 $M=21$, $m=0$이므로

$M-m=21$ ··· ❷

답 21

채점 기준	비율
❶ 주어진 함수의 최댓값과 최솟값을 구할 수 있다.	70 %
❷ $M-m$의 값을 구할 수 있다.	30 %

0631 (i) $x<0$일 때,

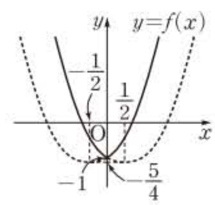
$f(x)=x^2-x-1=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{4}$

(ii) $x\ge0$일 때,

$f(x)=x^2+x-1$

$=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{4}$

(i), (ii)에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



$\therefore f(x)\ge-1$

$y=\{f(x)\}^2+4f(x)+5$에서 $f(x)=t$로 놓으면

$y=t^2+4t+5=(t+2)^2+1\ (t\ge-1)$

따라서 $t=-1$, 즉 $f(x)=-1$일 때 y의 최솟값은 2이다.

답 2

유형 09 완전제곱식을 이용한 이차식의 최대, 최소
본책 91쪽

x, y가 실수일 때, $ax^2+by^2+cx+dy+e$의 최댓값과 최솟값은
➡ $a(x-m)^2+b(y-n)^2+k$ 꼴로 변형한 후 (실수)$^2\ge0$임을 이용한다.
➡ $x=m$, $y=n$일 때, 최댓값 또는 최솟값은 k이다.

0632 $2x^2-4x+y^2+6y+16=2(x-1)^2+(y+3)^2+5$

이때 x, y가 실수이므로 $\qquad (x-1)^2\ge0$, $(y+3)^2\ge0$

$\therefore 2x^2-4x+y^2+6y+16\ge5$

따라서 주어진 식의 최솟값은 5이다.

답 ⑤

0633 $-x^2-y^2+10x-10=-(x-5)^2-y^2+15$

이때 x, y가 실수이므로 $\qquad (x-5)^2\ge0$, $y^2\ge0$ $\quad -(x-5)^2\le0$, $-y^2\le0$

$\therefore -x^2-y^2+10x-10\le15$

따라서 주어진 식은 $x=5$, $y=0$에서 최댓값 15를 가지므로

$\alpha=5$, $\beta=0$, $\gamma=15$

$\therefore \alpha+\beta+\gamma=20$

답 ⑤

0634 $x^2+2y^2+3z^2+4x-4y+6z-4$

$=(x+2)^2+2(y-1)^2+3(z+1)^2-13$

이때 x, y, z가 실수이므로

$(x+2)^2\ge0$, $(y-1)^2\ge0$, $(z+1)^2\ge0$

$\therefore x^2+2y^2+3z^2+4x-4y+6z-4\ge-13$

따라서 주어진 식의 최솟값은 -13이다. 답 ①

0635 $x^2-x=t$로 놓으면

$(x^2-x)^2-2(x^2-x)y+2y^2-8y+k$

$=t^2-2ty+2y^2-8y+k$

$=(t-y)^2+(y-4)^2+k-16$

이때 t, y가 실수이므로

$(t-y)^2\ge0$, $(y-4)^2\ge0$

$\therefore (t-y)^2+(y-4)^2+k-16\ge k-16$

따라서 $k-16=5$이므로 $k=21$ 답 21

유형 10 조건을 만족시키는 이차식의 최대, 최소

본책 92쪽

등식이 조건으로 주어진 이차식의 최댓값과 최솟값은 다음과 같은 순서로 구한다.

(i) 주어진 등식에서 한 문자를 다른 문자에 대한 식으로 나타낸다.

(ii) (i)의 식을 이차식에 대입하여 한 문자에 대한 이차식으로 나타낸다.

(iii) (ii)의 식에서 최댓값 또는 최솟값을 구한다.

0636 $x-y+4=0$에서 $x=y-4$

$\therefore x^2+y^2-4y=(y-4)^2+y^2-4y$

$=2y^2-12y+16$

$=2(y-3)^2-2$

따라서 $y=3$일 때 최솟값은 -2이다. 답 ②

0637 점 $\mathrm{P}(a, b)$가 직선 $2x+y+3=0$ 위에 있으므로

$2a+b+3=0$ $\therefore b=-2a-3$

$\therefore 2a^2+b^2=2a^2+(-2a-3)^2$

$=6a^2+12a+9$

$=6(a+1)^2+3$

따라서 $a=-1$일 때 최솟값은 3이다. 답 ⑤

0638 $a-2b=3$에서 $b=\frac{1}{2}a-\frac{3}{2}$ ··· ❶

$\therefore ab=a\left(\frac{1}{2}a-\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{2}a^2-\frac{3}{2}a$

$=\frac{1}{2}\left(a-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{8}$ ··· ❷

이때 $-2\le a\le1$이므로 $a=-2$일 때 최댓값은 5, $a=1$일 때 최솟값은 -1이다.

따라서 구하는 합은 $5+(-1)=4$ ··· ❸

답 4

채점 기준	비율
❶ b를 a에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	20 %
❷ ab를 a에 대한 이차식으로 나타낼 수 있다.	40 %
❸ ab의 최댓값과 최솟값의 합을 구할 수 있다.	40 %

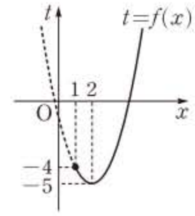
0639 $x-2y^2=1$에서 $2y^2=x-1$ ······ ㉠

이때 y가 실수이므로 $2y^2=x-1\ge0$ $\therefore x\ge1$

㉠을 x^2+2y^2-5x에 대입하면

$x^2+2y^2-5x=x^2+x-1-5x=(x-2)^2-5$

$f(x)=(x-2)^2-5$라 하면 $x\ge1$에서 함수 $t=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $f(x)$는 $x=2$일 때 최솟값 -5를 갖는다.



즉 x^2+2y^2-5x의 최솟값은 -5이다.

답 -5

0640 이차방정식 $x^2-2(a+3)x+a^2-a+2=0$이 서로 다른 두 실근을 가지므로 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=\{-(a+3)\}^2-(a^2-a+2)>0$

$7a+7>0$ $\therefore a>-1$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2(a+3)$, $\alpha\beta=a^2-a+2$

$\therefore (\alpha+1)(\beta+1)=\alpha\beta+\alpha+\beta+1$

$=a^2-a+2+2(a+3)+1$

$=a^2+a+9$

$=\left(a+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{35}{4}$

따라서 $a>-1$에서 $(\alpha+1)(\beta+1)$은 $a=-\frac{1}{2}$일 때 최솟값 $\frac{35}{4}$를 갖는다. 답 ②

0641 두 점 $\mathrm{A}(1, 1)$, $\mathrm{B}(4, -5)$를 이은 선분 AB를 나타내는 방정식은

$y-1=\frac{-5-1}{4-1}(x-1)$ $\therefore y=-2x+3$ $(1\le x\le4)$

$\therefore 2x^2-y^2=2x^2-(-2x+3)^2$

$=-2x^2+12x-9$

$=-2(x-3)^2+9$

따라서 $x=3$일 때 최댓값은 9이다. 답 9

유형 11 이차함수의 최대, 최소의 활용

본책 93쪽

이차함수의 최대, 최소의 활용 문제를 풀 때에는 다음과 같은 순서로 한다.

(i) 주어진 상황을 한 문자에 대한 이차식으로 나타내고 문자의 값의 범위를 구한다.

(ii) (i)에서 구한 이차식을 완전제곱식을 포함한 식으로 변형한다.

(iii) (i)의 범위에서 최댓값 또는 최솟값을 구한다.

0642 점 B의 좌표를 $(a, 0)$ $(0<a<\sqrt{3})$이라 하면

$y=-x^2+3$의 그래프가 $x>0$인 부분에서 x축과 만나는 점의 x좌표

$\mathrm{C}(a, -a^2+3)$

$\therefore \overline{\mathrm{AB}}=2a$, $\overline{\mathrm{BC}}=-a^2+3$

따라서 직사각형 ABCD의 둘레의 길이는

$2(-a^2+2a+3)=-2a^2+4a+6$

$=-2(a-1)^2+8$

이때 $0<a<\sqrt{3}$이므로 $a=1$일 때 최댓값은 8이다.

따라서 직사각형 ABCD의 둘레의 길이의 최댓값은 8이다.

답 ②

0643 $h=-5t^2+4t+3=-5\left(t-\frac{2}{5}\right)^2+\frac{19}{5}$

따라서 $t=\frac{2}{5}$일 때 최댓값은 $\frac{19}{5}$이므로 구하는 높이는 $\frac{19}{5}$ m이다.

답 $\frac{19}{5}$ m

0644 귤 한 개의 가격이 $(300-x)$원일 때 하루 판매량은 $(100+x)$개이므로 하루 판매액을 y원이라 하면

$$y=(300-x)(100+x)$$
$$=-x^2+200x+30000$$
$$=-(x-100)^2+40000$$

따라서 $x=100$일 때 y는 최대이고, 이때의 귤 한 개의 가격은 $300-100=200$(원)이다.

답 200원

0645 직각을 낀 한 변의 길이를 x m라 하면 다른 한 변의 길이는 $(80-x)$ m이다.

이때 변의 길이는 양수이므로 $0<x<80$

가축우리의 넓이는

$$\frac{1}{2}x(80-x)=-\frac{1}{2}(x^2-80x)$$
$$=-\frac{1}{2}(x-40)^2+800$$

이때 $0<x<80$이므로 $x=40$일 때 최댓값은 800이다.

따라서 가축우리의 넓이의 최댓값은 800 m^2이다.

답 ③

0646 $\overline{AP}=\overline{BQ}=\overline{CR}=\overline{DS}=x$라 하면

$\overline{BP}=\overline{DR}=12-x$, $\overline{CQ}=\overline{AS}=16-x$

이때 변의 길이는 양수이므로 $0<x<12$

□PQRS의 넓이는

$$12\cdot16-2\cdot\frac{1}{2}x(12-x)-2\cdot\frac{1}{2}x(16-x)$$
$$=2x^2-28x+192$$
$$=2(x-7)^2+94$$

이때 $0<x<12$이므로 $x=7$일 때 최솟값은 94이다.

따라서 □PQRS의 넓이의 최솟값은 94이다.

답 ③

0647 $\overline{BF}=a$, $\overline{EB}=b$라 하면 △ABC∽△DFC (AA 닮음)이므로

$20:b=10:(10-a)$ $\therefore b=20-2a$

이때 변의 길이는 양수이므로 $0<a<10$

□DEBF의 넓이는

$ab=a(20-2a)=-2(a-5)^2+50$ ⋯ ❶

이때 $0<a<10$이므로 $a=5$일 때 최댓값은 50이다.

따라서 $a=5$일 때 $b=10$이므로 구하는 둘레의 길이는

$2(a+b)=2\cdot(5+10)=30$ ⋯ ❷

답 30

채점 기준	비율
❶ □DEBF의 넓이를 이차식으로 나타낼 수 있다.	50 %
❷ □DEBF의 넓이가 최대일 때, □DEBF의 둘레의 길이를 구할 수 있다.	50 %

0648 전략 이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축의 교점의 개수는 이차방정식 $f(x)=0$의 실근의 개수와 같음을 이용한다.

풀이 ㄱ. 이차방정식 $x^2-5x+7=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$$D_1=(-5)^2-4\cdot7=-3<0$$

이므로 $y=f(x)$의 그래프는 x축과 만나지 않는다.

ㄴ. 이차방정식 $f(x)-n=0$, 즉 $x^2-5x+7-n=0$의 판별식을 D_2라 하면

$$D_2=(-5)^2-4(7-n)=4n-3$$

이때 모든 자연수 n에 대하여 $4n-3>0$, 즉 $D_2>0$이므로 이차함수 $y=f(x)-n$의 그래프는 x축과 서로 다른 두 점에서 만난다.

ㄷ. 이차방정식 $f(x)-k=0$, 즉 $x^2-5x+7-k=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=5$$

따라서 $\alpha+\beta$의 값은 k의 값에 관계없이 항상 일정하다.

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

답 ⑤

0649 전략 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축에 접하면 이차방정식 $f(x)=0$은 중근을 가짐을 이용한다.

풀이 이차방정식 $x^2+2ax-b^2-2a+6b-10=0$의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=a^2-(-b^2-2a+6b-10)=0$$

$$a^2+b^2+2a-6b+10=0, \quad (a+1)^2+(b-3)^2=0$$

이때 a, b는 실수이므로

$$a+1=0,\ b-3=0$$

따라서 $a=-1$, $b=3$이므로 $a+b=2$

답 ⑤

SSEN 특강 실수의 성질

두 실수 a, b에 대하여 $a^2+b^2=0$이면 $a=0$, $b=0$

0650 전략 $f(x)=g(x)$와 $f(x)=-g(x)$인 경우로 나누어 방정식을 푼다.

풀이 방정식 $|f(x)|=|g(x)|$에서

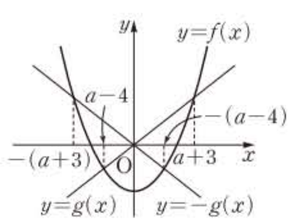
(i) $f(x)=g(x)$일 때,

이 방정식의 실근은 이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=g(x)$의 교점의 x좌표와 같으므로

$x=a-4$ 또는 $x=a+3$ ⋯ ❶

(ii) $f(x)=-g(x)$일 때,

이 방정식의 실근은 직선 $y=-g(x)$와 이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 교점의 x좌표와 같으므로 오른쪽 그림에서



$x=-(a+3)$ 또는

$x=-(a-4)$

$\therefore x=-a-3$ 또는 $x=-a+4$ ⋯ ❷

(i), (ii)에서 방정식 $|f(x)|=|g(x)|$를 만족시키는 서로 다른 모든 실근의 제곱의 합은

$$(-a-3)^2+(a-4)^2+(-a+4)^2+(a+3)^2$$
$$=2(a+3)^2+2(a-4)^2$$
$$=2(a^2+6a+9)+2(a^2-8a+16)$$
$$=4a^2-4a+50$$

즉 $4a^2-4a+50=60$이므로 $\quad 2a^2-2a-5=0$

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 모든 실수 a의 값의 곱은 $\quad -\frac{5}{2}$ ⋯ ❸

답 $-\frac{5}{2}$

채점 기준	비율
❶ 방정식 $f(x)=g(x)$의 실근을 구할 수 있다.	20 %
❷ 방정식 $f(x)=-g(x)$의 실근을 구할 수 있다.	40 %
❸ 모든 실수 a의 값의 곱을 구할 수 있다.	40 %

0651 전략 두 이차함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 일차함수 $y=h(x)$의 그래프와 접하는 점의 x좌표를 이용하여 함수 $f(x)$, $g(x)$의 식을 구한다.

풀이 두 함수 $y=f(x)$, $y=h(x)$의 그래프가 접하는 점의 x좌표가 α이므로 이차방정식 $f(x)-h(x)=0$은 $x=\alpha$인 중근을 갖는다. 이때 이차함수 $y=f(x)$의 x^2의 계수는 1이므로

$$f(x)-h(x)=(x-\alpha)^2, \text{ 즉 } f(x)=(x-\alpha)^2+h(x)$$

또 두 함수 $y=g(x)$, $y=h(x)$의 그래프가 접하는 점의 x좌표가 β이므로 이차방정식 $g(x)-h(x)=0$은 $x=\beta$인 중근을 갖는다. 이때 이차함수 $y=g(x)$의 x^2의 계수는 4이므로

$$g(x)-h(x)=4(x-\beta)^2, \text{ 즉 } g(x)=4(x-\beta)^2+h(x)$$

$\alpha:\beta=1:2$에서 $\beta=2\alpha$이고 두 이차함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 만나는 점의 x좌표를 t라 하면 $f(t)=g(t)$이므로

$$(t-\alpha)^2+h(t)=4(t-2\alpha)^2+h(t)$$
$$3t^2-14\alpha t+15\alpha^2=0, \qquad (3t-5\alpha)(t-3\alpha)=0$$

이때 $\alpha<t<\underbrace{2\alpha}_{\beta}$이므로 $\qquad t=\frac{5}{3}\alpha$

$$\therefore \frac{t}{\alpha}=\frac{5}{3}$$

답 ④

0652 전략 이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=g(x)$의 교점의 x좌표는 방정식 $f(x)=g(x)$의 실근과 같음을 이용한다.

풀이 $f(x)=a(x-1)(x-4)\ (a<0)$라 하자.

$y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{2}x$가 접하므로 방정식 $a(x-1)(x-4)=\frac{1}{2}x$, 즉 $ax^2-\left(5a+\frac{1}{2}\right)x+4a=0$의 판별식을 D라 하면

$$D=\left(5a+\frac{1}{2}\right)^2-16a^2=0, \text{ 즉 } 5a+\frac{1}{2}=\pm4a$$

근의 공식에 의하여 방정식 $ax^2-\left(5a+\frac{1}{2}\right)x+4a=0$의 근은

$$x=\frac{5a+\frac{1}{2}}{2a}=\frac{\pm4a}{2a}=\pm2$$

이고 중근이 양수이므로 $\qquad x=2$

즉 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{2}x$는 점 $(2, 1)$에서 접하므로

$f(2)=1$에서 $\qquad -2a=1 \qquad \therefore a=-\frac{1}{2}$

$$\therefore f(x)=-\frac{1}{2}(x-1)(x-4)$$

방정식 $f(x)=\frac{1}{4}x$에서 $\qquad -\frac{1}{2}(x-1)(x-4)=\frac{1}{4}x$

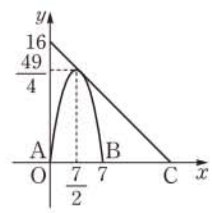
$$(x-1)(x-4)=-\frac{1}{2}x, \qquad x^2-\frac{9}{2}x+4=0$$

따라서 이 이차방정식의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=\frac{9}{2}$$

답 $\frac{9}{2}$

0653 전략 조형물을 좌표평면 위에 놓고, 조형물의 모양을 나타내는 이차함수의 식을 구한다.



풀이 오른쪽 그림과 같이 직선 AB를 x축, 조명을 y축이라 하자.

조형물의 모양을 나타내는 이차함수의 식을 $y=ax(x-7)\ (0\le x\le 7)$이라 하면 이 그래프가 점 $\left(\frac{7}{2}, \frac{49}{4}\right)$를 지나므로

$$a\cdot\frac{7}{2}\cdot\left(-\frac{7}{2}\right)=\frac{49}{4}$$
$$\therefore a=-1$$

즉 조형물의 모양을 나타내는 이차함수의 식은

$$y=-x(x-7)$$
$$=-x^2+7x\ (0\le x\le 7)$$

이때 조형물에 접하는 불빛이 나타내는 직선의 방정식을 $y=mx+16\ (m<0)$이라 하고 이차방정식 $-x^2+7x=mx+16$, 즉 $x^2+(m-7)x+16=0$의 판별식을 D라 하면

$$D=(m-7)^2-4\cdot16=0$$
$$m^2-14m-15=0, \qquad (m+1)(m-15)=0$$
$$\therefore m=-1\ (\because m<0)$$

따라서 조형물에 접하는 불빛이 나타내는 직선의 방정식은 $y=-x+16$이고 이 직선의 x절편은 16이므로 두 지점 A, C 사이의 거리는 16 m이다.

답 16 m

0654 전략 두 점 A, B를 지나는 직선과 평행하고 주어진 이차함수의 그래프에 접하는 직선의 방정식을 구한다.

풀이 두 점 A, B를 지나는 직선과 평행한 직선이 점 C에서 이차함수 $y=-x^2+6x-5$의 그래프에 접할 때 △ABC의 넓이는 최대가 된다.

두 점 A, B를 지나는 직선의 기울기는 $\frac{3-0}{4-1}=1$이므로 기울기가 1이고 이차함수의 그래프에 접하는 직선의 방정식을 $y=x+k$라 하자.

방정식 $-x^2+6x-5=x+k$, 즉 $x^2-5x+k+5=0$의 판별식을 D라 하면

$$D=(-5)^2-4(k+5)=0$$
$$-4k+5=0 \qquad \therefore k=\frac{5}{4}$$

즉 직선의 방정식은 $y=x+\frac{5}{4}$이다.

방정식 $x^2-5x+\frac{5}{4}+5=0$에서 $\quad 4x^2-20x+25=0$

$(2x-5)^2=0 \quad \therefore x=\frac{5}{2}$

따라서 $a=\frac{5}{2}$, $\underbrace{b=\frac{5}{2}+\frac{5}{4}}_{}=\frac{15}{4}$이므로
└ 점 C(a, b)는 직선 $y=x+\frac{5}{4}$ 위의 점이다.

$\frac{b}{a}=\frac{15}{4}\cdot\frac{2}{5}=\frac{3}{2}$

답 ③

0655 **전략** 먼저 함수 $y=f(x)$의 그래프의 축의 방정식을 구한다.

풀이 조건 (가)에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=1$에 대하여 대칭이므로 $f(x)=a(x-1)^2+b$로 놓을 수 있다.

(i) $a>0$일 때,

조건 (나)에서 $f(3)=4$, $f(1)=0$이므로

$4a+b=4$, $b=0$

$\therefore a=1$, $b=0$

$\therefore f(x)=(x-1)^2$

이때 함수 $y=(x-1)^2$의 그래프는 직선 $y=-1$과 만나지 않으므로 조건 (다)를 만족시키지 않는다.

(ii) $a<0$일 때,

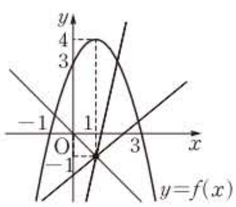
조건 (나)에서 $f(1)=4$, $f(3)=0$이므로

$b=4$, $4a+b=0$

$\therefore a=-1$, $b=4$

$\therefore f(x)=-(x-1)^2+4$

이때 함수 $y=-(x-1)^2+4$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 점 $(1, -1)$을 지나는 직선과 항상 만난다.



(i), (ii)에서 $f(x)=-(x-1)^2+4$이므로

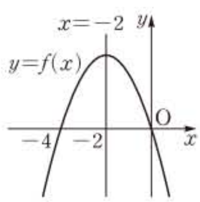
$f(4)=-5$

답 ①

0656 **전략** 이차함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\le f(-2)$이면 함수 $f(x)$의 그래프는 위로 볼록하고, $x=-2$일 때 최댓값을 갖는다.

풀이 ㄱ. 조건 (나)에서 이차함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\le f(-2)$이므로 함수 $f(x)$의 그래프는 위로 볼록하고, $x=-2$일 때 최댓값을 갖는다.

따라서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 직선 $x=-2$를 대칭축으로 하고 조건 (가)에서 $f(-4)=0$이므로



$f(0)=0$

ㄴ. $-1\le x\le 1$에서 함수 $f(x)$의 최솟값은 $f(1)$이다.

ㄷ. $f(x)=ax(x+4)\,(a<0)$라 하면

(i) $p=-3$일 때, ┌ $f(p)=f(p+2)$를 만족시키는 p의 값이 -3이다.

$f(p)=f(p+2)$이므로

$g(p)=f(p)$

(ii) $p<-3$일 때,

$f(p)<f(p+2)$이므로

$g(p)=f(p)$

(iii) $p>-3$일 때,

$f(p)>f(p+2)$이므로

$g(p)=f(p+2)$

이상에서

$$g(p)=\begin{cases} f(p) & (p\le -3) \\ f(p+2) & (p>-3) \end{cases}$$

$p\le -3$인 모든 p에 대하여 $g(p)\le f(-3)$이고 $p>-3$인 모든 p에 대하여 $g(p)<f(-3)$이므로 $g(p)$의 최댓값은 $f(-3)$이다.

즉 $f(-3)=1$이므로

$-3a=1 \quad \therefore a=-\frac{1}{3}$

따라서 $f(x)=-\frac{1}{3}x(x+4)$이므로

$f(-2)=\frac{4}{3}$

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

답 ⑤

0657 **전략** 이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 축의 방정식을 구한 후 주어진 x의 값의 범위에서 함숫값을 비교한다.

풀이 (1) 이차함수 $f(x)=ax^2-x+\frac{1}{4}$의 그래프가 x축과 만나므로 방정식 $ax^2-x+\frac{1}{4}=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(-1)^2-4\cdot a\cdot\frac{1}{4}\ge 0$

$1-a\ge 0 \quad \therefore a\le 1$

그런데 $a>0$이므로

$0<a\le 1$ ··· ❶

(2) $f(x)=ax^2-x+\frac{1}{4}=a\left(x-\frac{1}{2a}\right)^2+\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{a}\right)$

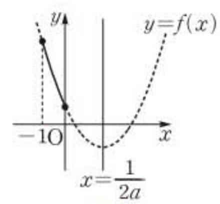
이므로 축의 방정식은

$x=\frac{1}{2a}$ ··· ❷

(3) $0<a\le 1$이므로 $\quad 0<2a\le 2$

$\therefore \frac{1}{2a}\ge\frac{1}{2}$

따라서 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같으므로 $x=-1$일 때 최댓값은 $a+\frac{5}{4}$이고, $x=0$일 때 최솟값은 $\frac{1}{4}$이다. ··· ❸



답 풀이 참조

채점 기준	비율
❶ a의 값의 범위를 구할 수 있다.	30 %
❷ 축의 방정식을 구할 수 있다.	20 %
❸ $f(x)$의 최댓값과 최솟값을 구할 수 있다.	50 %

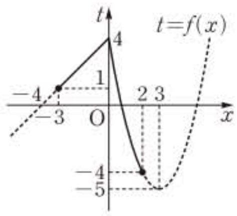
0658 **전략** 함수 $f(x)$의 그래프를 그린 후 $-3\le x\le 2$에서 $f(x)$의 값의 범위를 구한다.

풀이 $x\ge0$에서 $\quad f(x)=(x-3)^2-5$

$f(x)=t$로 놓으면 $-3\le x\le2$이므로

오른쪽 그림에서

$\quad -4\le t\le4$



이때 함수 $h(x)$는

$$h(x)=t^2-2t-1$$
$$=(t-1)^2-2\ (-4\le t\le4)$$

따라서 함수 $h(x)$는 $t=-4$일 때 최댓값 23을 가지므로

$\quad M=23$

$t=-4$, 즉 $f(x)=-4$일 때 $x=2$이므로

$\quad k=2$

$\quad \therefore M-k=21$

답 21

0659 **전략** 점 $P(a,\ b)$는 함수 $y=x^2-3x+2$의 그래프 위의 점임을 이용하여 $a+b+3$을 a에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 점 A는 주어진 이차함수의 그래프와 y축의 교점이므로

$\quad A(0,\ 2)$

두 점 B, C는 주어진 이차함수의 그래프와 x축의 교점이므로

$\quad x^2-3x+2=0,\qquad (x-1)(x-2)=0$

$\quad \therefore x=1$ 또는 $x=2$

$\quad \therefore B(1,\ 0),\ C(2,\ 0)$

점 $P(a,\ b)$가 이차함수 $y=x^2-3x+2$의 그래프 위의 점이므로

$\quad b=a^2-3a+2 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

이때 점 P가 점 $A(0,\ 2)$에서 점 $C(2,\ 0)$까지 움직이므로

$\quad 0\le a\le2$

㉠을 $a+b+3$에 대입하면

$$a+b+3=a+(a^2-3a+2)+3=a^2-2a+5$$
$$=(a-1)^2+4\ (0\le a\le2)$$

따라서 $a=0$ 또는 $a=2$일 때 최댓값은 5이고, $a=1$일 때 최솟값은 4이므로 구하는 합은

$\quad 5+4=9$

답 9

0660 **전략** 주어진 식을 x에 대한 식으로 나타내어 최댓값을 구한다.

풀이 $(\sqrt{17+3x}+\sqrt{11+4y})^2$

$$=28+3x+4y+2\sqrt{(17+3x)(11+4y)}$$

이때 $3x+4y=8$에서 $4y=8-3x$이므로

$$(\text{주어진 식})=28+8+2\sqrt{(17+3x)(19-3x)}$$
$$=36+2\sqrt{-9x^2+6x+323}$$
$$=36+2\sqrt{-9\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+324} \quad \cdots ❶$$

따라서 $x=\frac{1}{3}$일 때 최댓값은

$$36+2\sqrt{324}=36+2\cdot18=72 \quad \cdots ❷$$

답 72

채점 기준	비율
❶ 주어진 식을 x에 대한 식으로 변형할 수 있다.	80 %
❷ 최댓값을 구할 수 있다.	20 %

0661 **전략** $\overline{BQ}=x$로 놓고, $\overline{PR}$, $\overline{PQ}$, $\overline{QC}$의 길이를 x에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 $\overline{BQ}=x$라 하면 $\qquad \overline{PQ}=x,\ \overline{BP}=\sqrt{2}x$

$\overline{AB}=6$이므로 $\qquad \overline{AP}=6-\sqrt{2}x$

또 $\overline{PR}=\sqrt{2}(6-\sqrt{2}x)=6\sqrt{2}-2x$이고

$\quad \overline{QC}=\overline{BC}-\overline{BQ}=6\sqrt{2}-x$

이므로 □PQCR의 넓이는

$$\frac{1}{2}x(6\sqrt{2}-2x+6\sqrt{2}-x)=6\sqrt{2}x-\frac{3}{2}x^2$$
$$=-\frac{3}{2}(x-2\sqrt{2})^2+12$$

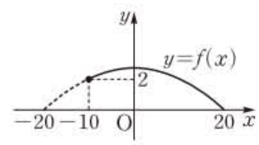
이때 $0<x<3\sqrt{2}$이므로 $x=2\sqrt{2}$일 때 최댓값은 12이다.

따라서 □PQCR의 넓이의 최댓값은 12이다.

답 12

0662 **전략** 물 로켓이 날아가는 모양을 좌표평면 위에 놓고 이차함수의 식을 구한다.

풀이 주어진 그림을 오른쪽 그림과 같이 좌표평면 위에 놓고, 물 로켓이 날아가는 모양의 이차함수의 식을 $y=f(x)$라 하면 축의 방정식은 $x=0$, x절편은 -20, 20이므로



$\quad f(x)=a(x+20)(x-20)\ (a<0)$

이라 하자. $\cdots$ ❶

함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 $(-10,\ 2)$를 지나므로

물 로켓을 발사한 위치

$\quad -300a=2 \qquad \therefore a=-\frac{1}{150} \quad \cdots$ ❷

$f(x)=-\frac{1}{150}(x+20)(x-20)=-\frac{1}{150}x^2+\frac{8}{3}$이므로 $x=0$일 때 최댓값은 $\frac{8}{3}$이다.

따라서 물 로켓의 지면으로부터의 최고 높이는 $\frac{8}{3}$ m이다. $\cdots$ ❸

답 $\frac{8}{3}$ m

채점 기준	비율
❶ 이차함수의 식을 세울 수 있다.	30 %
❷ a의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ 지면으로부터의 최고 높이를 구할 수 있다.	40 %

Ⅱ. 방정식

06 여러 가지 방정식

0663 $x^3-8=0$의 좌변을 인수분해하면

$(x-2)(x^2+2x+4)=0$

$\therefore$ $x=2$ 또는 $x=-1\pm\sqrt{3}i$

답 $x=2$ 또는 $x=-1\pm\sqrt{3}i$

0664 $x^3+4x^2-x-4=0$의 좌변을 인수분해하면

$x^2(x+4)-(x+4)=0,\quad (x+4)(x^2-1)=0$

$(x+4)(x+1)(x-1)=0$

$\therefore$ $x=-4$ 또는 $x=-1$ 또는 $x=1$

답 $x=-4$ 또는 $x=-1$ 또는 $x=1$

0665 $x^4-27x=0$의 좌변을 인수분해하면

$x(x^3-27)=0,\quad x(x-3)(x^2+3x+9)=0$

$\therefore$ $x=0$ 또는 $x=3$ 또는 $x=\dfrac{-3\pm3\sqrt{3}i}{2}$

답 $x=0$ 또는 $x=3$ 또는 $x=\dfrac{-3\pm3\sqrt{3}i}{2}$

0666 $x^4-x^3+x-1=0$의 좌변을 인수분해하면

$x^3(x-1)+(x-1)=0,\quad (x^3+1)(x-1)=0$

$(x+1)(x-1)(x^2-x+1)=0$

$\therefore$ $x=-1$ 또는 $x=1$ 또는 $x=\dfrac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$

답 $x=-1$ 또는 $x=1$ 또는 $x=\dfrac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$

0667 $P(x)=x^3-2x^2+1$이라 하면

$P(1)=1-2+1=0$

조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ & & 1 & -1 & -1 \\ \hline & 1 & -1 & -1 & \boxed{0} \end{array}$$

$P(x)=(x-1)(x^2-x-1)$

따라서 주어진 방정식은

$(x-1)(x^2-x-1)=0$

$\therefore$ $x=1$ 또는 $x=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$

답 $x=1$ 또는 $x=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$

SSEN 특강 인수정리

다항식 $P(x)$에 대하여 $P(\alpha)=0$이면 $P(x)$는 일차식 $x-\alpha$로 나누어떨어진다.

0668 $P(x)=2x^3-x^2-3x+2$라 하면

$P(1)=2-1-3+2=0$

조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 2 & -1 & -3 & 2 \\ & & 2 & 1 & -2 \\ \hline & 2 & 1 & -2 & \boxed{0} \end{array}$$

$P(x)=(x-1)(2x^2+x-2)$

따라서 주어진 방정식은

$(x-1)(2x^2+x-2)=0$

$\therefore$ $x=1$ 또는 $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{17}}{4}$

답 $x=1$ 또는 $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{17}}{4}$

0669 $P(x)=x^4+5x^3+5x^2-5x-6$이라 하면

$P(1)=1+5+5-5-6=0,$

$P(-1)=1-5+5+5-6=0$

조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 1 & 5 & 5 & -5 & -6 \\ & & 1 & 6 & 11 & 6 \\ \hline -1 & 1 & 6 & 11 & 6 & \boxed{0} \\ & & -1 & -5 & -6 & \\ \hline & 1 & 5 & 6 & \boxed{0} & \end{array}$$

$\therefore$ $P(x)=(x+1)(x-1)(x^2+5x+6)$

$=(x+3)(x+2)(x+1)(x-1)$

따라서 주어진 방정식은

$(x+3)(x+2)(x+1)(x-1)=0$

$\therefore$ $x=-3$ 또는 $x=-2$ 또는 $x=-1$ 또는 $x=1$

답 $x=-3$ 또는 $x=-2$ 또는 $x=-1$ 또는 $x=1$

0670 $P(x)=x^4-3x^3-x^2+5x+2$라 하면

$P(-1)=1+3-1-5+2=0,$

$P(2)=16-24-4+10+2=0$

조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} -1 & 1 & -3 & -1 & 5 & 2 \\ & & -1 & 4 & -3 & -2 \\ \hline 2 & 1 & -4 & 3 & 2 & \boxed{0} \\ & & 2 & -4 & -2 & \\ \hline & 1 & -2 & -1 & \boxed{0} & \end{array}$$

$\therefore$ $P(x)=(x+1)(x-2)(x^2-2x-1)$

따라서 주어진 방정식은

$(x+1)(x-2)(x^2-2x-1)=0$

$\therefore$ $x=-1$ 또는 $x=2$ 또는 $x=1\pm\sqrt{2}$

답 $x=-1$ 또는 $x=2$ 또는 $x=1\pm\sqrt{2}$

0671 방정식 $x^3+ax^2+7x+15=0$의 한 근이 3이므로

$27+9a+21+15=0,\quad 9a+63=0\quad \therefore a=-7$

즉 주어진 방정식은 $x^3-7x^2+7x+15=0$이므로

$P(x)=x^3-7x^2+7x+15$라 하면

$P(3)=0$

조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 3 & 1 & -7 & 7 & 15 \\ & & 3 & -12 & -15 \\ \hline & 1 & -4 & -5 & \boxed{0} \end{array}$$

$P(x)=(x-3)(x^2-4x-5)$

$=(x+1)(x-3)(x-5)$

따라서 주어진 방정식은

$(x+1)(x-3)(x-5)=0$

$\therefore$ $x=-1$ 또는 $x=3$ 또는 $x=5$

답 $a=-7$, 나머지 두 근: -1, 5

0672 $x^2-x=X$로 놓으면 주어진 방정식은

$X^2-3X+2=0,\quad (X-1)(X-2)=0$

$\therefore X=1$ 또는 $X=2$

(i) $X=1$일 때, $x^2-x-1=0$에서

$x=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$

(ii) $X=2$일 때, $x^2-x-2=0$에서

$(x+1)(x-2)=0 \quad \therefore x=-1$ 또는 $x=2$

(i), (ii)에서 $\quad x=-1$ 또는 $x=2$ 또는 $x=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$

답 $x=-1$ 또는 $x=2$ 또는 $x=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$

0673 $x^2+2x=X$로 놓으면 주어진 방정식은

$X^2-X-6=0,\quad (X+2)(X-3)=0$

$\therefore X=-2$ 또는 $X=3$

(i) $X=-2$일 때, $x^2+2x+2=0$에서

$x=-1\pm i$

(ii) $X=3$일 때, $x^2+2x-3=0$에서

$(x+3)(x-1)=0 \quad \therefore x=-3$ 또는 $x=1$

(i), (ii)에서 $\quad x=-3$ 또는 $x=1$ 또는 $x=-1\pm i$

답 $x=-3$ 또는 $x=1$ 또는 $x=-1\pm i$

0674 $x^2=X$로 놓으면 주어진 방정식은

$X^2-2X+1=0,\quad (X-1)^2=0 \quad \therefore X=1$

따라서 $x^2=1$이므로 $\quad x=1$ 또는 $x=-1$

답 $x=1$ 또는 $x=-1$

0675 $x^4+3x^2+4=0$에서 $\quad (x^4+4x^2+4)-x^2=0$

$(x^2+2)^2-x^2=0,\quad (x^2+x+2)(x^2-x+2)=0$

$x^2+x+2=0$ 또는 $x^2-x+2=0$

$\therefore x=\dfrac{-1\pm\sqrt{7}i}{2}$ 또는 $x=\dfrac{1\pm\sqrt{7}i}{2}$

답 $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{7}i}{2}$ 또는 $x=\dfrac{1\pm\sqrt{7}i}{2}$

0676 $x\neq0$이므로 주어진 방정식의 양변을 x^2으로 나누면

$x=0$을 주어진 방정식에 대입하면 $1\neq0$이므로 $\quad x\neq0$

$x^2-7x+12-\dfrac{7}{x}+\dfrac{1}{x^2}=0$

$x^2+\dfrac{1}{x^2}-7\left(x+\dfrac{1}{x}\right)+12=0$

$\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-7\left(x+\dfrac{1}{x}\right)+10=0$

이때 $x+\dfrac{1}{x}=X$로 놓으면

$X^2-7X+10=0,\quad (X-2)(X-5)=0$

$\therefore X=2$ 또는 $X=5$

(i) $X=2$일 때, $x+\dfrac{1}{x}=2$에서

$x^2-2x+1=0,\quad (x-1)^2=0 \quad \therefore x=1$

(ii) $X=5$일 때, $x+\dfrac{1}{x}=5$에서

$x^2-5x+1=0 \quad \therefore x=\dfrac{5\pm\sqrt{21}}{2}$

(i), (ii)에서 $\quad x=1$ 또는 $x=\dfrac{5\pm\sqrt{21}}{2}$

답 $x=1$ 또는 $x=\dfrac{5\pm\sqrt{21}}{2}$

0677 답 (1) -4 (2) 3 (3) 5

0678 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=1,\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=2,\ \alpha\beta\gamma=1$

(1) $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$

$=1^2-2\cdot2=-3$

(2) $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}+\dfrac{1}{\gamma}=\dfrac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma}=\dfrac{2}{1}=2$

(3) $(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)=\alpha\beta\gamma+\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha+\beta+\gamma+1$

$=1+2+1+1=5$

답 (1) -3 (2) 2 (3) 5

0679 $1,\ 3+\sqrt{2},\ 3-\sqrt{2}$를 근으로 하고 x^3의 계수가 1인 삼차방정식은

$x^3-\{1+(3+\sqrt{2})+(3-\sqrt{2})\}x^2$

$+\{1\cdot(3+\sqrt{2})+(3+\sqrt{2})(3-\sqrt{2})+(3-\sqrt{2})\cdot1\}x$

$-1\cdot(3+\sqrt{2})(3-\sqrt{2})=0$

$\therefore x^3-7x^2+13x-7=0$

답 $x^3-7x^2+13x-7=0$

0680 $-3,\ 1+2i,\ 1-2i$를 근으로 하고 x^3의 계수가 1인 삼차방정식은

$x^3-\{-3+(1+2i)+(1-2i)\}x^2$

$+\{(-3)\cdot(1+2i)+(1+2i)(1-2i)+(1-2i)\cdot(-3)\}x$

$-(-3)\cdot(1+2i)(1-2i)=0$

$\therefore x^3+x^2-x+15=0$

답 $x^3+x^2-x+15=0$

0681 주어진 삼차방정식의 계수가 유리수이므로 $1+\sqrt{2}$가 근이면 $1-\sqrt{2}$도 근이다.

따라서 주어진 방정식의 세 근이 $-2,\ 1+\sqrt{2},\ 1-\sqrt{2}$이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$-a=-2(1+\sqrt{2})+(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})+(1-\sqrt{2})\cdot(-2),$

$-b=-2(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})$

$\therefore a=5,\ b=-2$

답 $a=5,\ b=-2$

0682 주어진 삼차방정식의 계수가 실수이므로 $1+i$가 근이면 $1-i$도 근이다.

따라서 주어진 방정식의 세 근이 $3,\ 1+i,\ 1-i$이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$a=3(1+i)+(1+i)(1-i)+(1-i)\cdot3,$

$-b=3(1+i)(1-i)$

$\therefore a=8,\ b=-6$

답 $a=8,\ b=-6$

0683 $x^3=1$에서 $\quad x^3-1=0$

$\therefore (x-1)(x^2+x+1)=0$

(1) ω는 $x^2+x+1=0$의 한 허근이므로 $\quad \omega^2+\omega+1=0$

(2), (3) 이차방정식 $x^2+x+1=0$의 두 허근이 ω, $\overline{\omega}$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\omega+\overline{\omega}=-1$, $\omega\overline{\omega}=1$

(4) $\omega^8+\omega^4+1=(\omega^3)^2\cdot\omega^2+\omega^3\cdot\omega+1=\omega^2+\omega+1=0$

(5) $\omega^{20}+\omega^{10}=(\omega^3)^6\cdot\omega^2+(\omega^3)^3\cdot\omega=\omega^2+\omega=-1$

(6) $\omega+\dfrac{1}{\omega}=\dfrac{\omega^2+1}{\omega}=\dfrac{-\omega}{\omega}=-1$

답 (1) 0 (2) -1 (3) 1 (4) 0 (5) -1 (6) -1

0684 $x^3=-1$에서 $\quad x^3+1=0$

$\therefore (x+1)(x^2-x+1)=0$

(1) ω는 $x^2-x+1=0$의 한 허근이므로 $\quad \omega^2-\omega+1=0$

(2), (3) 이차방정식 $x^2-x+1=0$의 두 허근이 ω, $\overline{\omega}$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\omega+\overline{\omega}=1$, $\omega\overline{\omega}=1$

(4) $\omega^8+\omega^4+1=(\omega^3)^2\cdot\omega^2+\omega^3\cdot\omega+1=\omega^2-\omega+1=0$

(5) $\omega^{20}+\omega^{10}=(\omega^3)^6\cdot\omega^2+(\omega^3)^3\cdot\omega=\omega^2-\omega=-1$

(6) $\omega+\dfrac{1}{\omega}=\dfrac{\omega^2+1}{\omega}=\dfrac{\omega}{\omega}=1$

답 (1) 0 (2) 1 (3) 1 (4) 0 (5) -1 (6) 1

0685 $x-y=2$에서 $\quad y=x-2 \quad \cdots\cdots$ ㉠

㉠을 $x^2+y^2=10$에 대입하면

$x^2+(x-2)^2=10, \quad 2x^2-4x-6=0$

$x^2-2x-3=0, \quad (x+1)(x-3)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=3$

$x=-1$을 ㉠에 대입하면 $\quad y=-3$

$x=3$을 ㉠에 대입하면 $\quad y=1$

따라서 구하는 해는

$\begin{cases}x=-1\\y=-3\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=3\\y=1\end{cases}$

답 $\begin{cases}x=-1\\y=-3\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=3\\y=1\end{cases}$

0686 $x+y=4$에서 $\quad y=-x+4 \quad \cdots\cdots$ ㉠

㉠을 $x^2+xy+y^2=13$에 대입하면

$x^2+x(-x+4)+(-x+4)^2=13$

$x^2-4x+3=0, \quad (x-1)(x-3)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=3$

$x=1$을 ㉠에 대입하면 $\quad y=3$

$x=3$을 ㉠에 대입하면 $\quad y=1$

따라서 구하는 해는

$\begin{cases}x=1\\y=3\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=3\\y=1\end{cases}$

답 $\begin{cases}x=1\\y=3\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=3\\y=1\end{cases}$

다른 풀이 $x^2+xy+y^2=13$에서 $\quad (x+y)^2-xy=13$

$x+y=4$이므로 $\quad 4^2-xy=13 \quad \therefore xy=3$

즉 x, y는 t에 대한 이차방정식 $t^2-4t+3=0$의 두 근이므로

$(t-1)(t-3)=0 \quad \therefore t=1$ 또는 $t=3$

따라서 구하는 해는 $\begin{cases}x=1\\y=3\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=3\\y=1\end{cases}$

0687 $x^2-xy-2y^2=0$에서 $\quad (x+y)(x-2y)=0$

$\therefore x=-y$ 또는 $x=2y$

(i) $x=-y$를 $2x^2+y^2=9$에 대입하면

$2(-y)^2+y^2=9, \quad 3y^2=9$

$y^2=3 \quad \therefore y=\pm\sqrt{3}$

$\therefore x=\pm\sqrt{3}$, $y=\mp\sqrt{3}$ (복호동순)

(ii) $x=2y$를 $2x^2+y^2=9$에 대입하면

$2(2y)^2+y^2=9, \quad 9y^2=9$

$y^2=1 \quad \therefore y=\pm1$

$\therefore x=\pm2$, $y=\pm1$ (복호동순)

(i), (ii)에서 구하는 해는

$\begin{cases}x=-\sqrt{3}\\y=\sqrt{3}\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=\sqrt{3}\\y=-\sqrt{3}\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=-2\\y=-1\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=2\\y=1\end{cases}$

답 $\begin{cases}x=-\sqrt{3}\\y=\sqrt{3}\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=\sqrt{3}\\y=-\sqrt{3}\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=-2\\y=-1\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=2\\y=1\end{cases}$

0688 $x^2-y^2=0$에서 $\quad (x+y)(x-y)=0$

$\therefore x=-y$ 또는 $x=y$

(i) $x=-y$를 $x^2+xy+3y^2=15$에 대입하면

$(-y)^2+(-y)\cdot y+3y^2=15, \quad 3y^2=15$

$y^2=5 \quad \therefore y=\pm\sqrt{5}$

$\therefore x=\pm\sqrt{5}$, $y=\mp\sqrt{5}$ (복호동순)

(ii) $x=y$를 $x^2+xy+3y^2=15$에 대입하면

$y^2+y\cdot y+3y^2=15, \quad 5y^2=15$

$y^2=3 \quad \therefore y=\pm\sqrt{3}$

$\therefore x=\pm\sqrt{3}$, $y=\pm\sqrt{3}$ (복호동순)

(i), (ii)에서 구하는 해는

$\begin{cases}x=-\sqrt{5}\\y=\sqrt{5}\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=\sqrt{5}\\y=-\sqrt{5}\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=-\sqrt{3}\\y=-\sqrt{3}\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=\sqrt{3}\\y=\sqrt{3}\end{cases}$

답 $\begin{cases}x=-\sqrt{5}\\y=\sqrt{5}\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=\sqrt{5}\\y=-\sqrt{5}\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=-\sqrt{3}\\y=-\sqrt{3}\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=\sqrt{3}\\y=\sqrt{3}\end{cases}$

0689 x, y는 t에 대한 이차방정식 $t^2-2t-8=0$의 두 근이므로

$(t+2)(t-4)=0 \quad \therefore t=-2$ 또는 $t=4$

따라서 구하는 해는

$\begin{cases}x=-2\\y=4\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=4\\y=-2\end{cases}$

답 $\begin{cases}x=-2\\y=4\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=4\\y=-2\end{cases}$

0690 $x-xy+y=5$에서 $x+y=-1$이므로

$-xy-1=5 \quad \therefore xy=-6$

즉 x, y는 t에 대한 이차방정식 $t^2+t-6=0$의 두 근이므로

$(t+3)(t-2)=0 \quad \therefore t=-3$ 또는 $t=2$

따라서 구하는 해는

$\begin{cases}x=-3\\y=2\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=2\\y=-3\end{cases}$

답 $\begin{cases}x=-3\\y=2\end{cases}$ 또는 $\begin{cases}x=2\\y=-3\end{cases}$

0691 $2x+3y=16$에서 $\quad y=\dfrac{16-2x}{3}$

y가 자연수이므로 $\quad \frac{16-2x}{3} \ge 1 \quad \therefore x \le \frac{13}{2}$

x가 자연수이므로 $\quad x=1, 2, 3, 4, 5, 6$

x	1	2	3	4	5	6
y	$\frac{14}{3}$	4	$\frac{10}{3}$	$\frac{8}{3}$	2	$\frac{4}{3}$

위의 표에서 자연수 x, y의 순서쌍 (x, y)는

$(2, 4), (5, 2)$ 답 $(2, 4), (5, 2)$

0692 x, y가 정수이므로

(i) $x-1=1$, $y-2=5$일 때, $\quad x=2, y=7$

(ii) $x-1=5$, $y-2=1$일 때, $\quad x=6, y=3$

(iii) $x-1=-1$, $y-2=-5$일 때, $\quad x=0, y=-3$

(iv) $x-1=-5$, $y-2=-1$일 때, $\quad x=-4, y=1$

이상에서 정수 x, y의 순서쌍 (x, y)는

$(-4, 1), (0, -3), (2, 7), (6, 3)$

답 $(-4, 1), (0, -3), (2, 7), (6, 3)$

0693 $x^2+y^2+4x-6y+13=0$에서

$(x^2+4x+4)+(y^2-6y+9)=0$

$(x+2)^2+(y-3)^2=0$

x, y는 실수이므로 $\quad x+2=0, y-3=0$

$\therefore x=-2, y=3$ 답 $x=-2, y=3$

유형 01 삼차방정식과 사차방정식의 풀이 본책 102쪽

방정식 $P(x)=0$은 $P(x)$를 인수분해한 후

$ABC=0$이면 $A=0$ 또는 $B=0$ 또는 $C=0$

임을 이용하여 푼다. 이때 $P(x)$의 인수분해는 다음과 같은 방법으로 한다.

① 공통인수로 묶어 인수분해한다.

② 인수정리와 조립제법을 이용하여 인수분해한다.

0694 $x^3-2x^2-x+2=0$에서

$x^2(x-2)-(x-2)=0, \quad (x-2)(x^2-1)=0$

$(x+1)(x-1)(x-2)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=1$ 또는 $x=2$

따라서 가장 큰 근은 2, 가장 작은 근은 -1이므로

$\alpha=2, \beta=-1$

$\therefore \alpha-\beta=3$ 답 ③

0695 $P(x)=x^3-3x^2+5x-3$이라 하면

$P(1)=1-3+5-3=0$

조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & -3 & 5 & -3 \\ & & 1 & -2 & 3 \\ \hline & 1 & -2 & 3 & \boxed{0} \end{array}$$

$P(x)=(x-1)(x^2-2x+3)$

따라서 주어진 방정식은

$(x-1)(x^2-2x+3)=0$ ⋯ ❶

$\therefore x=1$ 또는 $x=1\pm\sqrt{2}i$

즉 $\alpha=1, \beta=1, \gamma=2$이므로 ⋯ ❷

$\alpha-\beta+\gamma=2$ ⋯ ❸

답 2

채점 기준	비율
❶ 주어진 방정식의 좌변을 인수분해할 수 있다.	60 %
❷ α, β, γ의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ $\alpha-\beta+\gamma$의 값을 구할 수 있다.	10 %

0696 $P(x)=x^4+3x^3+3x^2-x-6$이라 하면

$P(1)=1+3+3-1-6=0$,

$P(-2)=16-24+12+2-6=0$

조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 1 & 3 & 3 & -1 & -6 \\ & & 1 & 4 & 7 & 6 \\ \hline -2 & 1 & 4 & 7 & 6 & \boxed{0} \\ & & -2 & -4 & -6 & \\ \hline & 1 & 2 & 3 & \boxed{0} & \end{array}$$

$\therefore P(x)=(x-1)(x+2)(x^2+2x+3)$

따라서 방정식 $P(x)=0$의 근은

$x=1$ 또는 $x=-2$ 또는 $x=-1\pm\sqrt{2}i$

이므로 모든 실근의 합은

$1+(-2)=-1$ 답 ②

0697 $P(x)=x^4-2x^2-3x-2$라 하면

$P(2)=16-8-6-2=0$,

$P(-1)=1-2+3-2=0$

조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} 2 & 1 & 0 & -2 & -3 & -2 \\ & & 2 & 4 & 4 & 2 \\ \hline -1 & 1 & 2 & 2 & 1 & \boxed{0} \\ & & -1 & -1 & -1 & \\ \hline & 1 & 1 & 1 & \boxed{0} & \end{array}$$

$\therefore P(x)=(x-2)(x+1)(x^2+x+1)$

이때 방정식 $P(x)=0$의 두 허근 α, β는 방정식 $x^2+x+1=0$의 근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-1, \alpha\beta=1$

$\therefore \alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=(-1)^2-2\cdot1=-1$ 답 -1

0698 $P(x)=x^4+4x^3-x^2-16x-12$라 하면

$P(2)=16+32-4-32-12=0$,

$P(-1)=1-4-1+16-12=0$

조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} 2 & 1 & 4 & -1 & -16 & -12 \\ & & 2 & 12 & 22 & 12 \\ \hline -1 & 1 & 6 & 11 & 6 & \boxed{0} \\ & & -1 & -5 & -6 & \\ \hline & 1 & 5 & 6 & \boxed{0} & \end{array}$$

$\therefore P(x)=(x-2)(x+1)(x^2+5x+6)$
$=(x+3)(x+2)(x+1)(x-2)$

따라서 방정식 $P(x)=0$의 근은
$x=-3$ 또는 $x=-2$ 또는 $x=-1$ 또는 $x=2$
$\therefore (1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)(1-\delta)$
$=(1+3)\cdot(1+2)\cdot(1+1)\cdot(1-2)$
$=-24$ 답 ②

다른 풀이 사차방정식 $x^4+4x^3-x^2-16x-12=0$의 네 근이 α, β, γ, δ이므로
$x^4+4x^3-x^2-16x-12=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)$
위의 식의 양변에 $x=1$을 대입하면
$(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)(1-\delta)=1+4-1-16-12=-24$

유형 02 공통부분이 있는 사차방정식의 풀이 본책 102쪽

방정식에 공통부분이 있으면 공통부분을 한 문자로 치환하여 그 문자에 대한 방정식으로 변형한 후 인수분해한다.

0699 $x^2-3x=X$로 놓으면 주어진 방정식은
$X^2-2X-8=0$, $(X+2)(X-4)=0$
$\therefore X=-2$ 또는 $X=4$
(i) $X=-2$일 때, $x^2-3x+2=0$에서
$(x-1)(x-2)=0$ $\therefore x=1$ 또는 $x=2$
(ii) $X=4$일 때, $x^2-3x-4=0$에서
$(x+1)(x-4)=0$ $\therefore x=-1$ 또는 $x=4$
(i), (ii)에서 주어진 방정식의 양의 근은 1, 2, 4이므로 구하는 합은 7이다. 답 ③

0700 $x^2+x=X$로 놓으면 주어진 방정식은
$(X+1)^2-5X-11=0$, $X^2-3X-10=0$
$(X+2)(X-5)=0$ $\therefore X=-2$ 또는 $X=5$
(i) $X=-2$일 때, $x^2+x+2=0$이므로 이 방정식의 판별식을 D_1이라 하면
$D_1=1^2-4\cdot1\cdot2=-7<0$
즉 이 방정식은 서로 다른 두 허근을 갖는다.
(ii) $X=5$일 때, $x^2+x-5=0$이므로 이 방정식의 판별식을 D_2라 하면
$D_2=1^2-4\cdot1\cdot(-5)=21>0$
즉 이 방정식은 서로 다른 두 실근을 갖는다.
(i), (ii)에서 주어진 방정식의 두 실근은 방정식 $x^2+x-5=0$의 근이고 두 허근은 방정식 $x^2+x+2=0$의 근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$a=-5$, $b=-1$ $\therefore b-a=4$ 답 ⑤

0701 $x^2-x=X$로 놓으면 주어진 방정식은
$(X+2)(X-1)-4=0$, $X^2+X-6=0$
$(X+3)(X-2)=0$ $\therefore X=-3$ 또는 $X=2$
(i) $X=-3$일 때, $x^2-x+3=0$이므로 이 방정식의 판별식을 D_1이라 하면
$D_1=(-1)^2-4\cdot1\cdot3=-11<0$
즉 이 방정식은 서로 다른 두 허근을 갖는다.
(ii) $X=2$일 때, $x^2-x-2=0$이므로 이 방정식의 판별식을 D_2라 하면
$D_2=(-1)^2-4\cdot1\cdot(-2)=9>0$
즉 이 방정식은 서로 다른 두 실근을 갖는다.
(i), (ii)에서 α, β는 이차방정식 $x^2-x+3=0$의 두 근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha\beta=3$
또한 $\overline{\alpha}=\beta$, $\overline{\beta}=\alpha$이므로
$\alpha\overline{\alpha}+\beta\overline{\beta}=2\alpha\beta=6$ 계수가 실수인 이차방정식의 한 허근이 α이면 $\overline{\alpha}$도 근이다. 답 6

0702 $(x-1)(x-3)(x+5)(x+7)+55=0$에서
$\{(x-1)(x+5)\}\{(x-3)(x+7)\}+55=0$
$(x^2+4x-5)(x^2+4x-21)+55=0$
이때 $x^2+4x=X$로 놓으면
$(X-5)(X-21)+55=0$, $X^2-26X+160=0$
$(X-10)(X-16)=0$ $\therefore X=10$ 또는 $X=16$
(i) $X=10$일 때, $x^2+4x-10=0$이고 이 이차방정식은 서로 다른 두 실근을 가지므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 두 실근의 곱은 -10
(ii) $X=16$일 때, $x^2+4x-16=0$이고 이 이차방정식은 서로 다른 두 실근을 가지므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 두 실근의 곱은 -16
(i), (ii)에서 주어진 방정식의 모든 실근의 곱은
$(-10)\cdot(-16)=160$ 답 ⑤

참고 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ (a, b, c는 상수)에서 $ac<0$이면 서로 다른 두 실근을 갖는다.

유형 03 $x^4+ax^2+b=0$ 꼴의 방정식의 풀이 본책 103쪽

① $x^2=X$로 치환하여 좌변을 인수분해한다.
② $(x^2+A)^2-(Bx)^2=0$ 꼴로 변형한 후 좌변을 인수분해한다.

0703 $x^2=X$로 놓으면 주어진 방정식은
$X^2-5X+4=0$, $(X-1)(X-4)=0$
$\therefore X=1$ 또는 $X=4$
즉 $x^2=1$ 또는 $x^2=4$이므로
$x=\pm1$ 또는 $x=\pm2$
$\therefore |\alpha|+|\beta|+|\gamma|+|\delta|=|1|+|-1|+|2|+|-2|$
$=6$ 답 6

0704 $x^2=X$로 놓으면 주어진 방정식은
$X^2+2X-15=0$, $(X+5)(X-3)=0$
$\therefore X=-5$ 또는 $X=3$
즉 $x^2=-5$ 또는 $x^2=3$이므로
$x=\pm\sqrt{5}i$ 또는 $x=\pm\sqrt{3}$
따라서 주어진 방정식의 실근은 $\pm\sqrt{3}$이므로 두 실근의 곱은
$\sqrt{3}\cdot(-\sqrt{3})=-3$ 답 ③

06 여러 가지 방정식

0705 $x^4-12x^2+16=0$에서

$(x^4-8x^2+16)-4x^2=0,\qquad (x^2-4)^2-(2x)^2=0$

$(x^2+2x-4)(x^2-2x-4)=0$

$x^2+2x-4=0$ 또는 $x^2-2x-4=0$

$\therefore x=-1\pm\sqrt{5}$ 또는 $x=1\pm\sqrt{5}$ ··· ❶

따라서 주어진 방정식의 음의 근은 $-1-\sqrt{5}$, $1-\sqrt{5}$이므로

$\alpha+\beta=(-1-\sqrt{5})+(1-\sqrt{5})=-2\sqrt{5}$ ··· ❷

답 $-2\sqrt{5}$

채점 기준	비율
❶ 사차방정식의 네 근을 구할 수 있다.	70 %
❷ $\alpha+\beta$의 값을 구할 수 있다.	30 %

0706 $x^4+3x^2+36=0$에서

$(x^4+12x^2+36)-9x^2=0,\qquad (x^2+6)^2-(3x)^2=0$

$(x^2+3x+6)(x^2-3x+6)=0$

$x^2+3x+6=0$ 또는 $x^2-3x+6=0$

방정식 $x^2+3x+6=0$의 두 근을 α, β, 방정식 $x^2-3x+6=0$의 두 근을 γ, δ라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-3$, $\alpha\beta=6$, $\gamma+\delta=3$, $\gamma\delta=6$

$$\therefore \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\delta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}+\frac{\gamma+\delta}{\gamma\delta}$$

$$=\frac{-3}{6}+\frac{3}{6}=0$$

답 0

유형 04 $ax^4+bx^3+cx^2+bx+a=0$ 꼴의 방정식의 풀이

본책 103쪽

사차방정식 $ax^4+bx^3+cx^2+bx+a=0$은 다음과 같은 순서로 푼다.

(i) 양변을 x^2으로 나눈다.

(ii) $x+\frac{1}{x}=X$로 놓고 X에 대한 이차방정식을 푼다.

(iii) (ii)에서 구한 X의 값을 $x+\frac{1}{x}=X$에 대입하여 x의 값을 구한다.

0707 방정식 $x^4+5x^3-4x^2+5x+1=0$의 양변을 x^2으로 나누면

$$x^2+5x-4+\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}=0,\qquad x^2+\frac{1}{x^2}+5\left(x+\frac{1}{x}\right)-4=0$$

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+5\left(x+\frac{1}{x}\right)-6=0$$

이때 $x+\frac{1}{x}=X$로 놓으면

$X^2+5X-6=0,\qquad (X+6)(X-1)=0$

$\therefore X=-6$ 또는 $X=1$

(i) $X=-6$일 때, $x+\frac{1}{x}=-6$에서

$x^2+6x+1=0\qquad \therefore x=-3\pm2\sqrt{2}$

(ii) $X=1$일 때, $x+\frac{1}{x}=1$에서

$x^2-x+1=0\qquad \therefore x=\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 실근은 $-3\pm2\sqrt{2}$이다. 답 ②

0708 방정식 $x^4+6x^3-8x^2+6x+1=0$의 양변을 x^2으로 나누면

$$x^2+6x-8+\frac{6}{x}+\frac{1}{x^2}=0,\qquad x^2+\frac{1}{x^2}+6\left(x+\frac{1}{x}\right)-8=0$$

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+6\left(x+\frac{1}{x}\right)-10=0$$

이때 $x+\frac{1}{x}=k$이므로 $k^2+6k-10=0$에서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 모든 k의 값의 곱은

-10 답 ①

0709 방정식 $x^4+4x^3-3x^2+4x+1=0$의 양변을 x^2으로 나누면

$$x^2+4x-3+\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}=0,\qquad x^2+\frac{1}{x^2}+4\left(x+\frac{1}{x}\right)-3=0$$

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+4\left(x+\frac{1}{x}\right)-5=0$$

이때 $x+\frac{1}{x}=X$로 놓으면

$X^2+4X-5=0,\qquad (X+5)(X-1)=0$

$\therefore X=-5$ 또는 $X=1$ ··· ❶

(i) $X=-5$일 때, $x+\frac{1}{x}=-5$에서

$x^2+5x+1=0$

이 방정식의 판별식을 D_1이라 하면

$D_1=5^2-4\cdot1\cdot1=21>0$

즉 방정식 $x^2+5x+1=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다. ··· ❷

(ii) $X=1$일 때, $x+\frac{1}{x}=1$에서

$x^2-x+1=0$

이 방정식의 판별식을 D_2라 하면

$D_2=(-1)^2-4\cdot1\cdot1=-3<0$

즉 방정식 $x^2-x+1=0$은 서로 다른 두 허근을 갖는다. ··· ❸

(i), (ii)에서 α는 방정식 $x^2+5x+1=0$, 즉 $x+\frac{1}{x}=-5$의 한 실근이므로

$\alpha+\frac{1}{\alpha}=-5$ ··· ❹

답 -5

채점 기준	비율
❶ $x+\frac{1}{x}=X$로 놓고 X에 대한 이차방정식의 해를 구할 수 있다.	30 %
❷ $X=-5$일 때 근을 판별할 수 있다.	30 %
❸ $X=1$일 때 근을 판별할 수 있다.	30 %
❹ $\alpha+\frac{1}{\alpha}$의 값을 구할 수 있다.	10 %

유형 05 근이 주어진 삼·사차방정식

본책 104쪽

① 삼차방정식 $P(x)=0$의 한 근이 α ➡ $P(\alpha)=0$
② 사차방정식 $P(x)=0$의 두 근이 α, β ➡ $P(\alpha)=0$, $P(\beta)=0$

0710 방정식 $x^3-kx^2+(k+2)x-9=0$의 한 근이 3이므로

$27-9k+3(k+2)-9=0$

$24-6k=0 \qquad \therefore k=4$

즉 주어진 방정식은 $x^3-4x^2+6x-9=0$이므로

$P(x)=x^3-4x^2+6x-9$라 하면

$P(3)=0$

조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 3 & 1 & -4 & 6 & -9 \\ & & 3 & -3 & 9 \\ \hline & 1 & -1 & 3 & \boxed{0} \end{array}$$

$P(x)=(x-3)(x^2-x+3)$

따라서 주어진 방정식은

$(x-3)(x^2-x+3)=0$

이때 α, β는 이차방정식 $x^2-x+3=0$의 두 근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=1$

$\therefore k+\alpha+\beta=5$

답 ③

0711 주어진 방정식의 두 근이 -1, 4이므로

$-1-a-b-1+3b=0$에서

$-a+2b=2$ …… ㉠

$64-16a+4b+4+3b=0$에서

$-16a+7b=-68$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=6$, $b=4$

즉 주어진 방정식은 $x^3-6x^2+5x+12=0$이므로

$P(x)=x^3-6x^2+5x+12$라 하면

$P(-1)=0$, $P(4)=0$

조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & -6 & 5 & 12 \\ & & -1 & 7 & -12 \\ \hline 4 & 1 & -7 & 12 & \boxed{0} \\ & & 4 & -12 & \\ \hline & 1 & -3 & \boxed{0} & \end{array}$$

$P(x)$

$=(x+1)(x-4)(x-3)$

따라서 주어진 방정식은

$(x+1)(x-4)(x-3)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=4$ 또는 $x=3$

즉 나머지 한 근은 3이다.

답 3

0712 주어진 방정식의 두 근이 1, -2이므로

$2+a+b-1+a=0$에서

$2a+b=-1$ …… ㉠

$32-8a+4b+2+a=0$에서

$-7a+4b=-34$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=-5$ ⋯ ❶

즉 주어진 방정식은 $2x^4+2x^3-5x^2-x+2=0$이므로

$P(x)=2x^4+2x^3-5x^2-x+2$라 하면

$P(1)=0$, $P(-2)=0$

조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 2 & 2 & -5 & -1 & 2 \\ & & 2 & 4 & -1 & -2 \\ \hline -2 & 2 & 4 & -1 & -2 & \boxed{0} \\ & & -4 & 0 & 2 & \\ \hline & 2 & 0 & -1 & \boxed{0} & \end{array}$$

$\therefore P(x)=(x-1)(x+2)(2x^2-1)$

따라서 주어진 방정식은

$(x-1)(x+2)(2x^2-1)=0$ ⋯ ❷

즉 주어진 방정식의 나머지 두 근은 방정식 $2x^2-1=0$의 근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 구하는 곱은 $-\frac{1}{2}$이다. ⋯ ❸

답 $-\frac{1}{2}$

채점 기준	비율
❶ a, b의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ 주어진 방정식의 좌변을 인수분해할 수 있다.	40 %
❸ 나머지 두 근의 곱을 구할 수 있다.	20 %

0713 주어진 삼차방정식의 한 근이 α이므로

$a\alpha^3-b\alpha^2+c\alpha-d=0$ …… ㉠

ㄱ. ㉠의 양변에 -1을 곱하면

$-a\alpha^3+b\alpha^2-c\alpha+d=0$

$\therefore a(-\alpha)^3+b(-\alpha)^2+c(-\alpha)+d=0$

따라서 $-\alpha$는 $ax^3+bx^2+cx+d=0$의 근이다.

ㄴ. ㉠의 양변을 α^3으로 나누면

$a-\frac{b}{\alpha}+\frac{c}{\alpha^2}-\frac{d}{\alpha^3}=0$

$\therefore d\left(-\frac{1}{\alpha}\right)^3+c\left(-\frac{1}{\alpha}\right)^2+b\left(-\frac{1}{\alpha}\right)+a=0$

따라서 $-\frac{1}{\alpha}$은 $dx^3+cx^2+bx+a=0$의 근이다.

ㄷ. ㉠의 양변을 $-\alpha^3$으로 나누면

$-a+\frac{b}{\alpha}-\frac{c}{\alpha^2}+\frac{d}{\alpha^3}=0$

$\therefore d\left(\frac{1}{\alpha}\right)^3-c\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2+b\cdot\frac{1}{\alpha}-a=0$

따라서 $\frac{1}{\alpha}$은 $dx^3-cx^2+bx-a=0$의 근이다.

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

답 ⑤

유형 06 삼차방정식의 근의 판별

본책 104쪽

주어진 삼차방정식을 $(x-\alpha)(ax^2+bx+c)=0$ (α는 실수) 꼴로 변형한 후 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식을 이용한다.

0714 $P(x)=x^3-(1+2k)x+2k$라 하면

$P(1)=1-(1+2k)+2k=0$

조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 0 & -(1+2k) & 2k \\ & & 1 & 1 & -2k \\ \hline & 1 & 1 & -2k & \boxed{0} \end{array}$$

$\therefore P(x)=(x-1)(x^2+x-2k)$

이때 방정식 $P(x)=0$이 중근을 가지려면

(i) 방정식 $x^2+x-2k=0$이 $x=1$을 근으로 갖는 경우

$1+1-2k=0 \qquad \therefore k=1$

(ii) 방정식 $x^2+x-2k=0$이 중근을 갖는 경우

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=1^2-4\cdot1\cdot(-2k)=0$

$1+8k=0 \qquad \therefore k=-\frac{1}{8}$

(i), (ii)에서 k의 값의 합은

$1+\left(-\frac{1}{8}\right)=\frac{7}{8}$ 답 $\frac{7}{8}$

0715 $P(x)=x^3-4x^2+(k+4)x-2k$라 하면

$P(2)=8-16+2(k+4)-2k=0$

조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & -4 & k+4 & -2k \\ & & 2 & -4 & 2k \\ \hline & 1 & -2 & k & 0 \end{array}$$

$\therefore P(x)=(x-2)(x^2-2x+k)$

이때 방정식 $P(x)=0$의 근이 모두 실수가 되려면 이차방정식 $x^2-2x+k=0$이 실근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-1)^2-k\geq0 \qquad \therefore k\leq1$ 답 ④

0716 $x^3-x^2+2kx-2k=0$에서

$x^2(x-1)+2k(x-1)=0$

$\therefore (x-1)(x^2+2k)=0$ ··· ❶

이때 주어진 방정식이 한 개의 실근과 두 개의 허근을 가지려면 이차방정식 $x^2+2k=0$이 두 개의 허근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=0^2-4\cdot1\cdot2k<0 \qquad \therefore k>0$ ··· ❷

따라서 정수 k의 최솟값은 1이다. ··· ❸

답 1

채점 기준	비율
❶ 주어진 삼차방정식의 좌변을 인수분해할 수 있다.	30 %
❷ k의 값의 범위를 구할 수 있다.	50 %
❸ 정수 k의 최솟값을 구할 수 있다.	20 %

0717 $P(x)=x^3-5x^2+(k+4)x-k$라 하면

$P(1)=1-5+(k+4)-k=0$

조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & -5 & k+4 & -k \\ & & 1 & -4 & k \\ \hline & 1 & -4 & k & 0 \end{array}$$

$\therefore P(x)=(x-1)(x^2-4x+k)$

이때 방정식 $P(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가지려면 이차방정식 $x^2-4x+k=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-2)^2-k>0 \qquad \therefore k<4$

이차방정식 $x^2-4x+k=0$의 두 실근을 α, β $(0<\alpha<\beta)$라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=4$ ······ ㉠

$\alpha\beta=k$

1, α, β가 직각삼각형의 세 변의 길이가 되려면

(i) 빗변의 길이가 1인 경우

$\alpha^2+\beta^2=1$이므로 $\qquad (\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=1$

$4^2-2k=1 \qquad \therefore k=\frac{15}{2}$

그런데 $k<4$이어야 하므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) 빗변의 길이가 β인 경우

$1+\alpha^2=\beta^2, \qquad \beta^2-\alpha^2=1$

$(\beta+\alpha)(\beta-\alpha)=1, \qquad 4(\beta-\alpha)=1$

$\therefore \beta-\alpha=\frac{1}{4}$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\qquad \alpha=\frac{15}{8}$, $\beta=\frac{17}{8}$

$\therefore k=\alpha\beta=\frac{255}{64}$

(i), (ii)에서 $\qquad k=\frac{255}{64}$ 답 $\frac{255}{64}$

참고 $0<\alpha<\beta$일 때 $\alpha+\beta=4$를 만족시키는 β의 값은 항상 1보다 크다. 따라서 1, α, β가 직각삼각형의 세 변의 길이이면 빗변의 길이는 β이다.

유형 07 삼차방정식의 근과 계수의 관계

본책 105쪽

삼차방정식 $ax^3+bx^2+cx+d=0$의 세 근을 α, β, γ라 하면

$\alpha+\beta+\gamma=-\frac{b}{a}$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{c}{a}$, $\alpha\beta\gamma=-\frac{d}{a}$

0718 삼차방정식 $x^3+2x^2+x+4=0$의 세 근이 α, β, γ이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=-2$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=1$, $\alpha\beta\gamma=-4$

$\therefore (\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)$

$=(-2-\gamma)(-2-\alpha)(-2-\beta)$

$=-8-4(\alpha+\beta+\gamma)-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)-\alpha\beta\gamma$

$=-8-4\cdot(-2)-2\cdot1-(-4)$

$=2$ 답 ⑤

0719 삼차방정식 $x^3+ax^2-5x+3=0$의 세 근이 α, β, γ이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=-a$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-5$, $\alpha\beta\gamma=-3$

$\frac{1}{\alpha\beta}+\frac{1}{\beta\gamma}+\frac{1}{\gamma\alpha}=\frac{2}{3}$에서 $\qquad \frac{\alpha+\beta+\gamma}{\alpha\beta\gamma}=\frac{2}{3}$

$\frac{-a}{-3}=\frac{2}{3} \qquad \therefore a=2$ 답 2

0720 $\alpha-3=\alpha'$, $\beta-1=\beta'$, $\gamma+1=\gamma'$이라 하면 삼차방정식 $x^3+3x^2-5x-1=0$의 세 근이 α', β', γ'이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha'+\beta'+\gamma'=-3$, $\alpha'\beta'+\beta'\gamma'+\gamma'\alpha'=-5$, $\alpha'\beta'\gamma'=1$

$\therefore (\alpha-1)(\beta+1)(\gamma+3)$
$=(\alpha'+2)(\beta'+2)(\gamma'+2)$
$=\alpha'\beta'\gamma'+2(\alpha'\beta'+\beta'\gamma'+\gamma'\alpha')+4(\alpha'+\beta'+\gamma')+8$
$=1+2\cdot(-5)+4\cdot(-3)+8=-13$ 답 ③

0721 주어진 삼차방정식의 세 근을 α, 2α, 4α ($\alpha\neq0$)라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+2\alpha+4\alpha=14$, $7\alpha=14$ $\therefore \alpha=2$

따라서 세 근이 2, 4, 8이므로

$2\cdot4+4\cdot8+8\cdot2=a$, $2\cdot4\cdot8=-b$
$\therefore a=56$, $b=-64$
$\therefore a+b=-8$ 답 -8

0722 주어진 삼차방정식의 세 근을 α, 2α, β (α, β는 정수)라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+2\alpha+\beta=5$ $\therefore 3\alpha+\beta=5$ …… ㉠
$\alpha\cdot2\alpha+2\alpha\cdot\beta+\beta\cdot\alpha=2$ $\therefore 2\alpha^2+3\alpha\beta=2$ …… ㉡
$\alpha\cdot2\alpha\cdot\beta=-k$ $\therefore k=-2\alpha^2\beta$ …… ㉢

㉠에서 $\beta=5-3\alpha$이므로 이것을 ㉡에 대입하면

$2\alpha^2+3\alpha(5-3\alpha)=2$, $7\alpha^2-15\alpha+2=0$
$(7\alpha-1)(\alpha-2)=0$ $\therefore \alpha=2$ ($\because$ α는 정수)
$\therefore \beta=5-3\cdot2=-1$

$\alpha=2$, $\beta=-1$을 ㉢에 대입하면

$k=-2\cdot2^2\cdot(-1)=8$ 답 ④

유형 08 삼차방정식의 작성
본책 105쪽

세 수 α, β, γ를 근으로 하고 x^3의 계수가 1인 삼차방정식은
$x^3-(\alpha+\beta+\gamma)x^2+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)x-\alpha\beta\gamma=0$

0723 삼차방정식 $x^3-2x^2-x+1=0$의 세 근이 α, β, γ이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=2$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-1$, $\alpha\beta\gamma=-1$

$\therefore \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=\frac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma}=\frac{-1}{-1}=1$,

$\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\beta}\cdot\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\gamma}\cdot\frac{1}{\alpha}=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{\alpha\beta\gamma}=\frac{2}{-1}=-2$,

$\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{\beta}\cdot\frac{1}{\gamma}=\frac{1}{\alpha\beta\gamma}=-1$

따라서 $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\beta}$, $\frac{1}{\gamma}$을 세 근으로 하고 x^3의 계수가 1인 삼차방정식은

$x^3-x^2-2x+1=0$ 답 $x^3-x^2-2x+1=0$

0724 삼차방정식 $x^3+3x^2+x-2=0$의 세 근이 α, β, γ이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=-3$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=1$, $\alpha\beta\gamma=2$

$\therefore (\alpha+1)+(\beta+1)+(\gamma+1)=\alpha+\beta+\gamma+3=0$,
$(\alpha+1)(\beta+1)+(\beta+1)(\gamma+1)+(\gamma+1)(\alpha+1)$
$=(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)+2(\alpha+\beta+\gamma)+3$
$=1+2\cdot(-3)+3=-2$,
$(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)$
$=\alpha\beta\gamma+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)+(\alpha+\beta+\gamma)+1$
$=2+1+(-3)+1=1$

따라서 $\alpha+1$, $\beta+1$, $\gamma+1$을 세 근으로 하고 x^3의 계수가 1인 삼차방정식은

$x^3-2x-1=0$ 답 $x^3-2x-1=0$

0725 $P(1)=P(3)=P(4)=-1$에서

$P(1)+1=P(3)+1=P(4)+1=0$

이므로 삼차방정식 $P(x)+1=0$의 세 근이 1, 3, 4이다. ⋯ ❶

이때 1, 3, 4를 세 근으로 하고 x^3의 계수가 1인 삼차방정식은

$x^3-(1+3+4)x^2+(1\cdot3+3\cdot4+4\cdot1)x-1\cdot3\cdot4=0$
$\therefore x^3-8x^2+19x-12=0$ ⋯ ❷

즉 $P(x)+1=x^3-8x^2+19x-12$이므로

$P(x)=x^3-8x^2+19x-13$ ⋯ ❸
$\therefore P(2)=1$ ⋯ ❹

답 1

채점 기준	비율
❶ 방정식 $P(x)+1=0$의 세 근을 구할 수 있다.	30 %
❷ 1, 3, 4를 세 근으로 하고 x^3의 계수가 1인 삼차방정식을 구할 수 있다.	30 %
❸ $P(x)$를 구할 수 있다.	20 %
❹ $P(2)$의 값을 구할 수 있다.	20 %

유형 09 삼차방정식과 사차방정식의 켤레근
본책 106쪽

① 계수가 유리수인 이차 이상의 방정식의 한 근이 $p+q\sqrt{m}$이면
➡ $p-q\sqrt{m}$도 근이다.
(단, p, q는 유리수, $q\neq0$, $\sqrt{m}$은 무리수)
② 계수가 실수인 이차 이상의 방정식의 한 근이 $p+qi$이면
➡ $p-qi$도 근이다. (단, p, q는 실수, $q\neq0$, $i=\sqrt{-1}$)

0726 주어진 삼차방정식의 계수가 유리수이므로 $1+\sqrt{2}$가 근이면 $1-\sqrt{2}$도 근이다. 나머지 한 근을 α라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+(1+\sqrt{2})+(1-\sqrt{2})=-a$,
$\alpha(1+\sqrt{2})+(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})+\alpha(1-\sqrt{2})=b$,
$\alpha(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})=3$ — $-\alpha=3$에서 $\alpha=-3$이므로 이것을 위의 식에 대입하여 a, b의 값을 구한다.

위의 세 식을 연립하여 풀면

$\alpha=-3$, $a=1$, $b=-7$
$\therefore a+b=-6$ 답 ③

다른 풀이 $x^3+ax^2+bx-3=0$의 한 근이 $1+\sqrt{2}$이므로

$(1+\sqrt{2})^3+a(1+\sqrt{2})^2+b(1+\sqrt{2})-3=0$
$7+5\sqrt{2}+a(3+2\sqrt{2})+b+\sqrt{2}b-3=0$ — 곱셈 공식 $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$을 이용한다.
$(4+3a+b)+(5+2a+b)\sqrt{2}=0$

무리수가 서로 같을 조건에 의하여

$4+3a+b=0$, $5+2a+b=0$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=1$, $b=-7$

0727 주어진 삼차방정식의 계수가 실수이므로 $-1-2i$가 근이면 $-1+2i$도 근이다. 나머지 한 근을 α라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$(-1-2i)(-1+2i)\alpha=5 \qquad \therefore \alpha=1$$

따라서 나머지 두 근의 합은

$$(-1+2i)+1=2i$$

답 $2i$

0728 주어진 삼차방정식의 계수가 유리수이므로 $2+\sqrt{3}$이 근이면 $2-\sqrt{3}$도 근이다. ❶

따라서 주어진 방정식의 세 근이 1, $2+\sqrt{3}$, $2-\sqrt{3}$이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$1+(2+\sqrt{3})+(2-\sqrt{3})=-\frac{b}{a},$$

$$1\cdot(2+\sqrt{3})+(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})+(2-\sqrt{3})\cdot 1=\frac{c}{a},$$

$$1\cdot(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})=\frac{1}{a}$$

위의 세 식을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=-5$, $c=5$ ❷

$\therefore abc=-25$ ❸

답 -25

채점 기준	비율
❶ $2-\sqrt{3}$도 주어진 방정식의 근임을 알 수 있다.	30 %
❷ a, b, c의 값을 구할 수 있다.	50 %
❸ abc의 값을 구할 수 있다.	20 %

0729 주어진 삼차방정식의 계수가 실수이므로 $2-\sqrt{2}i$가 근이면 $2+\sqrt{2}i$도 근이다. 나머지 한 근이 c이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$c+(2-\sqrt{2}i)+(2+\sqrt{2}i)=3,$$

$$c(2-\sqrt{2}i)+(2-\sqrt{2}i)(2+\sqrt{2}i)+c(2+\sqrt{2}i)=a,$$

$$c(2-\sqrt{2}i)(2+\sqrt{2}i)=-b$$

위의 세 식을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=6$, $c=-1$

$\therefore a+b+c=7$

답 ⑤

0730 a, b, c, d가 실수이므로 주어진 방정식의 두 근이 $-2i$, $1+i$이면 다른 두 근은 $2i$, $1-i$이다.

이때 $2i$, $-2i$, $1-i$, $1+i$를 네 근으로 하고 x^4의 계수가 1인 사차방정식은

$$(x-2i)(x+2i)\{x-(1-i)\}\{x-(1+i)\}=0$$

$$(x^2+4)(x^2-2x+2)=0$$

$$\therefore x^4-2x^3+6x^2-8x+8=0$$

따라서 $a=-2$, $b=6$, $c=-8$, $d=8$이므로

$$a+b+c+d=4$$

답 4

0731 주어진 삼차방정식의 계수가 실수이므로 $1+\sqrt{2}i$가 근이면 $1-\sqrt{2}i$도 근이다.

이때 $(1+\sqrt{2}i)(1-\sqrt{2}i)=3\neq 2$이므로 $1+\sqrt{2}i$, $1-\sqrt{2}i$는 이차방정식 $x^2+ax+2=0$의 두 근이 될 수 없다.

이차방정식 $x^2+ax+2=0$의 나머지 한 근을 n이라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$m+n=-a$$

삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$(1+\sqrt{2}i)+(1-\sqrt{2}i)+m=-a$$

$$\therefore 2+m=-a$$

따라서 $m+n=2+m$이므로 $n=2$

즉 $x^2+ax+2=0$의 한 근이 2이므로

$$4+2a+2=0 \qquad \therefore a=-3$$

따라서 주어진 이차방정식은 $x^2-3x+2=0$이므로

$$(x-1)(x-2)=0 \qquad \therefore x=1 \text{ 또는 } x=2$$

즉 공통인 근은 1이므로 $m=1$

답 ①

유형 10 방정식 $x^3=1$, $x^3=-1$의 허근의 성질

본책 107쪽

방정식 $x^3=1$의 한 허근을 ω라 할 때 (단, $\overline{\omega}$는 ω의 켤레복소수)

① $\omega^3=1 \Rightarrow \omega^{3n-2}=\omega$, $\omega^{3n-1}=\omega^2$, $\omega^{3n}=1$ (단, n은 자연수)

② $\omega^2+\omega+1=0$

③ $\omega+\overline{\omega}=-1$, $\omega\overline{\omega}=1$

(②, ③) $\Rightarrow \omega^2=\overline{\omega}=\dfrac{1}{\omega}$

0732 $x^3=1$에서 $x^3-1=0$, 즉 $(x-1)(x^2+x+1)=0$이므로 ω는 $x^2+x+1=0$의 한 허근이고, 방정식의 계수가 실수이므로 ω의 켤레복소수인 $\overline{\omega}$도 $x^2+x+1=0$의 근이다.

$$\therefore \omega^2+\omega+1=0,\ \overline{\omega}^2+\overline{\omega}+1=0,$$

$$\omega^3=1,\ \omega+\overline{\omega}=-1,\ \omega\overline{\omega}=1$$

ㄱ. $1+\omega+\omega^2+\omega^3+\cdots+\omega^{100}$

$$=\underbrace{(1+\omega+\omega^2)}_{0}+\omega^3\underbrace{(1+\omega+\omega^2)}_{0}+\cdots+\omega^{96}\underbrace{(1+\omega+\omega^2)}_{0}$$

$$+(\underbrace{\omega^3}_{1})^{33}+(\underbrace{\omega^3}_{1})^{33}\cdot\omega$$

$$=\omega+1$$

ㄴ. $(1+\omega)(1+\omega^2)(1+\omega^3)(1+\omega^4)(1+\omega^5)$

$$=(1+\omega)(1+\omega^2)(1+1)(1+\omega)(1+\omega^2)$$

$$=2(1+\omega)^2(1+\omega^2)^2$$

$$=2(-\omega^2)^2(-\omega)^2$$

$$=2\omega^6=2$$

ㄷ. $\dfrac{1}{1-\omega}+\dfrac{1}{1-\overline{\omega}}=\dfrac{1-\overline{\omega}+1-\omega}{(1-\omega)(1-\overline{\omega})}=\dfrac{2-(\omega+\overline{\omega})}{1-(\omega+\overline{\omega})+\omega\overline{\omega}}$

$$=\frac{2-(-1)}{1-(-1)+1}=1$$

ㄹ. $\dfrac{\omega^2}{1+\omega}+\dfrac{\overline{\omega}}{1+\overline{\omega}^2}=\dfrac{\omega^2}{-\omega^2}+\dfrac{\overline{\omega}}{-\overline{\omega}}=-2$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ②

0733 $x^3=-1$에서 $x^3+1=0$, 즉 $(x+1)(x^2-x+1)=0$이므로 ω는 $x^2-x+1=0$의 한 허근이다.

따라서 $\omega^2-\omega+1=0$이므로 $\omega^2=\omega-1$

$$\therefore \frac{\omega-1}{\omega^2}+\frac{\omega^2}{\omega-1}=\frac{\omega^2}{\omega^2}+\frac{\omega^2}{\omega^2}=2$$

답 2

0734 $\omega=\dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}$에서 $2\omega-1=-\sqrt{3}i$

양변을 제곱하면 $4\omega^2-4\omega+1=-3$

$$4\omega^2-4\omega+4=0 \qquad \therefore \omega^2-\omega+1=0$$

양변에 $\omega+1$을 곱하면　$(\omega+1)(\omega^2-\omega+1)=0$

$\omega^3+1=0$　$\therefore \omega^3=-1$

$\therefore \omega^{2022}+\dfrac{1}{\omega^{2022}}=(\omega^3)^{674}+\dfrac{1}{(\omega^3)^{674}}$

$=1+1=2$　답 ⑤

0735 $x^3+1=0$에서 $(x+1)(x^2-x+1)=0$이므로 ω는 $x^2-x+1=0$의 한 허근이고, ω의 켤레복소수인 $\overline{\omega}$도 $x^2-x+1=0$의 근이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\omega+\overline{\omega}=1$, $\omega\overline{\omega}=1$

$$\therefore \frac{(\omega-1)\overline{(\omega-1)}}{(3\omega+1)\overline{(3\omega+1)}}=\frac{(\omega-1)(\overline{\omega}-1)}{(3\omega+1)(3\overline{\omega}+1)}$$

$$=\frac{\omega\overline{\omega}-(\omega+\overline{\omega})+1}{9\omega\overline{\omega}+3(\omega+\overline{\omega})+1}$$

$$=\frac{1-1+1}{9\cdot1+3\cdot1+1}=\frac{1}{13}$$

답 ④

SSEN 특강　켤레복소수의 성질

두 복소수 z_1, z_2의 켤레복소수를 각각 $\overline{z_1}$, $\overline{z_2}$라 할 때

① $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$　② $\overline{z_1-z_2}=\overline{z_1}-\overline{z_2}$

③ $\overline{z_1z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$　④ $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}=\dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$ (단, $z_2\neq0$)

0736 $x^3=-1$에서 $x^3+1=0$, 즉 $(x+1)(x^2-x+1)=0$이므로 ω는 $x^2-x+1=0$의 한 허근이고, ω의 켤레복소수인 $\overline{\omega}$도 $x^2-x+1=0$의 근이다.

$\therefore \omega^2-\omega+1=0$, $\omega^3=-1$, $\omega+\overline{\omega}=1$, $\omega\overline{\omega}=1$

$(\omega-1)^n=\left(\dfrac{\overline{\omega}}{\omega+\overline{\omega}}\right)^n$에서

$(\omega-1)^n=(\omega^2)^n=\omega^{2n}$, $\left(\dfrac{\overline{\omega}}{\omega+\overline{\omega}}\right)^n=(\overline{\omega})^n=\left(\dfrac{1}{\omega}\right)^n=\dfrac{1}{\omega^n}$

이므로　$\omega^{2n}=\dfrac{1}{\omega^n}$

양변에 ω^n을 곱하면

$\omega^{3n}=1$, 즉 $(-1)^n=1$

따라서 자연수 n은 짝수이어야 하므로 조건을 만족시키는 50 이하의 자연수 n은 25개이다.　답 25

0737 $x^3=1$에서 $x^3-1=0$, 즉 $(x-1)(x^2+x+1)=0$이므로 ω는 $x^2+x+1=0$의 한 허근이다.

$\therefore \omega^2+\omega+1=0$, $\omega^3=1$　⋯ ❶

이때

$f(1)=\dfrac{\omega}{1+\omega^2}=\dfrac{\omega}{-\omega}=-1$,

$f(2)=\dfrac{\omega^2}{1+\omega^4}=\dfrac{\omega^2}{1+\omega}=\dfrac{\omega^2}{-\omega^2}=-1$,

$f(3)=\dfrac{\omega^3}{1+\omega^6}=\dfrac{1}{2}$,

$f(4)=\dfrac{\omega^4}{1+\omega^8}=\dfrac{\omega}{1+\omega^2}=f(1)$,

$f(5)=\dfrac{\omega^5}{1+\omega^{10}}=\dfrac{\omega^2}{1+\omega^4}=f(2)$,

$f(6)=\dfrac{\omega^6}{1+\omega^{12}}=\dfrac{\omega^3}{1+\omega^6}=f(3)$,

⋮

이므로

$f(1)=f(4)=f(7)=\cdots=f(16)=-1$,

$f(2)=f(5)=f(8)=\cdots=f(17)=-1$,

$f(3)=f(6)=f(9)=\cdots=f(18)=\dfrac{1}{2}$　⋯ ❷

$\therefore f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(18)$

$=\left(-1-1+\dfrac{1}{2}\right)\cdot6=-9$　⋯ ❸

답 -9

채점 기준	비율
❶ $\omega^2+\omega+1=0$, $\omega^3=1$임을 알 수 있다.	20 %
❷ $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $\cdots$, $f(18)$의 값을 구할 수 있다.	60 %
❸ $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(18)$의 값을 구할 수 있다.	20 %

유형 11 삼차방정식과 사차방정식의 활용

본책 108쪽

삼차방정식과 사차방정식의 활용 문제를 풀 때에는 다음과 같은 순서로 한다.

(i) 문제의 의미를 파악하여 구하는 것을 x로 놓는다.

(ii) 주어진 조건을 이용하여 방정식을 세운다.

(iii) 방정식을 풀고 구한 해가 문제의 뜻에 맞는지 확인한다.

0738 처음 정육면체의 한 모서리의 길이를 $x$cm라 하면

$\underbrace{(x-1)(x+2)(x+3)}_{\text{직육면체의 부피}}=\underbrace{\dfrac{5}{2}x^3}_{\text{처음 정육면체의 부피}}$

$3x^3-8x^2-2x+12=0$

$(x-2)(3x^2-2x-6)=0$

$\therefore x=2$ 또는 $x=\dfrac{1\pm\sqrt{19}}{3}$

그런데 x는 자연수이므로　$x=2$

따라서 처음 정육면체의 한 모서리의 길이는 2cm이다.

답 ①

0739 $\pi x^2(x-2)=75\pi$이므로

$x^3-2x^2-75=0$,　$(x-5)(x^2+3x+15)=0$

$\therefore x=5$ 또는 $x=\dfrac{-3\pm\sqrt{51}i}{2}$

그런데 $\underbrace{x>2}_{x-2>0\text{이므로 } x>2}$이므로　$x=5$　답 5

0740 원기둥의 밑면의 반지름의 길이를 $x$cm라 하면 원기둥의 높이는 $(x+3)$cm이므로 용기의 전체 부피는

$\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{4}{3}\pi x^3+\pi x^2(x+3)=72\pi$

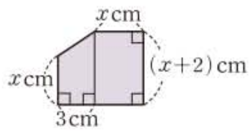
$5x^3+9x^2-216=0$,　$(x-3)(5x^2+24x+72)=0$

$\therefore x=3$ 또는 $x=\dfrac{-12\pm6\sqrt{6}i}{5}$

그런데 $x>0$이므로 $\quad x=3$

따라서 밑면의 반지름의 길이는 3 cm이다. 답 ②

0741 밑면인 오각형은 오른쪽 그림과 같이 직사각형과 사다리꼴로 나눌 수 있으므로



(밑넓이)

$=x(x+2)+\frac{1}{2}\cdot\{x+(x+2)\}\cdot 3$

$=x^2+2x+\frac{3}{2}(2x+2)$

$=x^2+5x+3\ (\text{cm}^2)$

이때 오각기둥의 높이는 $(x+1)$ cm이고, 부피가 195 cm^3이므로

$(x^2+5x+3)(x+1)=195$

$x^3+6x^2+8x-192=0, \quad (x-4)(x^2+10x+48)=0$

$\therefore x=4$ 또는 $x=-5\pm\sqrt{23}i$

그런데 $x>0$이므로 $\quad x=4$ 답 4

유형 12 $\begin{cases}\text{일차방정식}\\\text{이차방정식}\end{cases}$ **꼴의 연립이차방정식** 본책 108쪽

일차방정식과 이차방정식으로 이루어진 연립이차방정식은 다음과 같은 순서로 푼다.
(i) 일차방정식을 x 또는 y에 대하여 정리한다.
(ii) (i)의 식을 이차방정식에 대입하여 푼다.

0742 $\begin{cases}2x+y=1 & \cdots\cdots ㉠\\ x^2+y^2=13 & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$

㉠에서 $\quad y=1-2x \quad \cdots\cdots ㉢$

㉢을 ㉡에 대입하면

$x^2+(1-2x)^2=13, \quad 5x^2-4x-12=0$

$(5x+6)(x-2)=0$

$\therefore x=-\frac{6}{5}$ 또는 $x=2$

이것을 ㉢에 대입하면 주어진 연립방정식의 해는

$x=-\frac{6}{5},\ y=\frac{17}{5}$ 또는 $x=2,\ y=-3$

$\therefore \alpha+\beta=\frac{11}{5}$ 또는 $\alpha+\beta=-1$

따라서 $\alpha+\beta$의 값이 될 수 있는 것은 ③이다. 답 ③

0743 $\begin{cases}x-y=2 & \cdots\cdots ㉠\\ (x-2)^2+y^2=18 & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$

㉠에서 $\quad x-2=y \quad \cdots\cdots ㉢$

㉢을 ㉡에 대입하면

$y^2+y^2=18, \quad y^2=9$

$\therefore y=\pm 3$

이것을 ㉢에 대입하면 주어진 연립방정식의 해는

$x=5,\ y=3$ 또는 $x=-1,\ y=-3$

따라서 $\alpha=5,\ \beta=3$이므로

$\alpha\beta=15$ 답 ④

0744 $\begin{cases}x-3y=1 & \cdots\cdots ㉠\\ x^2-xy=2 & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$

㉠에서 $\quad x=3y+1 \quad \cdots\cdots ㉢$

㉢을 ㉡에 대입하면

$(3y+1)^2-(3y+1)y=2$

$6y^2+5y-1=0, \quad (y+1)(6y-1)=0$

$\therefore y=-1$ 또는 $y=\frac{1}{6}$

이것을 ㉢에 대입하면 주어진 연립방정식의 해는

$x=-2,\ y=-1$ 또는 $x=\frac{3}{2},\ y=\frac{1}{6}$

$\therefore x-y=-1$ 또는 $x-y=\frac{4}{3}$

따라서 $x-y$의 최솟값은 -1이다. 답 -1

0745 두 연립방정식의 공통인 해는 연립방정식

$\begin{cases}x-y=-1 & \cdots\cdots ㉠\\ x^2-3y^2=-11 & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$

을 만족시킨다.

㉠에서 $\quad y=x+1 \quad \cdots\cdots ㉢$

㉢을 ㉡에 대입하면

$x^2-3(x+1)^2=-11, \quad x^2+3x-4=0$

$(x+4)(x-1)=0 \quad \therefore x=-4$ 또는 $x=1$

이것을 ㉢에 대입하면 위의 연립방정식의 해는

$x=-4,\ y=-3$ 또는 $x=1,\ y=2$ ··· ❶

(i) $x=-4,\ y=-3$을 $x^2+ay^2=9,\ 2x+by=8$에 각각 대입하면

$16+9a=9, \ -8-3b=8$

$\therefore a=-\frac{7}{9},\ b=-\frac{16}{3}$

(ii) $x=1,\ y=2$를 $x^2+ay^2=9,\ 2x+by=8$에 각각 대입하면

$1+4a=9,\ 2+2b=8$

$\therefore a=2,\ b=3$

(i), (ii)에서 a, b는 자연수이므로

$a=2,\ b=3$ ··· ❷

$\therefore a^2+b^2=13$ ··· ❸

답 13

채점 기준	비율
❶ 연립방정식 $\begin{cases}x-y=-1\\x^2-3y^2=-11\end{cases}$의 해를 구할 수 있다.	40 %
❷ 자연수 a, b의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ a^2+b^2의 값을 구할 수 있다.	20 %

유형 13 $\begin{cases}\text{이차방정식}\\\text{이차방정식}\end{cases}$ **꼴의 연립이차방정식** 본책 109쪽

두 개의 이차방정식으로 이루어진 연립이차방정식은 다음과 같은 순서로 푼다.
(i) 인수분해가 되는 이차방정식을 두 일차식의 곱으로 인수분해하여 일차방정식을 얻는다.
(ii) (i)의 일차방정식을 다른 이차방정식에 대입하여 푼다.

0746 $\begin{cases} x^2-y^2=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2-xy+2y^2=8 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $(x-y)(x+y)=0$

$\therefore y=x$ 또는 $y=-x$

(i) $y=x$를 ㉡에 대입하면

$x^2-x^2+2x^2=8,\quad x^2=4$

$\therefore x=\pm2,\ y=\pm2$ (복호동순)

(ii) $y=-x$를 ㉡에 대입하면

$x^2+x^2+2x^2=8,\quad x^2=2$

$\therefore x=\pm\sqrt{2},\ y=\mp\sqrt{2}$ (복호동순)

(i), (ii)에서 해가 아닌 것은 ⑤이다.

답 ⑤

0747 $\begin{cases} 3x^2-4xy+y^2=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+y^2=10 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $(3x-y)(x-y)=0$

$\therefore y=3x$ 또는 $y=x$

(i) $y=3x$를 ㉡에 대입하면

$x^2+9x^2=10,\quad x^2=1$

$\therefore x=\pm1,\ y=\pm3$ (복호동순)

(ii) $y=x$를 ㉡에 대입하면

$x^2+x^2=10,\quad x^2=5$

$\therefore x=\pm\sqrt{5},\ y=\pm\sqrt{5}$ (복호동순)

(i), (ii)에서 x, y는 정수이므로

$x=\pm1,\ y=\pm3$ (복호동순) $\quad\therefore xy=3$

답 3

0748 $\begin{cases} 2x^2-xy-y^2=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+xy+y^2=3 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $(2x+y)(x-y)=0$

$\therefore y=-2x$ 또는 $y=x$

(i) $y=-2x$를 ㉡에 대입하면

$x^2-2x^2+4x^2=3,\quad x^2=1$

$\therefore x=\pm1,\ y=\mp2$ (복호동순)

$\therefore \alpha+\beta=-1$ 또는 $\alpha+\beta=1$

(ii) $y=x$를 ㉡에 대입하면

$x^2+x^2+x^2=3,\quad x^2=1$

$\therefore x=\pm1,\ y=\pm1$ (복호동순)

$\therefore \alpha+\beta=2$ 또는 $\alpha+\beta=-2$

(i), (ii)에서 $\alpha+\beta$의 최댓값은 2이다.

답 2

유형 14 대칭형의 연립이차방정식

본책 109쪽

x, y에 대한 대칭식인 연립이차방정식은 다음과 같은 순서로 푼다.

(i) $x+y=u$, $xy=v$로 놓는다.

(ii) 주어진 식을 u, v에 대한 식으로 변형하여 연립방정식을 푼다.

(iii) x, y가 이차방정식 $t^2-ut+v=0$의 두 근임을 이용한다.

0749 $x+y=u$, $xy=v$로 놓으면 주어진 연립방정식은

$\begin{cases} u-v=1 & \cdots\cdots ㉠ \\ u^2-v=7 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

$x^2+xy+y^2=(x+y)^2-xy=u^2-v$

㉠에서 $v=u-1 \quad\cdots\cdots ㉢$

㉢을 ㉡에 대입하면

$u^2-(u-1)=7,\quad u^2-u-6=0$

$(u+2)(u-3)=0\quad \therefore u=-2$ 또는 $u=3$

이것을 ㉢에 대입하면

$u=-2,\ v=-3$ 또는 $u=3,\ v=2$

(i) $u=-2$, $v=-3$, 즉 $x+y=-2$, $xy=-3$일 때,

x, y는 이차방정식 $t^2+2t-3=0$의 두 근이므로

$(t+3)(t-1)=0\quad \therefore t=-3$ 또는 $t=1$

$\therefore \begin{cases} x=-3 \\ y=1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=1 \\ y=-3 \end{cases}$

(ii) $u=3$, $v=2$, 즉 $x+y=3$, $xy=2$일 때,

x, y는 이차방정식 $t^2-3t+2=0$의 두 근이므로

$(t-1)(t-2)=0\quad \therefore t=1$ 또는 $t=2$

$\therefore \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$

(i), (ii)에서 구하는 순서쌍 (x, y)는

$(-3, 1), (1, -3), (1, 2), (2, 1)$

답 $(-3, 1), (1, -3), (1, 2), (2, 1)$

0750 $x+y=u$, $xy=v$로 놓으면 주어진 연립방정식은

$\begin{cases} u^2-2v=58 & \cdots\cdots ㉠ \\ v=21 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉡을 ㉠에 대입하면

$u^2-42=58,\quad u^2=100\quad \therefore u=\pm10$ ··· ❶

(i) $u=10$, $v=21$, 즉 $x+y=10$, $xy=21$일 때,

x, y는 이차방정식 $t^2-10t+21=0$의 두 근이므로

$(t-3)(t-7)=0\quad \therefore t=3$ 또는 $t=7$

$\therefore \begin{cases} x=3 \\ y=7 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=7 \\ y=3 \end{cases}$ ··· ❷

(ii) $u=-10$, $v=21$, 즉 $x+y=-10$, $xy=21$일 때,

x, y는 이차방정식 $t^2+10t+21=0$의 두 근이므로

$(t+3)(t+7)=0\quad \therefore t=-3$ 또는 $t=-7$

$\therefore \begin{cases} x=-3 \\ y=-7 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-7 \\ y=-3 \end{cases}$ ··· ❸

(i), (ii)에서 구하는 해는

$\begin{cases} x=3 \\ y=7 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=7 \\ y=3 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-3 \\ y=-7 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-7 \\ y=-3 \end{cases}$ ··· ❹

답 $\begin{cases} x=3 \\ y=7 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=7 \\ y=3 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-3 \\ y=-7 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=-7 \\ y=-3 \end{cases}$

채점 기준	비율
❶ $x+y=u$, $xy=v$로 놓고 u, v의 값을 구할 수 있다.	30 %
❷ $u=10$, $v=21$인 경우의 해를 구할 수 있다.	30 %
❸ $u=-10$, $v=21$인 경우의 해를 구할 수 있다.	30 %
❹ 연립방정식의 해를 모두 구할 수 있다.	10 %

0751 $x+y=u$, $xy=v$로 놓으면 주어진 연립방정식은

$\begin{cases} u+v=11 \\ uv=30 \end{cases}$

u, v는 이차방정식 $s^2-11s+30=0$의 두 근이므로

$(s-5)(s-6)=0\quad \therefore s=5$ 또는 $s=6$

$\therefore \begin{cases} u=5 \\ v=6 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} u=6 \\ v=5 \end{cases}$

(i) $u=5,\ v=6$, 즉 $x+y=5,\ xy=6$일 때,
$x,\ y$는 이차방정식 $t^2-5t+6=0$의 두 근이므로
$(t-2)(t-3)=0 \qquad \therefore t=2$ 또는 $t=3$
$\therefore \begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases}$
$\therefore x-y=-1$ 또는 $x-y=1$

(ii) $u=6,\ v=5$, 즉 $x+y=6,\ xy=5$일 때,
$x,\ y$는 이차방정식 $t^2-6t+5=0$의 두 근이므로
$(t-1)(t-5)=0 \qquad \therefore t=1$ 또는 $t=5$
$\therefore \begin{cases} x=1 \\ y=5 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x=5 \\ y=1 \end{cases}$
$\therefore x-y=-4$ 또는 $x-y=4$

(i), (ii)에서 $x-y$의 최솟값은 -4이다. 답 -4

유형 15 연립이차방정식의 해의 조건 본책 110쪽

일차방정식과 이차방정식으로 이루어진 연립이차방정식이 오직 한 쌍의 해를 갖거나 실근을 가지면 일차방정식을 이차방정식에 대입한 후 이차방정식의 판별식을 이용한다.

0752 $\begin{cases} x^2+y^2=5 & \cdots\cdots ㉠ \\ 2x+y=k & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉡에서 $y=-2x+k$
이것을 ㉠에 대입하면 $x^2+(-2x+k)^2=5$
$\therefore 5x^2-4kx+k^2-5=0$
이를 만족시키는 x의 값이 오직 한 개 존재해야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=(-2k)^2-5(k^2-5)=0$
$4k^2-5k^2+25=0, \qquad k^2=25 \qquad \therefore k=\pm5$
따라서 모든 실수 k의 값의 곱은
$5\cdot(-5)=-25$ 답 ⑤

0753 $\begin{cases} x-y=3 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+xy+k=0 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $y=x-3$
이것을 ㉡에 대입하면 $x^2+x(x-3)+k=0$
$\therefore 2x^2-3x+k=0$
이를 만족시키는 실수 x의 값이 존재해야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면
$D=(-3)^2-4\cdot2\cdot k\ge0$
$9-8k\ge0 \qquad \therefore k\le\frac{9}{8}$
따라서 실수 k의 최댓값은 $\frac{9}{8}$이다. 답 $\frac{9}{8}$

0754 주어진 연립방정식을 만족시키는 실수 $x,\ y$는 이차방정식 $t^2-2(a-2)t+a^2-4=0$의 두 실근이므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=\{-(a-2)\}^2-(a^2-4)\ge0$
$-4a+8\ge0 \qquad \therefore a\le2$
따라서 자연수 a는 1, 2이므로 구하는 합은 3이다. 답 3

유형 16 연립이차방정식의 활용 본책 110쪽

연립이차방정식의 활용 문제를 풀 때에는 다음과 같은 순서로 한다.
(i) 구하려는 것을 미지수로 놓고 연립방정식을 세운다.
(ii) 연립방정식을 풀고 구한 해가 문제의 뜻에 맞는지 확인한다.

0755 처음 땅의 가로의 길이를 x km, 세로의 길이를 y km라 하면
$\begin{cases} x^2+y^2=13 & \cdots\cdots ㉠ \\ (x+1)(y+1)=xy+6 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$
㉡에서 $xy+x+y+1=xy+6$
$\therefore y=5-x \quad \cdots\cdots ㉢$
㉢을 ㉠에 대입하면
$x^2+(5-x)^2=13, \qquad x^2-5x+6=0$
$(x-2)(x-3)=0 \qquad \therefore x=2$ 또는 $x=3$
이것을 ㉢에 대입하면
$x=2,\ y=3$ 또는 $x=3,\ y=2$
따라서 처음 땅의 가로의 길이와 세로의 길이의 차는
$3-2=1$(km) 답 ①

다른 풀이 ㉡에서 $x+y=5$
이때 $(x+y)^2=x^2+y^2+2xy$이므로
$25=13+2xy \qquad \therefore xy=6$
따라서 $(x-y)^2=(x+y)^2-4xy=5^2-4\cdot6=1$이므로
$|x-y|=1$
즉 처음 땅의 가로의 길이와 세로의 길이의 차는 1 km이다.

0756 처음 수의 십의 자리의 숫자를 x, 일의 자리의 숫자를 y라 하면
$\begin{cases} x^2+y^2=40 & \cdots\cdots ㉠ \\ \underbrace{(10y+x)}_{\text{바꾼 수}}+\underbrace{(10x+y)}_{\text{처음 수}}=88 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$ ··· ❶
㉡에서 $11x+11y=88$
$\therefore y=8-x \quad \cdots\cdots ㉢$
㉢을 ㉠에 대입하면
$x^2+(8-x)^2=40, \qquad x^2-8x+12=0$
$(x-2)(x-6)=0 \qquad \therefore x=2$ 또는 $x=6$
이것을 ㉢에 대입하면
$x=2,\ y=6$ 또는 $x=6,\ y=2$
그런데 $x>y$이므로 $x=6,\ y=2$ ··· ❷
따라서 처음 수는 62이다. ··· ❸
답 62

채점 기준	비율
❶ 연립이차방정식을 세울 수 있다.	40 %
❷ 연립이차방정식의 해를 구할 수 있다.	50 %
❸ 처음 수를 구할 수 있다.	10 %

0757 직각삼각형의 빗변이 아닌 두 변의 길이를 각각 x cm, y cm라 하면 직각삼각형의 빗변의 길이가 20 cm이고 둘레의 길이가 48 cm이므로

$$\begin{cases} x^2+y^2=400 & \cdots\cdots ㉠ \\ x+y+20=48 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉡에서 $y=28-x$ ...... ㉢

㉢을 ㉠에 대입하면

$x^2+(28-x)^2=400,\quad x^2-28x+192=0$

$(x-12)(x-16)=0 \quad \therefore x=12$ 또는 $x=16$

이것을 ㉢에 대입하면

$x=12,\ y=16$ 또는 $x=16,\ y=12$

따라서 직각삼각형의 빗변이 아닌 두 변의 길이는 12 cm, 16 cm이다.

답 12 cm, 16 cm

0758 양식장의 가로, 세로의 길이를 각각 x m, y m라 하면

$$\begin{cases} x^2+y^2=4100 & \cdots\cdots ㉠ \\ xy=2000 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠, ㉡에서 $(x+y)^2=x^2+y^2+2xy=8100$

이때 $x>0$, $y>0$이므로 $x+y=90$

$\therefore y=90-x$ ...... ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면

$x(90-x)=2000,\quad x^2-90x+2000=0$

$(x-40)(x-50)=0 \quad \therefore x=40$ 또는 $x=50$

이것을 ㉢에 대입하면

$x=40,\ y=50$ 또는 $x=50,\ y=40$

그런데 $x>y$이므로 $x=50,\ y=40$

따라서 양식장의 가로의 길이는 50 m이다.

답 50 m

유형 17 정수 조건의 부정방정식 (본책 111쪽)

x, y가 정수 (또는 자연수)라는 조건이 주어진 $xy+ax+by+c=0$ (a, b, c는 정수) 꼴의 부정방정식은

$x(y+a)+b(y+a)=ab-c$, 즉 $(x+b)(y+a)=ab-c$

로 변형하여 $x+b$, $y+a$가 $ab-c$의 약수임을 이용한다.

0759 $xy+x+y-3=0$에서

$x(y+1)+(y+1)-4=0$

$\therefore (x+1)(y+1)=4$

x, y가 정수이므로

(i) $x+1=-4$, $y+1=-1$일 때,
$x=-5,\ y=-2 \quad \therefore xy=10$

(ii) $x+1=-2$, $y+1=-2$일 때,
$x=-3,\ y=-3 \quad \therefore xy=9$

(iii) $x+1=-1$, $y+1=-4$일 때,
$x=-2,\ y=-5 \quad \therefore xy=10$

(iv) $x+1=1$, $y+1=4$일 때,
$x=0,\ y=3 \quad \therefore xy=0$

(v) $x+1=2$, $y+1=2$일 때,
$x=1,\ y=1 \quad \therefore xy=1$

(vi) $x+1=4$, $y+1=1$일 때,
$x=3,\ y=0 \quad \therefore xy=0$

이상에서 xy의 최댓값은 10이다.

답 ④

0760 $xy-x-2y-2=0$에서

$x(y-1)-2(y-1)-4=0$

$\therefore (x-2)(y-1)=4$

x, y가 자연수이므로 $x-2\ge-1$, $y-1\ge0$ — $x\ge1$, $y\ge1$

(i) $x-2=1$, $y-1=4$일 때, $x=3,\ y=5$

(ii) $x-2=2$, $y-1=2$일 때, $x=4,\ y=3$

(iii) $x-2=4$, $y-1=1$일 때, $x=6,\ y=2$

이상에서 자연수 x, y의 순서쌍은

$(3,\ 5),\ (4,\ 3),\ (6,\ 2)$

답 $(3,\ 5),\ (4,\ 3),\ (6,\ 2)$

0761 이차방정식 $x^2-(a-3)x+a-2=0$의 두 근을 α, β라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=a-3$ ...... ㉠

$\alpha\beta=a-2$ ...... ㉡

㉡−㉠을 하면 $\alpha\beta-\alpha-\beta=1$

$\alpha(\beta-1)-(\beta-1)-1=1$

$\therefore (\alpha-1)(\beta-1)=2$

α, β가 정수이므로

(i) $\alpha-1=-2$, $\beta-1=-1$일 때,
$\alpha=-1,\ \beta=0$

(ii) $\alpha-1=-1$, $\beta-1=-2$일 때,
$\alpha=0,\ \beta=-1$

(iii) $\alpha-1=1$, $\beta-1=2$일 때,
$\alpha=2,\ \beta=3$

(iv) $\alpha-1=2$, $\beta-1=1$일 때,
$\alpha=3,\ \beta=2$

(i), (ii)에서 $\alpha+\beta=-1$이므로 ㉠에 대입하면 $a=2$

(iii), (iv)에서 $\alpha+\beta=5$이므로 ㉠에 대입하면 $a=8$

따라서 모든 a의 값의 합은 10이다.

답 10

유형 18 실수 조건의 부정방정식 (본책 111쪽)

① 실수 A, B에 대하여 $A^2+B^2=0$이면 $A=0$, $B=0$임을 이용한다.

② 실수 x, y에 대한 이차방정식이 주어지면
➡ 한 문자에 대하여 내림차순으로 정리한 후 판별식 D가 $D\ge0$임을 이용한다.

0762 $2x^2+4xy+5y^2-4x+2y+5=0$에서

$(x^2+4xy+4y^2)+(x^2-4x+4)+(y^2+2y+1)=0$

$\therefore (x+2y)^2+(x-2)^2+(y+1)^2=0$

이때 x, y가 실수이므로

$x+2y=0,\ x-2=0,\ y+1=0 \quad \therefore x=2,\ y=-1$

$\therefore x-y=3$

답 ④

06 여러 가지 방정식

0763 $4x^2-4xy+2y^2+6y+9=0$에서

$(4x^2-4xy+y^2)+(y^2+6y+9)=0$

$\therefore (2x-y)^2+(y+3)^2=0$

이때 x, y가 실수이므로

$2x-y=0,\ y+3=0 \qquad \therefore x=-\frac{3}{2},\ y=-3$

$\therefore x+y=-\frac{9}{2}$ 답 ③

0764 $x^2-2(y+1)x+y^2-3=0$을 만족시키는 x, y가 음의 정수이므로 주어진 이차방정식이 실근을 가져야 한다.

x에 대한 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=\{-(y+1)\}^2-(y^2-3)\ge 0$

$2y+4\ge 0 \qquad \therefore y\ge -2$

그런데 y는 음의 정수이므로 $\quad y=-1$ 또는 $y=-2$ ···➊

(i) $y=-1$일 때, $x^2-2=0$이므로

$x^2=2 \qquad \therefore x=\pm\sqrt{2}$

그런데 이것은 x가 음의 정수라는 조건을 만족시키지 않는다. ···➋

(ii) $y=-2$일 때, $x^2+2x+1=0$이므로

$(x+1)^2=0 \qquad \therefore x=-1$ ···➌

(i), (ii)에서 $x=-1$, $y=-2$이므로

$xy=2$ ···➍

답 2

채점 기준	비율
➊ y의 값을 구할 수 있다.	40 %
➋ $y=-1$일 때 음의 정수 x는 존재하지 않음을 알 수 있다.	20 %
➌ $y=-2$일 때 x의 값을 구할 수 있다.	20 %
➍ xy의 값을 구할 수 있다.	20 %

0765 전략 방정식 $P(x)=0$의 한 근이 α이면 방정식 $P(ax+b)=0$에서 $ax+b=\alpha$임을 이용한다.

풀이 방정식 $P(x)=0$의 세 근이 α, β, γ이므로 방정식 $P(3x-1)=0$에서

$3x-1=\alpha$ 또는 $3x-1=\beta$ 또는 $3x-1=\gamma$

$\therefore x=\frac{\alpha+1}{3}$ 또는 $x=\frac{\beta+1}{3}$ 또는 $x=\frac{\gamma+1}{3}$

$\therefore \frac{\alpha+1}{3}+\frac{\beta+1}{3}+\frac{\gamma+1}{3}=\frac{(\alpha+\beta+\gamma)+3}{3}$

$=\frac{15+3}{3}=6$ 답 6

0766 전략 공통부분이 나오도록 묶어서 전개한 후 공통부분을 한 문자로 치환하여 인수분해한다.

풀이 $(x^2-4x+3)(x^2-6x+8)=120$에서

$(x-1)(x-3)(x-2)(x-4)=120$

$\{(x-1)(x-4)\}\{(x-2)(x-3)\}=120$

$(x^2-5x+4)(x^2-5x+6)=120$

$x^2-5x=X$로 놓으면 주어진 방정식은

$(X+4)(X+6)=120, \qquad X^2+10X-96=0$

$(X-6)(X+16)=0$

$(x^2-5x-6)(x^2-5x+16)=0$

$(x+1)(x-6)(x^2-5x+16)=0$

따라서 ω는 방정식 $x^2-5x+16=0$의 한 허근이므로

$\omega^2-5\omega+16=0 \qquad \therefore \omega^2-5\omega=-16$ 답 ①

0767 전략 다항식 $P(x)$를 인수분해하여 방정식 $P(x)=0$의 근을 구한다.

풀이 ㄱ. $P(\sqrt{n})=(\sqrt{n})^4+(\sqrt{n})^2-n^2-n$

$=n^2+n-n^2-n=0$

ㄴ. $P(x)=x^4+x^2-n(n+1)=(x^2-n)(x^2+n+1)$이므로

$P(x)=0$에서

$x^2=n$ 또는 $x^2=-n-1$

$\therefore x=\pm\sqrt{n}$ 또는 $x=\pm\sqrt{n+1}i$

따라서 방정식 $P(x)=0$의 실근의 개수는 2이다.

ㄷ. 모든 정수 k에 대하여

$P(k)=(k^2-n)(k^2+n+1)$

이고 $k^2+n+1>0$이므로 $P(k)\neq 0$을 만족시키려면

$k^2-n\neq 0$, 즉 $n\neq k^2$이어야 한다.

따라서 n의 값은 2, 3, 5, 6, 7, 8이므로 그 합은

$2+3+5+6+7+8=31$ $1=1^2,\ 4=2^2,\ 9=3^2$

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다. 답 ⑤

0768 전략 주어진 방정식에 $x=1$을 대입하여 m의 값이 될 수 있는 수를 찾는다.

풀이 주어진 방정식에 $x=1$을 대입하면

$1+(2m+1)+4-(m^2+3)=0$

$m^2-2m-3=0, \qquad (m+1)(m-3)=0$

$\therefore m=-1$ 또는 $m=3$

(i) $m=-1$일 때, $\qquad x^3-x^2+4x-4=0$

$x^2(x-1)+4(x-1)=0, \qquad (x-1)(x^2+4)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=\pm 2i$

그런데 이것은 두 개의 음의 정수인 근을 갖는다는 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $m=3$일 때, $\qquad x^3+7x^2+4x-12=0$

$P(x)=x^3+7x^2+4x-12$라 하면

$P(1)=0$

조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & 7 & 4 & -12 \\ & & 1 & 8 & 12 \\ \hline & 1 & 8 & 12 & \boxed{0} \end{array}$$

$P(x)=(x-1)(x^2+8x+12)$

$=(x-1)(x+6)(x+2)$

따라서 주어진 방정식은

$(x-1)(x+6)(x+2)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=-6$ 또는 $x=-2$

(i), (ii)에서 $\qquad m=3$ 답 ⑤

0769 전략 인수정리와 조립제법을 이용하여 주어진 삼차방정식의 좌변을 인수분해한다.

풀이 $P(x)=ax^3+2bx^2+4bx+8a$라 하면

$P(-2)=-8a+8b-8b+8a=0$

조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & a & 2b & 4b & 8a \\ & & -2a & 4(a-b) & -8a \\ \hline & a & -2(a-b) & 4a & \boxed{0} \end{array}$$

$\therefore P(x)=(x+2)\{ax^2-2(a-b)x+4a\}$

삼차방정식 $P(x)=0$이 서로 다른 세 정수를 근으로 가지려면 이차방정식 $ax^2-2(a-b)x+4a=0$은 $x\neq-2$인 서로 다른 두 정수를 근으로 가져야 한다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 곱이 $\frac{4a}{a}=4$이므로 가능한 두 근은

1, 4 또는 -1, -4

따라서 두 근의 합은 5 또는 -5이어야 하므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\frac{2(a-b)}{a}=5$ 또는 $\frac{2(a-b)}{a}=-5$

$\therefore b=-\frac{3}{2}a$ 또는 $b=\frac{7}{2}a$

(i) $b=-\frac{3}{2}a$일 때, 순서쌍 (a, b)는

$(2, -3), (4, -6), \cdots, (32, -48)$,

$(-2, 3), (-4, 6), \cdots, (-32, 48)$

의 32개이다.

(ii) $b=\frac{7}{2}a$일 때, 순서쌍 (a, b)는

$(2, 7), (4, 14), \cdots, (14, 49)$,

$(-2, -7), (-4, -14), \cdots, (-14, -49)$

의 14개이다.

(i), (ii)에서 순서쌍 (a, b)의 개수는

$32+14=46$

답 46

0770 전략 a, b, c를 세 근으로 하는 삼차방정식을 찾은 후 삼차방정식의 근과 계수의 관계를 이용한다.

풀이 조건 (가)에서 $a^3-5a^2+2a+33-(a^2+b^2+c^2)=0$

조건 (나)에서 $b^3-5b^2+2b+33-(a^2+b^2+c^2)=0$

조건 (다)에서 $c^3-5c^2+2c+33-(a^2+b^2+c^2)=0$

따라서 a, b, c는 x에 대한 삼차방정식

$x^3-5x^2+2x+33-(a^2+b^2+c^2)=0$

의 세 근이다. ··· ❶

삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$a+b+c=5,\ ab+bc+ca=2,\ abc=-33+a^2+b^2+c^2$

$\therefore abc=-33+(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$

$=-33+5^2-2\cdot2$

$=-12$ ··· ❷

답 -12

채점 기준	비율
❶ a, b, c를 세 근으로 하는 삼차방정식을 구할 수 있다.	50 %
❷ abc의 값을 구할 수 있다.	50 %

0771 전략 삼차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 α, β, γ 사이의 관계식을 구한다.

풀이 삼차방정식 $x^3-3x^2+2x-1=0$에서 근과 계수의 관계에 의하여

$\frac{1}{\alpha\beta}+\frac{1}{\beta\gamma}+\frac{1}{\gamma\alpha}=3$,

$\frac{1}{\alpha\beta}\cdot\frac{1}{\beta\gamma}+\frac{1}{\beta\gamma}\cdot\frac{1}{\gamma\alpha}+\frac{1}{\gamma\alpha}\cdot\frac{1}{\alpha\beta}=2$,

$\frac{1}{\alpha\beta}\cdot\frac{1}{\beta\gamma}\cdot\frac{1}{\gamma\alpha}=1$

$\therefore \frac{\alpha+\beta+\gamma}{\alpha\beta\gamma}=3,\ \frac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{(\alpha\beta\gamma)^2}=2,\ \frac{1}{(\alpha\beta\gamma)^2}=1$

······ ㉠ ··· ❶

이때 α, β, γ가 삼차방정식 $x^3+ax^2+bx+c=0$의 세 근이므로

$\alpha+\beta+\gamma=-a,\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=b,\ \alpha\beta\gamma=-c$

이것을 ㉠의 각 식에 대입하면

$\frac{a}{c}=3,\ \frac{b}{c^2}=2,\ \frac{1}{c^2}=1$

따라서 $a=3c,\ b=2c^2,\ c^2=1$이므로

$a^2=9,\ b^2=4,\ c^2=1$

$\therefore a^2+b^2+c^2=14$ ··· ❷

답 14

채점 기준	비율
❶ 삼차방정식 $x^3-3x^2+2x-1=0$에서 근과 계수의 관계를 이용하여 α, β, γ 사이의 관계식을 구할 수 있다.	50 %
❷ $a^2+b^2+c^2$의 값을 구할 수 있다.	50 %

0772 전략 사차방정식의 좌변을 인수분해한 후 삼차방정식의 근과 계수의 관계를 이용한다.

풀이 $Q(x)=x^4-x^3-x^2-4$라 하면

$Q(2)=16-8-4-4=0$

조립제법을 이용하여 $Q(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} 2 & 1 & -1 & -1 & 0 & -4 \\ & & 2 & 2 & 2 & 4 \\ \hline & 1 & 1 & 1 & 2 & \boxed{0} \end{array}$$

$Q(x)$

$=(x-2)(x^3+x^2+x+2)$

따라서 주어진 방정식은

$(x-2)(x^3+x^2+x+2)=0$

$a=2$라 하면 나머지 세 근 b, c, d는 삼차방정식 $x^3+x^2+x+2=0$의 근이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$b+c+d=-1$

한편

$P(x)=x^6-x^5-x^4-4x^2-x$

$=x^2(x^4-x^3-x^2-4)-x$

$=x^2Q(x)-x$

이고 $Q(a)=0,\ Q(b)=0,\ Q(c)=0,\ Q(d)=0$이므로

$P(a)=-a,\ P(b)=-b,\ P(c)=-c,\ P(d)=-d$

$\therefore P(a)+P(b)+P(c)+P(d)=-a-b-c-d$

$=-2-(b+c+d)$

$=-2-(-1)$

$=-1$

답 -1

06 여러 가지 방정식

0773 전략 계수가 실수이므로 $3-4i$도 방정식 $P(x)=0$의 한 근이다.

풀이 방정식 $P(x)=0$의 계수가 실수이므로 $3+4i$가 근이면 $3-4i$도 근이다. 나머지 한 근을 α라 하면 방정식 $P(2x+1)=0$에서

$2x+1=\alpha$ 또는 $2x+1=3+4i$ 또는 $2x+1=3-4i$

$\therefore x=\dfrac{\alpha-1}{2}$ 또는 $x=1+2i$ 또는 $x=1-2i$ ⋯ ❶

이때 방정식 $P(2x+1)=0$의 세 근의 곱이 15이므로

$\dfrac{\alpha-1}{2}\cdot(1+2i)\cdot(1-2i)=15$

$\dfrac{\alpha-1}{2}=3$ $\quad\therefore \alpha=7$ ⋯ ❷

7, $3+4i$, $3-4i$를 세 근으로 하고 x^3의 계수가 1인 삼차방정식은

$x^3-\{7+(3+4i)+(3-4i)\}x^2$
$+\{7\cdot(3+4i)+(3+4i)(3-4i)+(3-4i)\cdot 7\}x$
$-7\cdot(3+4i)(3-4i)=0$

$\therefore x^3-13x^2+67x-175=0$

$\therefore P(x)=x^3-13x^2+67x-175$ ⋯ ❸

따라서 삼차식 $P(x)$의 이차항의 계수와 일차항의 계수의 합은

$-13+67=54$ ⋯ ❹

답 54

채점 기준	비율
❶ 방정식 $P(2x+1)=0$의 세 근을 구할 수 있다.	30 %
❷ 방정식 $P(x)=0$의 나머지 한 근을 구할 수 있다.	30 %
❸ $P(x)$를 구할 수 있다.	30 %
❹ $P(x)$의 이차항의 계수와 일차항의 계수의 합을 구할 수 있다.	10 %

0774 전략 계수가 유리수인 삼차방정식의 한 근이 $p+q\sqrt{m}$ (p, q는 유리수, $q\neq0$, $\sqrt{m}$은 무리수)이면 $p-q\sqrt{m}$도 근임을 이용한다.

풀이 조건 (가)에서 $P(x)$는 $x-2$를 인수로 가지므로 2는 방정식 $P(x)=0$의 한 근이다.

조건 (나)에서 방정식 $P(x)=0$의 한 근이 $\sqrt{2}-1$이고 계수가 유리수이므로 $-\sqrt{2}-1$도 근이다.

삼차방정식 $(2x-1)^3+a(2x-1)^2+b(2x-1)+c=0$, 즉 $P(2x-1)=0$에서

$2x-1=2$ 또는 $2x-1=\sqrt{2}-1$ 또는 $2x-1=-\sqrt{2}-1$

$\therefore x=\dfrac{3}{2}$ 또는 $x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 또는 $x=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

따라서 모든 근의 곱은

$\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\dfrac{3}{4}$

답 ③

0775 전략 겉넓이를 x에 대한 식으로 나타낸 후 인수분해를 이용한다.

풀이 처음 직육면체의 겉넓이는

$2\cdot x\cdot x^2+2\cdot x(x-2)+2\cdot x^2(x-2)=4x^3-2x^2-4x$

정육면체를 잘라내면서 줄어든 겉넓이는 $2(x-2)^2$이고 정육면체를 붙이면서 추가된 겉넓이는 $4(x-2)^2$이므로

$4x^3-2x^2-4x-2(x-2)^2+4(x-2)^2=80$

$4x^3-2x^2-4x+2(x-2)^2-80=0$

$4x^3-12x-72=0$ $\quad\therefore x^3-3x-18=0$

$P(x)=x^3-3x-18$이라 하면

$P(3)=27-9-18=0$

조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{c|cccc} 3 & 1 & 0 & -3 & -18 \\ & & 3 & 9 & 18 \\ \hline & 1 & 3 & 6 & 0 \end{array}$$

$P(x)=(x-3)(x^2+3x+6)$

따라서 방정식 $P(x)=0$의 근은

$x=3$ 또는 $x=\dfrac{-3\pm\sqrt{15}\,i}{2}$

그런데 $\underbrace{x>2}_{x-2>0\text{에서}}$이므로 $\quad x=3$

$x>2$

답 ②

0776 전략 $x\geq y$, $x<y$인 경우로 나누어 연립방정식을 푼다.

풀이 (i) $x\geq y$일 때,

$\max(x,\ y)=x$, $\min(x,\ y)=y$이므로 주어진 연립방정식은

$\begin{cases} x-y-2=2y & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2-xy+y^2=x+16 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $\quad x=3y+2$ ⋯⋯ ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면

$(3y+2)^2-(3y+2)y+y^2=(3y+2)+16$

$7y^2+7y-14=0$, $\quad y^2+y-2=0$

$(y+2)(y-1)=0$ $\quad\therefore y=-2$ 또는 $y=1$

이것을 ㉢에 대입하면

$x=-4$, $y=-2$ 또는 $x=5$, $y=1$

그런데 $x\geq y$이므로 $\quad x=5$, $y=1$

(ii) $x<y$일 때,

$\max(x,\ y)=y$, $\min(x,\ y)=x$이므로 주어진 연립방정식은

$\begin{cases} x-y-2=2x & \cdots\cdots ㉣ \\ x^2-xy+y^2=y+16 & \cdots\cdots ㉤ \end{cases}$

㉣에서 $\quad y=-x-2$ ⋯⋯ ㉥

㉥을 ㉤에 대입하면

$x^2-x(-x-2)+(-x-2)^2=(-x-2)+16$

$3x^2+7x-10=0$, $\quad (3x+10)(x-1)=0$

$\therefore x=-\dfrac{10}{3}$ 또는 $x=1$

이것을 ㉥에 대입하면

$x=-\dfrac{10}{3}$, $y=\dfrac{4}{3}$ 또는 $x=1$, $y=-3$

그런데 $x<y$이므로 $\quad x=-\dfrac{10}{3}$, $y=\dfrac{4}{3}$

(i), (ii)에서 순서쌍 $(x,\ y)$는 $\quad (5,\ 1)$, $\left(-\dfrac{10}{3},\ \dfrac{4}{3}\right)$

$\therefore \alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2=5+\left(-\dfrac{40}{9}\right)=\dfrac{5}{9}$

답 ③

0777 전략 $\overline{AD}=2n$ (n은 자연수)으로 놓고 $\overline{AC}$, $\overline{BC}$, $\overline{AB}$의 길이를 구한다.

풀이 $\overline{AD}$, $\overline{AC}$, $\overline{BC}$, $\overline{AB}$가 이 순서대로 네 개의 연속된 짝수이므로 $\overline{AD}=2n$ (n은 자연수)이라 하면

$\overline{AC}=2n+2$, $\overline{BC}=2n+4$, $\overline{AB}=2n+6$

$\overline{BD}=x$, $\overline{CD}=y$라 하면

$x+y=2n+4$ ⋯⋯ ㉠

$\triangle$ABD와 $\triangle$ACD는 빗변이 각각 $\overline{AB}$, $\overline{AC}$인 직각삼각형이므로

$\overline{AB}^2-\overline{BD}^2=\overline{AC}^2-\overline{CD}^2$

$(2n+6)^2-x^2=(2n+2)^2-y^2$

$(x+y)(x-y)=8(2n+4)$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$x-y=8$ …… ㉢

㉠, ㉢을 연립하여 풀면

$x=n+6,\ y=n-2$

$\triangle$ACD에서 $\overline{AC}^2=\overline{AD}^2+\overline{CD}^2$

$(2n+2)^2=(2n)^2+(n-2)^2$

$n^2-12n=0, \quad n(n-12)=0$

$\therefore n=12$ ($\because$ n은 자연수)

따라서 $\overline{AB}=30$, $\overline{AC}=26$이므로

$S=\pi\cdot 15^2+\pi\cdot 13^2=394\pi$

$\therefore \dfrac{S}{\pi}=394$

답 394

0778 전략 두 원 A, B의 반지름의 길이를 각각 x, y로 놓고 x, y에 대한 연립방정식을 세운다.

풀이 두 원 A, B의 반지름의 길이를 각각 x, y라 하면 두 원 A, B의 지름의 길이의 합이 32이므로

$2x+2y=32, \quad x+y=16$

$\therefore x=16-y$ …… ㉠ ⋯ ❶

또 원 C의 지름의 길이는 $2x-2y$이므로 원 D의 반지름의 길이는

(원 A의 지름의 길이)$-$(원 B의 지름의 길이)

$\dfrac{1}{2}\{2y-(2x-2y)\}=-x+2y$

(원 D의 지름의 길이)
$=$(원 B의 지름의 길이)
$-$(원 C의 지름의 길이)

두 원 A, D의 넓이의 차가 96π이므로

$\pi x^2-\pi(-x+2y)^2=96\pi$

$x^2-(x^2-4xy+4y^2)=96$

$4xy-4y^2=96$

$\therefore xy-y^2=24$ …… ㉡ ⋯ ❷

㉠을 ㉡에 대입하면

$(16-y)y-y^2=24, \quad y^2-8y+12=0$

$(y-2)(y-6)=0 \quad \therefore y=2$ 또는 $y=6$

이것을 ㉠에 대입하면

$x=14,\ y=2$ 또는 $x=10,\ y=6$

그런데 $x=14$, $y=2$이면 원 D의 반지름의 길이가 음수이므로

$-x+2y=-14+4=-10<0$

$x=10,\ y=6$

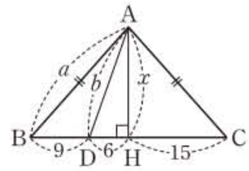
따라서 원 B의 반지름의 길이는 6이다. ⋯ ❸

답 6

채점 기준	비율
❶ 두 원 A, B의 지름의 길이의 합이 32임을 이용하여 식을 세울 수 있다.	30 %
❷ 두 원 A, D의 넓이의 차가 96π임을 이용하여 식을 세울 수 있다.	40 %
❸ 원 B의 반지름의 길이를 구할 수 있다.	30 %

0779 전략 점 A에서 변 BC에 수선의 발을 내린 후 피타고라스 정리를 이용한다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 점 A에서 변 BC에 내린 수선의 발을 H라 하면 삼각형 ABC는 이등변삼각형이므로



$\overline{BH}=\overline{CH}=\dfrac{9+21}{2}=15$

$\therefore \overline{DH}=15-9=6$

또 $\overline{AH}=x$, $\overline{AB}=a$, $\overline{AD}=b$라 하면 두 직각삼각형 ABH, ADH에서

$a^2=x^2+15^2=x^2+225$ …… ㉠

$b^2=x^2+6^2=x^2+36$ …… ㉡

㉠$-$㉡을 하면 $a^2-b^2=189$

$\therefore (a+b)(a-b)=189$

이때 $a>15$, $b>6$에서 $a+b>21$이고, a, b는 자연수이므로

(i) $a+b=27$, $a-b=7$일 때, $a=17$, $b=10$

(ii) $a+b=63$, $a-b=3$일 때, $a=33$, $b=30$

(iii) $a+b=189$, $a-b=1$일 때, $a=95$, $b=94$

이상에서 가능한 모든 $\triangle$ABC의 둘레의 길이의 합은

$(17\cdot 2+30)+(33\cdot 2+30)+(95\cdot 2+30)=380$

답 ④

0780 전략 주어진 식을 $A^2+B^2=0$ 꼴로 정리한다.

풀이 $x^2y^2+x^2+9y^2-8xy+1=0$에서

$(x^2y^2-2xy+1)+(x^2-6xy+9y^2)=0$

$\therefore (xy-1)^2+(x-3y)^2=0$ ⋯ ❶

이때 x, y는 실수이므로

$xy-1=0,\ x-3y=0$

$\therefore xy=1,\ x=3y$

$x=3y$를 $xy=1$에 대입하면

$3y^2=1 \quad \therefore y^2=\dfrac{1}{3}$

이때 $x=3y$에서 $x^2=9y^2$이므로 $x^2=3$ ⋯ ❷

$\therefore 6(x^2+y^2)=6\cdot\left(3+\dfrac{1}{3}\right)=20$ ⋯ ❸

답 20

채점 기준	비율
❶ 주어진 식을 $A^2+B^2=0$ 꼴로 정리할 수 있다.	40 %
❷ x^2, y^2의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $6(x^2+y^2)$의 값을 구할 수 있다.	20 %

07 일차부등식

0781 $b<a$의 양변에 a를 더하면

$b+a<a+a$　　$\therefore a+b<2a$　　답 $a+b<2a$

0782 $b<0$이므로 $b<a$의 양변에 b를 곱하면

$b^2>ab$　　답 $ab<b^2$

0783 $b<a$의 양변에 3을 곱하면

$3b<3a$

이 식의 양변에 1을 더하면

$3b+1<3a+1$　　답 $3a+1>3b+1$

0784 $b<a$의 양변에 $-\frac{1}{2}$을 곱하면

$-\frac{1}{2}b>-\frac{1}{2}a$

이 식의 양변에 5를 더하면

$-\frac{1}{2}b+5>-\frac{1}{2}a+5$　　답 $-\frac{1}{2}a+5<-\frac{1}{2}b+5$

0785 $2\le x\le 4$의 각 변에서 2를 빼면

$0\le x-2\le 2$　　답 $0\le x-2\le 2$

0786 $2\le x\le 4$의 각 변에 3을 곱하면

$6\le 3x\le 12$　　답 $6\le 3x\le 12$

0787 $2\le x\le 4$의 각 변에 -1을 곱하면

$-4\le -x\le -2$　　답 $-4\le -x\le -2$

0788 $2\le x\le 4$의 각 변의 역수를 취하면

$\frac{1}{4}\le\frac{1}{x}\le\frac{1}{2}$　　답 $\frac{1}{4}\le\frac{1}{x}\le\frac{1}{2}$

0789 $7x-8\ge 10x+4$에서　　$-3x\ge 12$

$\therefore x\le -4$　　답 $x\le -4$

0790 $4(x-3)<2x$에서　　$4x-12<2x$

$2x<12$　　$\therefore x<6$　　답 $x<6$

0791 $\frac{1}{3}x+\frac{1}{2}\le\frac{1}{2}x+1$의 양변에 6을 곱하면

$2x+3\le 3x+6$,　　$-x\le 3$

$\therefore x\ge -3$　　답 $x\ge -3$

0792 $0.2x>0.42-0.01x$의 양변에 100을 곱하면

$20x>42-x$,　　$21x>42$

$\therefore x>2$　　답 $x>2$

0793 $ax<a+2$에서

(i) $a>0$일 때,　　$x<\frac{a+2}{a}$

(ii) $a<0$일 때,　　$x>\frac{a+2}{a}$

(iii) $a=0$일 때, $0\cdot x<2$이므로 해는 모든 실수이다.

답 풀이 참조

0794 $(a-1)x>a$에서

(i) $a>1$일 때,　　$x>\frac{a}{a-1}$

(ii) $a<1$일 때,　　$x<\frac{a}{a-1}$

(iii) $a=1$일 때, $0\cdot x>1$이므로 해가 없다.　　답 풀이 참조

0795 $ax+1\ge a^2-x$에서　　$(a+1)x\ge a^2-1$

$(a+1)x\ge(a+1)(a-1)$

(i) $a>-1$일 때,　　$x\ge a-1$

(ii) $a<-1$일 때,　　$x\le a-1$

(iii) $a=-1$일 때, $0\cdot x\ge 0$이므로 해는 모든 실수이다.

답 풀이 참조

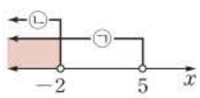
0796 $x+1<6$에서　　$x<5$　　…… ㉠

$5x-2<2x-8$에서　　$3x<-6$

$\therefore x<-2$　　…… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$x<-2$　　답 $x<-2$



0797 $2x+3<9$에서　　$2x<6$

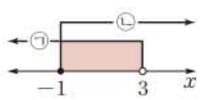
$\therefore x<3$　　…… ㉠

$4x+1\ge x-2$에서　　$3x\ge -3$

$\therefore x\ge -1$　　…… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$-1\le x<3$　　답 $-1\le x<3$



0798 $5(x+1)>x+3$에서　　$5x+5>x+3$

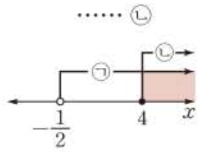
$4x>-2$　　$\therefore x>-\frac{1}{2}$　　…… ㉠

$x+5\le 3(x-1)$에서　　$x+5\le 3x-3$

$-2x\le -8$　　$\therefore x\ge 4$　　…… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$x\ge 4$　　답 $x\ge 4$



0799 $0.9x+1.3<-5$의 양변에 10을 곱하면

$9x+13<-50$,　　$9x<-63$

$\therefore x<-7$　　…… ㉠

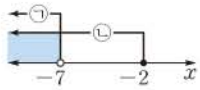
$\frac{5}{12}x-1\ge x+\frac{1}{6}$의 양변에 12를 곱하면

$5x-12 \geq 12x+2$,　　$-7x \geq 14$

$\therefore x \leq -2$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$x<-7$



답 $x<-7$

0800 $\frac{1}{3}x-2<\frac{1}{2}$의 양변에 6을 곱하면

$2x-12<3$,　　$2x<15$

$\therefore x<\frac{15}{2}$ …… ㉠

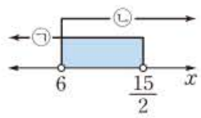
$1.3x-3.6>0.7x$의 양변에 10을 곱하면

$13x-36>7x$,　　$6x>36$

$\therefore x>6$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$6<x<\frac{15}{2}$　　답 $6<x<\frac{15}{2}$



0801 $0.4(x+1) \leq 0.2(x+2)$의 양변에 10을 곱하면

$4(x+1) \leq 2(x+2)$,　　$4x+4 \leq 2x+4$

$2x \leq 0$　　$\therefore x \leq 0$ …… ㉠

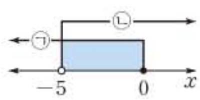
$\frac{x}{5}-\frac{x+5}{4}<-1$의 양변에 20을 곱하면

$4x-5(x+5)<-20$,　　$4x-5x-25<-20$

$-x<5$　　$\therefore x>-5$ …… ㉡

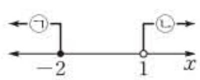
㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$-5<x \leq 0$　　답 $-5<x \leq 0$



0802 $\begin{cases} x \leq -2 & \cdots\cdots ㉠ \\ x>1 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠, ㉡의 공통부분이 없으므로 주어진 연립부등식의 해는 없다.



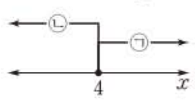
답 해는 없다.

0803 $x \geq 4$ …… ㉠

$x-4 \leq 0$에서　　$x \leq 4$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

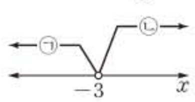
$x=4$　　답 $x=4$



0804 $x+3<0$에서　　$x<-3$ …… ㉠

$-2x<6$에서　　$x>-3$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분이 없으므로 주어진 연립부등식의 해는 없다.



답 해는 없다.

0805 $4x+7 \leq -5$에서　　$4x \leq -12$

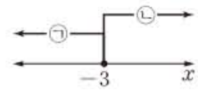
$\therefore x \leq -3$ …… ㉠

$2x+10 \geq 1-x$에서　　$3x \geq -9$

$\therefore x \geq -3$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$x=-3$　　답 $x=-3$

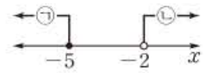


0806 $x-1 \leq -6$에서　　$x \leq -5$ …… ㉠

$3(x-4)<5x-8$에서　　$3x-12<5x-8$

$-2x<4$　　$\therefore x>-2$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분이 없으므로 주어진 연립부등식의 해는 없다.



답 해는 없다.

0807 $\frac{1}{2}(x+4) \leq 3x-13$의 양변에 2를 곱하면

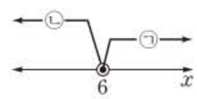
$x+4 \leq 6x-26$,　　$-5x \leq -30$

$\therefore x \geq 6$ …… ㉠

$-2x+11>x-7$에서　　$-3x>-18$

$\therefore x<6$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분이 없으므로 주어진 연립부등식의 해는 없다.



답 해는 없다.

0808 $-10 \leq 3x+2<4$에서　　$-12 \leq 3x<2$

$\therefore -4 \leq x<\frac{2}{3}$　　답 $-4 \leq x<\frac{2}{3}$

0809 $-9<5-2x \leq -1$에서　　$-14<-2x \leq -6$

$\therefore 3 \leq x<7$　　답 $3 \leq x<7$

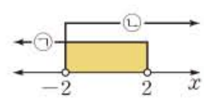
0810 (1) $5x-3<4x-1$에서　　$x<2$ …… ㉠

(2) $4x-1<7x+5$에서　　$-3x<6$

$\therefore x>-2$ …… ㉡

(3) ㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$-2<x<2$



답 (1) $x<2$　(2) $x>-2$　(3) $-2<x<2$

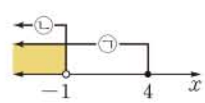
0811 $3x+1 \leq 2x+5$에서　　$x \leq 4$ …… ㉠

$2x+5<3$에서　　$2x<-2$

$\therefore x<-1$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$x<-1$　　답 $x<-1$



0812 $2x-1 \leq 3x+4$에서　　$-x \leq 5$

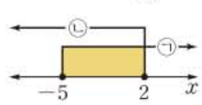
$\therefore x \geq -5$ …… ㉠

$3x+4 \leq x+8$에서　　$2x \leq 4$

$\therefore x \leq 2$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$-5 \leq x \leq 2$　　답 $-5 \leq x \leq 2$



0813 $|5-x|<4$에서 $\quad -4<5-x<4$

$-9<-x<-1 \quad \therefore 1<x<9$

답 $1<x<9$

0814 $|3x-2|\geq 5$에서 $\quad 3x-2\leq -5$ 또는 $3x-2\geq 5$

$3x\leq -3$ 또는 $3x\geq 7 \quad \therefore x\leq -1$ 또는 $x\geq \frac{7}{3}$

답 $x\leq -1$ 또는 $x\geq \frac{7}{3}$

0815 $1<|4x+1|<6$에서

$1<4x+1<6$ 또는 $-6<4x+1<-1$

(i) $1<4x+1<6$에서 $\quad 0<4x<5 \quad \therefore 0<x<\frac{5}{4}$

(ii) $-6<4x+1<-1$에서 $\quad -7<4x<-2$

$\therefore -\frac{7}{4}<x<-\frac{1}{2}$

(i), (ii)에서 주어진 부등식의 해는

$-\frac{7}{4}<x<-\frac{1}{2}$ 또는 $0<x<\frac{5}{4}$

답 $-\frac{7}{4}<x<-\frac{1}{2}$ 또는 $0<x<\frac{5}{4}$

0816 $|x+1|-|x-4|<3 \quad \cdots\cdots$ ㉠

(1) $x<-1$일 때, $x+1<0$, $x-4<0$이므로 부등식 ㉠은

$-(x+1)-\{-(x-4)\}<3, \quad -x-1+x-4<3$

$\therefore 0\cdot x<8$

따라서 부등식의 해는 모든 실수이다.

그런데 $x<-1$이므로 $\quad x<-1$

(2) $-1\leq x<4$일 때, $x+1\geq 0$, $x-4<0$이므로 부등식 ㉠은

$x+1-\{-(x-4)\}<3, \quad x+1+x-4<3$

$2x<6 \quad \therefore x<3$

그런데 $-1\leq x<4$이므로 $\quad -1\leq x<3$

(3) $x\geq 4$일 때, $x+1>0$, $x-4\geq 0$이므로 부등식 ㉠은

$x+1-(x-4)<3, \quad x+1-x+4<3$

$\therefore 0\cdot x<-2$

따라서 해는 없다.

(4) (1)~(3)에서 부등식 ㉠의 해는 $\quad x<3$

답 (1) $x<-1$ (2) $-1\leq x<3$ (3) 해는 없다. (4) $x<3$

유형 01 부등식의 기본 성질
본책 120쪽

실수 a, b, c에 대하여

① $a>b$, $b>c \Rightarrow a>c$

② $a>b \Rightarrow a+c>b+c$, $a-c>b-c$

③ $a>b$, $c>0 \Rightarrow ac>bc$, $\frac{a}{c}>\frac{b}{c}$

④ $a>b$, $c<0 \Rightarrow ac<bc$, $\frac{a}{c}<\frac{b}{c}$

0817 ㄴ. $c>b>0$이므로 $c>b$의 양변의 역수를 취하면

$\frac{1}{c}<\frac{1}{b}$

$a>0$이므로 양변에 a를 곱하면 $\quad \frac{a}{c}<\frac{a}{b}$

ㄷ. $a>b$에서 $\quad a-c>b-c \quad \cdots\cdots$ ㉠

$c<d$에서 $\quad -c>-d$

$\therefore b-c>b-d \quad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $\quad a-c>b-d$

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ③

다른 풀이 ㄴ. $\frac{a}{c}-\frac{a}{b}=\frac{ab-ac}{bc}=\frac{a(b-c)}{bc}$

이때 $0<a<b<c$에서 $a>0$, $bc>0$, $b-c<0$이므로

$\frac{a(b-c)}{bc}<0 \quad \therefore \frac{a}{c}<\frac{a}{b}$

ㄷ. $(a-c)-(b-d)=(a-b)-(c-d)$

이때 $a>b$에서 $a-b>0$, $c<d$에서 $c-d<0$이므로

$(a-b)-(c-d)>0 \quad \therefore a-c>b-d$

0818 ① $ac>bc$에서 $c<0$이면 $a<b$이다.

② $c^2>0$이므로 $\frac{a}{c^2}>\frac{b}{c^2}$의 양변에 c^2을 곱하면 $\quad a>b$

③ $a=1$, $b=-1$, $c=1$이면 $\frac{c^2}{a}>\frac{c^2}{b}$이지만 $a>b$이다.

④ $a=1$, $b=-1$, $c=-2$이면 $a>b>c$이지만 $ab<c^2$이다.

⑤ $a=\frac{1}{2}$, $b=\frac{1}{4}$이면 $a>b>0$이지만 $ab<b$이다.

답 ②

0819 ㄱ. $a<b$에서 $\quad -a>-b$

이때 $-a>0$, $-b>0$이므로 $\quad -\frac{1}{a}<-\frac{1}{b}$

양변에 -1을 곱하면 $\quad \frac{1}{a}>\frac{1}{b}$

ㄴ. $|a|>|b|$이므로 $\quad a^2>b^2$

$ab>0$이므로 양변을 ab로 나누면 $\quad \frac{a}{b}>\frac{b}{a}$

ㄷ. $a<b<0$에서 $\quad a^3<b^3$

$ab>0$이므로 양변을 ab로 나누면 $\quad \frac{a^2}{b}<\frac{b^2}{a}$

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

유형 02 부등식 $ax>b$의 풀이
본책 120쪽

부등식 $ax>b$의 해가

① $x>\alpha \Rightarrow a>0$, $\frac{b}{a}=\alpha$

② $x<\alpha \Rightarrow a<0$, $\frac{b}{a}=\alpha$

③ 없다. $\Rightarrow a=0$, $b\geq 0$

④ 모든 실수이다. $\Rightarrow a=0$, $b<0$

0820 $(1-a)x>a+b$의 해가 $x<-2$이므로 $\quad 1-a<0$

$\therefore x<\frac{a+b}{1-a}$

따라서 $\frac{a+b}{1-a}=-2$이므로 $\quad a+b=-2+2a$

$\therefore a-b=2$

이것을 $(a-b)x\geq 6$에 대입하면

$2x\geq 6 \quad \therefore x\geq 3$

답 ④

0821 $bx-2a>ax-2b$에서 $(b-a)x>-2(b-a)$

이때 $a>b$에서 $b-a<0$이므로 양변을 $b-a$로 나누면

$x<-2$ 답 $x<-2$

0822 $a+b=0$에서 $b=-a$ …… ㉠

㉠을 주어진 부등식에 대입하면

$(2a+a)x>3a-2a+8$ $\therefore 3ax>a+8$

이 부등식의 해가 $x<-1$이므로 $a<0$

$\therefore x<\dfrac{a+8}{3a}$

따라서 $\dfrac{a+8}{3a}=-1$이므로 $a+8=-3a$

$4a=-8$ $\therefore a=-2$

$a=-2$를 ㉠에 대입하면 $b=2$

$\therefore ab=-4$ 답 -4

0823 $(a-b)x+a-2b\le 0$에서 $(a-b)x\le -a+2b$

이 부등식을 만족시키는 x가 존재하지 않으려면

$a-b=0$, $-a+2b<0$ ··· ❶

$a-b=0$에서 $b=a$이므로

$-a+2a<0$ $\therefore a<0$ ··· ❷

$b=a$를 $(a-3b)x+a-5b>0$에 대입하면

$(a-3a)x+a-5a>0$ $\therefore -2ax>4a$

이때 $-2a>0$이므로 $x>-2$ ··· ❸

답 $x>-2$

채점 기준	비율
❶ 부등식 $(a-b)x+a-2b\le 0$을 만족시키는 x가 존재하지 않을 조건을 구할 수 있다.	40 %
❷ a의 값의 범위를 구할 수 있다.	20 %
❸ 부등식 $(a-3b)x+a-5b>0$의 해를 구할 수 있다.	40 %

유형 03 연립일차부등식의 풀이

본책 121쪽

연립일차부등식을 풀 때에는 각각의 일차부등식의 해를 구한 후, 구한 해를 수직선 위에 나타내어 공통부분을 찾는다.
이때 괄호가 있으면 분배법칙을 이용하여 괄호를 풀고, 계수가 소수 또는 분수이면 적당한 수를 곱하여 계수를 정수로 고친 후 부등식을 푼다.

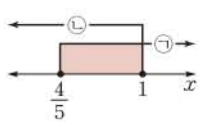
0824 $1-2x\le 3x-3$에서 $-5x\le -4$

$\therefore x\ge \dfrac{4}{5}$ …… ㉠

$4x-1\le x+2$에서 $3x\le 3$

$\therefore x\le 1$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면



$\dfrac{4}{5}\le x\le 1$

따라서 $a=\dfrac{4}{5}$, $b=1$이므로

$b-a=\dfrac{1}{5}$ 답 ①

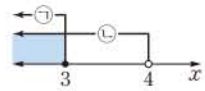
0825 $\dfrac{2}{3}x+0.4\ge x-0.6$에서 $20x+12\ge 30x-18$ (양변에 30을 곱한다.)

$-10x\ge -30$ $\therefore x\le 3$ …… ㉠

$5x<3(x+3)-1$에서 $5x<3x+9-1$

$2x<8$ $\therefore x<4$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면



$x\le 3$

따라서 자연수 x는 1, 2, 3의 3개이다.

답 3

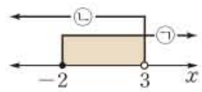
0826 $x+2\le 3(x+2)$에서 $x+2\le 3x+6$

$-2x\le 4$ $\therefore x\ge -2$ …… ㉠

$8-x>4(x-3)+5$에서 $8-x>4x-12+5$

$-5x>-15$ $\therefore x<3$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면



$-2\le x<3$ ··· ❶

이때 $-3<-x\le 2$이므로

$-1<-x+2\le 4$

$\therefore -1<A\le 4$ ··· ❷

따라서 A의 최댓값은 4이다. ··· ❸

답 4

채점 기준	비율
❶ 주어진 연립부등식의 해를 구할 수 있다.	50 %
❷ A의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %
❸ A의 최댓값을 구할 수 있다.	10 %

0827 $2(3-x)+8>5x-7$에서 $6-2x+8>5x-7$

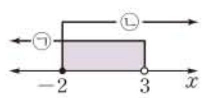
$-7x>-21$ $\therefore x<3$ …… ㉠

$\dfrac{-x-6}{4}\le \dfrac{2x+1}{3}$에서 $3(-x-6)\le 4(2x+1)$

$-3x-18\le 8x+4$, $-11x\le 22$

$\therefore x\ge -2$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면



$-2\le x<3$

$\therefore a=-2$, $b=3$

이것을 $ax-b<0$에 대입하면

$-2x-3<0$, $-2x<3$

$\therefore x>-\dfrac{3}{2}$

따라서 해가 아닌 것은 ①이다. 답 ①

유형 04 $A<B<C$ 꼴의 부등식의 풀이

본책 121쪽

① $A<B<C$ 꼴의 부등식은 연립부등식 $\begin{cases} A<B \\ B<C \end{cases}$ 꼴로 고쳐서 푼다.

② $c<ax+b<d$ 꼴의 부등식은 부등식의 기본 성질을 이용하여 푼다.

0828 $2(x-1)<x+4$에서 $\quad 2x-2<x+4$

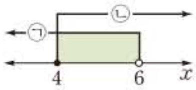
$\therefore x<6$ ...... ㉠

$x+4\le 2+3(x-2)$에서 $\quad x+4\le 3x-4$

$-2x\le -8 \quad \therefore x\ge 4$ ...... ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$4\le x<6$



따라서 정수 x는 4, 5이므로 구하는 합은

$4+5=9$

답 9

0829 $-5<\frac{1}{2}x+3<19$에서 $\quad -8<\frac{1}{2}x<16$

$\therefore -16<x<32$ ⋯ ❶

따라서 $a=-16$, $b=32$이므로

$a+b=16$ ⋯ ❷

답 16

채점 기준	비율
❶ 주어진 부등식의 해를 구할 수 있다.	70 %
❷ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	30 %

0830 $2x-3\le 3x+1$에서 $\quad -x\le 4$

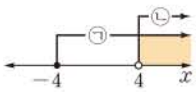
$\therefore x\ge -4$ ...... ㉠

$3x+1<5x-7$에서 $\quad -2x<-8$

$\therefore x>4$ ...... ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$x>4$ 답 ④



0831 $-3x+4\le 10$에서 $\quad -3x\le 6$

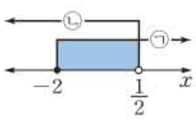
$\therefore x\ge -2$ ...... ㉠

$10<-2x+11$에서 $\quad 2x<1$

$\therefore x<\frac{1}{2}$ ...... ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$-2\le x<\frac{1}{2}$



ㄱ. 정수인 해는 -2, -1, 0의 3개이다.

ㄷ. $x=\frac{1}{2}$은 부등식의 해가 아니다.

이상에서 옳은 것은 ㄴ뿐이다. 답 ②

유형 05 특수한 해를 갖는 연립일차부등식

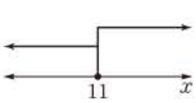
본책 122쪽

① 연립부등식의 해가 한 개인 경우
➡ 수직선에서 공통부분이 한 점뿐이다.

② 연립부등식의 해가 없는 경우
➡ 수직선에서 공통부분이 없다.

0832 ① 주어진 연립부등식의 해는

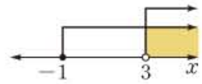
$x=11$



② $-2x<-6$에서 $\quad x>3$

따라서 주어진 연립부등식의 해는

$x>3$

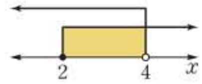


③ $5x-12<8$에서

$5x<20 \quad \therefore x<4$

따라서 주어진 연립부등식의 해는

$2\le x<4$

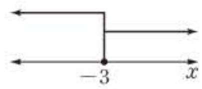


④ $0.5(x+6)\ge 1.5$에서 $\quad x+6\ge 3$

$\therefore x\ge -3$

따라서 주어진 연립부등식의 해는

$x=-3$

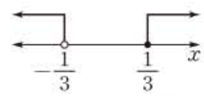


⑤ $7x-1<x-3$에서 $\quad 6x<-2 \quad \therefore x<-\frac{1}{3}$

$\frac{1}{3}x-\frac{1}{2}\ge\frac{x-5}{12}$에서 $\quad 4x-6\ge x-5$

$3x\ge 1 \quad \therefore x\ge\frac{1}{3}$

따라서 주어진 연립부등식의 해는 없다.



답 ⑤

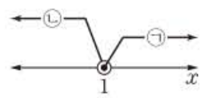
0833 $4x+3\ge x+6$에서 $\quad 3x\ge 3$

$\therefore x\ge 1$ ...... ㉠

$10-2x>9-x$에서 $\quad -x>-1$

$\therefore x<1$ ...... ㉡

㉠, ㉡의 공통부분이 없으므로 주어진 연립부등식의 해는 없다.



답 ⑤

0834 $\frac{5}{3}x-1\le x+\frac{7}{3}$에서 $\quad 5x-3\le 3x+7$

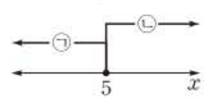
$2x\le 10 \quad \therefore x\le 5$ ...... ㉠ ⋯ ❶

$0.3(x-2)\ge 0.2x-0.1$에서 $\quad 3(x-2)\ge 2x-1$

$3x-6\ge 2x-1 \quad \therefore x\ge 5$ ...... ㉡ ⋯ ❷

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$x=5$ ⋯ ❸



답 $x=5$

채점 기준	비율
❶ 부등식 $\frac{5}{3}x-1\le x+\frac{7}{3}$의 해를 구할 수 있다.	40 %
❷ 부등식 $0.3(x-2)\ge 0.2x-0.1$의 해를 구할 수 있다.	40 %
❸ 연립부등식의 해를 구할 수 있다.	20 %

유형 06 해가 주어진 연립일차부등식

본책 122쪽

각 일차부등식을 풀어 연립부등식의 해가 주어진 해가 되기 위한 조건을 생각한다.

0835 $6x-1\le 2x+a$에서 $\quad 4x\le a+1$

$\therefore x\le\frac{a+1}{4}$

$x-3<2x+1$에서 $\quad -x<4$

$\therefore x>-4$

주어진 연립부등식의 해가 $b<x\le 3$이므로

$\dfrac{a+1}{4}=3,\ b=-4 \quad \therefore a=11,\ b=-4$

$\therefore a+b=7$

답 7

0836 $x+2a>0$에서 $\quad x>-2a$

$3x-b\ge 0$에서 $\quad x\ge \dfrac{b}{3}$

주어진 그림에서 $x>-2,\ x\ge 1$이므로

$-2a=-2,\ \dfrac{b}{3}=1 \quad \therefore a=1,\ b=3$

$\therefore ab=3$

답 ⑤

0837 $\dfrac{5x+a}{2}\le \dfrac{x}{4}+2$에서

$2(5x+a)\le x+8, \quad 10x+2a\le x+8$

$9x\le -2a+8 \quad \therefore x\le \dfrac{-2a+8}{9}$

$\dfrac{x}{2}-\dfrac{3x+1}{6}\ge \dfrac{x-2}{3}$에서

$3x-(3x+1)\ge 2(x-2), \quad 3x-3x-1\ge 2x-4$

$-2x\ge -3 \quad \therefore x\le \dfrac{3}{2}$

주어진 연립부등식의 해가 $x\le -\dfrac{1}{3}$이므로

$\dfrac{-2a+8}{9}=-\dfrac{1}{3}, \quad -2a+8=-3$

$-2a=-11 \quad \therefore a=\dfrac{11}{2}$

답 $\dfrac{11}{2}$

0838 $-x+7\ge 2x+a$에서 $\quad -3x\ge a-7$

$\therefore x\le \dfrac{7-a}{3}$

$3(x-1)\le 5x+b$에서 $\quad 3x-3\le 5x+b$

$-2x\le b+3 \quad \therefore x\ge -\dfrac{b+3}{2}$

주어진 연립부등식의 해가 $x=-1$이므로

$\dfrac{7-a}{3}=-1,\ -\dfrac{b+3}{2}=-1$

$7-a=-3,\ b+3=2 \quad \therefore a=10,\ b=-1$

$\therefore a-b=11$

답 ③

0839 $2x+a\le -x+5$에서 $\quad 3x\le 5-a$

$\therefore x\le \dfrac{5-a}{3}$ ······ ㉠

$-x+5\le b(x+3)$에서 $\quad -x+5\le bx+3b$

$(-1-b)x\le 3b-5$ ······ ㉡

이때 주어진 부등식의 해가 $-1\le x\le 2$이므로 부등식 ㉠의 해는 $x\le 2$, 부등식 ㉡의 해는 $x\ge -1$이어야 한다.

즉 $-1-b<0$이므로

$x\ge \dfrac{3b-5}{-1-b}$

따라서 $\dfrac{5-a}{3}=2,\ \dfrac{3b-5}{-1-b}=-1$이므로

$5-a=6,\ 3b-5=1+b \quad \therefore a=-1,\ b=3$

$\therefore b-a=4$

답 4

유형 07 해를 갖거나 갖지 않는 연립일차부등식

본책 123쪽

연립부등식에서 각각의 부등식의 해를 구한 후 이를 주어진 해의 조건에 맞게 수직선 위에 나타낸다.

① 연립부등식의 해가 없는 경우
➡ 공통부분이 없도록 해를 수직선 위에 나타낸다.

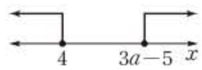
② 연립부등식이 해를 갖는 경우
➡ 공통부분이 있도록 해를 수직선 위에 나타낸다.

0840 $4x-3\le 13$에서 $\quad 4x\le 16$

$\therefore x\le 4$

$x+5\ge 3a$에서 $\quad x\ge 3a-5$

주어진 연립부등식이 해를 갖지 않으려면 오른쪽 그림에서



$3a-5>4, \quad 3a>9$

$\therefore a>3$

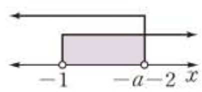
답 ④

0841 $\dfrac{8x+5}{3}<3x+2$에서 $\quad 8x+5<9x+6$

$-x<1 \quad \therefore x>-1$

$3x+2<2x-a$에서 $\quad x<-a-2$

주어진 부등식이 해를 가지려면 오른쪽 그림에서



$-a-2>-1, \quad -a>1$

$\therefore a<-1$

답 ②

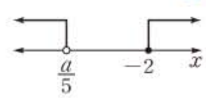
0842 $a+5x<2a$에서 $\quad 5x<a$

$\therefore x<\dfrac{a}{5}$

$2(x-1)\ge -6$에서 $\quad x-1\ge -3$

$\therefore x\ge -2$ ···➊

주어진 연립부등식이 해를 갖지 않으려면 오른쪽 그림에서



$\dfrac{a}{5}\le -2 \quad \therefore a\le -10$ ···➋

따라서 정수 a의 최댓값은 -10이다. ···➌

답 -10

채점 기준	비율
➊ 각 일차부등식의 해를 구할 수 있다.	40 %
➋ a의 값의 범위를 구할 수 있다.	50 %
➌ 정수 a의 최댓값을 구할 수 있다.	10 %

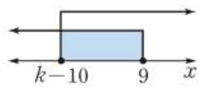
0843 $0.3x-1.7\le 1$에서 $\quad 3x-17\le 10$

$3x\le 27 \quad \therefore x\le 9$

$2(x-5)\le 3x-k$에서 $\quad 2x-10\le 3x-k$

$-x\le -k+10 \quad \therefore x\ge k-10$

주어진 연립부등식이 해를 가지려면 오른쪽 그림에서 $\quad k-10\le9$

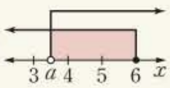


$\therefore\ k\le19$ $\qquad$ 답 $k\le19$

유형 08 정수인 해의 개수가 주어진 연립일차부등식 본책 123쪽

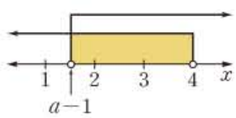
연립부등식의 정수인 해가 n개이면
(i) 각 부등식의 해를 수직선 위에 나타낸다.
(ii) 공통부분이 n개의 정수를 포함하도록 하는 미지수의 값의 범위를 구한다.

예 연립부등식 $\begin{cases} x\le6 \\ x>a \end{cases}$의 정수인 해가 3개이다.

➡ 

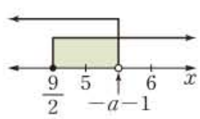
➡ $3\le a<4$
└ $a=3$이면 정수인 해는 4, 5, 6의 3개
$a=4$이면 정수인 해는 5, 6의 2개

0844 $0.4(x+1)>x-2$에서 $\quad 4(x+1)>10(x-2)$
$4x+4>10x-20,\quad -6x>-24$
$\therefore\ x<4$
$2x+a<3x+1$에서 $\quad -x<-a+1$
$\therefore\ x>a-1$
주어진 연립부등식을 만족시키는 정수 x가 2개이므로 오른쪽 그림에서



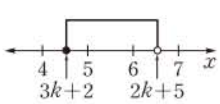
$1\le a-1<2$
$\therefore\ 2\le a<3$ $\qquad$ 답 ④

0845 $3x+8\le5x-1$에서 $\quad -2x\le-9$
$\therefore\ x\ge\frac{9}{2}$
$x-1>2x+a$에서 $\quad -x>a+1$
$\therefore\ x<-a-1$
주어진 연립부등식을 만족시키는 정수 x가 1개이므로 오른쪽 그림에서

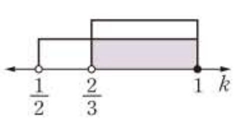


$5<-a-1\le6$
$6<-a\le7\quad\therefore\ -7\le a<-6$
따라서 a의 최솟값은 -7이다. $\qquad$ 답 -7

0846 주어진 부등식을 만족시키는 정수 x가 5와 6뿐이려면 오른쪽 그림에서



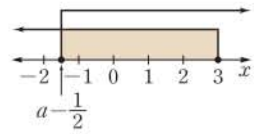
$4<3k+2\le5,\ 6<2k+5\le7$
을 동시에 만족시켜야 한다.
즉 $\frac{2}{3}<k\le1,\ \frac{1}{2}<k\le1$이므로 오른쪽 그림에서



$\frac{2}{3}<k\le1$ $\qquad$ 답 $\frac{2}{3}<k\le1$

0847 $\frac{x}{2}-\frac{a}{4}\ge\frac{x}{4}-\frac{1}{8}$에서 $\quad 4x-2a\ge2x-1$
$2x\ge2a-1\quad\therefore\ x\ge a-\frac{1}{2}$
$3x-1\ge5x-7$에서 $\quad -2x\ge-6$
$\therefore\ x\le3$ $\qquad$ ⋯ ❶

주어진 연립부등식을 만족시키는 음의 정수 x가 1개뿐이므로 오른쪽 그림에서



$-2<a-\frac{1}{2}\le-1$
$\therefore\ -\frac{3}{2}<a\le-\frac{1}{2}$ $\qquad$ ⋯ ❷

답 $-\frac{3}{2}<a\le-\frac{1}{2}$

채점 기준	비율
❶ 각 일차부등식의 해를 구할 수 있다.	50 %
❷ a의 값의 범위를 구할 수 있다.	50 %

유형 09 연립일차부등식의 활용 본책 124쪽

연립일차부등식의 활용 문제를 풀 때에는 다음과 같은 순서로 한다.
(i) 문제의 뜻을 이해하고 구하려는 것을 x로 놓는다.
(ii) 연립부등식을 세운다.
(iii) 연립부등식을 풀어 문제의 답을 구한다.

0848 의자의 개수를 x라 하면 학생은 $(4x+10)$명이므로
$5(x-8)+1\le4x+10\le5(x-8)+5$
$5(x-8)+1\le4x+10$에서
$5x-39\le4x+10\quad\therefore\ x\le49$ $\qquad$ …… ㉠
$4x+10\le5(x-8)+5$에서
$4x+10\le5x-35\quad\therefore\ x\ge45$ $\qquad$ …… ㉡
㉠, ㉡의 공통부분을 구하면
$45\le x\le49$
따라서 의자의 개수가 될 수 있는 것은 ②이다. $\qquad$ 답 ②

SSEN 특강 과부족에 대한 문제

한 의자에 a명씩 앉으면 n개의 의자가 남는다.
➡ 의자의 개수를 x라 하면
(i) 빈 의자의 개수: n
(ii) a명씩 앉은 의자의 개수: $x-(n+1)$
(iii) 마지막 1개의 의자에는 최소 1명에서 최대 a명까지 앉을 수 있다.
➡ $\begin{cases} \text{최소 인원: } a\{x-(n+1)\}+1(\text{명}) \\ \text{최대 인원: } a\{x-(n+1)\}+a(\text{명}) \end{cases}$

0849 초콜릿을 x개 산다고 하면 사탕은 $(14-x)$개 살 수 있으므로
$9400\le600(14-x)+800x\le10000$
$94\le84+2x\le100,\quad 10\le2x\le16$
$\therefore\ 5\le x\le8$
따라서 초콜릿은 5개 이상 8개 이하 살 수 있다. $\qquad$ 답 ③

0850 빵 A의 개수를 x라 하면 빵 B의 개수는 $10-x$이므로
$\begin{cases} 80x+100(10-x)\le900 \\ 30x+25(10-x)\le285 \end{cases}$

$80x+100(10-x)\le 900$에서

$-20x+1000\le 900,\qquad -20x\le -100$

$\therefore x\ge 5$ …… ㉠

$30x+25(10-x)\le 285$에서

$5x+250\le 285,\qquad 5x\le 35$

$\therefore x\le 7$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$5\le x\le 7$

따라서 빵 A는 최대 7개까지 만들 수 있다. 답 7개

0851 작년 남자 회원 수와 여자 회원 수를 각각 $5a$, $3a$라 하고, 올해 새로 가입한 남자 회원 수와 여자 회원 수를 각각 x라 하면

$(5a+x):(3a+x)=8:5,\qquad 25a+5x=24a+8x$

$\therefore a=3x$

즉 작년 남자 회원 수는 $15x$, 여자 회원 수는 $9x$이므로

$$\begin{cases} 15x+9x<500 \\ (15x+x)+(9x+x)>500 \end{cases}$$

$15x+9x<500$에서 $\qquad 24x<500$

$\therefore x<\dfrac{125}{6}$ …… ㉠

$(15x+x)+(9x+x)>500$에서 $\qquad 26x>500$

$\therefore x>\dfrac{250}{13}$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$\dfrac{250}{13}<x<\dfrac{125}{6}$

그런데 x는 자연수이므로 $\qquad x=20$

따라서 올해 가입한 남자 회원 수와 여자 회원 수가 각각 20이므로 구하는 합은

$20+20=40$ 답 ③

0852 농도가 30 %인 소금물 300 g에 들어 있는 소금의 양은

$\dfrac{30}{100}\cdot 300=90\,(\mathrm{g})$

농도가 10 %인 소금물을 x g 섞는다고 하면

$\dfrac{15}{100}(300+x)\le 90+\dfrac{10}{100}\cdot x\le \dfrac{18}{100}(300+x)$ … ❶

이 식의 양변에 100을 곱하면

$15(300+x)\le 9000+10x\le 18(300+x)$

$15(300+x)\le 9000+10x$에서

$4500+15x\le 9000+10x,\qquad 5x\le 4500$

$\therefore x\le 900$ …… ㉠

$9000+10x\le 18(300+x)$에서

$9000+10x\le 5400+18x,\qquad -8x\le -3600$

$\therefore x\ge 450$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$450\le x\le 900$ … ❷

따라서 농도가 10 %인 소금물을 450 g 이상 900 g 이하로 섞어야 한다. … ❸

답 450 g 이상 900 g 이하

채점 기준	비율
❶ 부등식을 세울 수 있다.	40 %
❷ 부등식의 해를 구할 수 있다.	50 %
❸ 농도가 10 %인 소금물의 양의 범위를 구할 수 있다.	10 %

유형 10 $|ax+b|<c$, $|ax+b|>c$ 꼴의 부등식 본책 124쪽

양수 c에 대하여

① $|ax+b|<c \Rightarrow -c<ax+b<c$

② $|ax+b|>c \Rightarrow ax+b<-c$ 또는 $ax+b>c$

0853 $|8-3x|>11$에서

$8-3x<-11$ 또는 $8-3x>11$

$\therefore x>\dfrac{19}{3}$ 또는 $x<-1$

따라서 주어진 부등식을 만족시키는 자연수 x의 최솟값은 7이다.

답 7

0854 $|3x-1|<5$에서 $\qquad -5<3x-1<5$

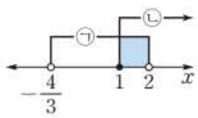
$\therefore -\dfrac{4}{3}<x<2$ …… ㉠

$9-x\ge -4x+12$에서 $\qquad 3x\ge 3$

$\therefore x\ge 1$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$1\le x<2$



따라서 주어진 연립부등식을 만족시키는 정수 x는 1의 1개이다.

답 ①

0855 $|x-a|<7$에서 $\qquad -7<x-a<7$

$\therefore a-7<x<a+7$

$a-7$이 정수이고 정수 x의 최솟값이 10이므로

$a-7=9\qquad \therefore a=16$ 답 16

0856 $|2x-a|\le 4$에서 $\qquad -4\le 2x-a\le 4$

$\therefore \dfrac{1}{2}a-2\le x\le \dfrac{1}{2}a+2$

주어진 부등식의 해가 $-1\le x\le b$이므로

$\dfrac{1}{2}a-2=-1,\ \dfrac{1}{2}a+2=b$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $\qquad a=2,\ b=3$

$\therefore ab=6$ 답 ⑤

0857 $|ax+3|>b$의 해가 $x<1$ 또는 $x>4$이므로

$b>0$

$|ax+3|>b$에서 $\qquad ax+3<-b$ 또는 $ax+3>b$

(i) $ax+3<-b$에서 $\qquad ax<-b-3$

이때 $a<0$이므로 $\qquad x>\dfrac{-b-3}{a}$

(ii) $ax+3>b$에서 $\qquad ax>b-3$

이때 $a<0$이므로 $\qquad x<\dfrac{b-3}{a}$

(i), (ii)에서 부등식의 해는

$x<\dfrac{b-3}{a}$ 또는 $x>\dfrac{-b-3}{a}$ ··· ❶

그런데 주어진 부등식의 해가 $x<1$ 또는 $x>4$이므로

$\dfrac{b-3}{a}=1$, $\dfrac{-b-3}{a}=4$

$\therefore a-b=-3$, $4a+b=-3$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=-\dfrac{6}{5}$, $b=\dfrac{9}{5}$ ··· ❷

$\therefore a+b=\dfrac{3}{5}$ ··· ❸

답 $\dfrac{3}{5}$

채점 기준	비율
❶ 부등식 $\lvert ax+3\rvert>b$의 해를 구할 수 있다.	50 %
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	10 %

유형 11 $|ax+b|<cx+d$ 꼴의 부등식

본책 125쪽

$|ax+b|<cx+d$ 꼴의 부등식은 절댓값 기호 안의 식의 값이 0이 되는 x의 값인 $-\dfrac{b}{a}$를 경계로 하여 x의 값의 범위를

$x<-\dfrac{b}{a}$, $x\geq-\dfrac{b}{a}$

로 나누어 푼다.

0858 $|3x-1|-5\leq x$에서

(i) $x<\dfrac{1}{3}$일 때, $3x-1<0$이므로

$-(3x-1)-5\leq x$, $-4x\leq4$

$\therefore x\geq-1$

그런데 $x<\dfrac{1}{3}$이므로 $-1\leq x<\dfrac{1}{3}$

(ii) $x\geq\dfrac{1}{3}$일 때, $3x-1\geq0$이므로

$3x-1-5\leq x$, $2x\leq6$

$\therefore x\leq3$

그런데 $x\geq\dfrac{1}{3}$이므로 $\dfrac{1}{3}\leq x\leq3$

(i), (ii)에서 주어진 부등식의 해는 $-1\leq x\leq3$

따라서 $a=-1$, $b=3$이므로 $a-b=-4$

답 ①

0859 $|3-x|\leq10-x$에서

(i) $x<3$일 때, $3-x>0$이므로

$3-x\leq10-x$ $\therefore 0\cdot x\leq7$

따라서 해는 모든 실수이다.

그런데 $x<3$이므로 $x<3$

(ii) $x\geq3$일 때, $3-x\leq0$이므로

$-(3-x)\leq10-x$, $2x\leq13$

$\therefore x\leq\dfrac{13}{2}$

그런데 $x\geq3$이므로 $3\leq x\leq\dfrac{13}{2}$

(i), (ii)에서 주어진 부등식의 해는 $x\leq\dfrac{13}{2}$

따라서 주어진 부등식을 만족시키는 자연수 x는 1, 2, 3, 4, 5, 6의 6개이다.

답 ④

0860 $x+1\leq|2x-4|$에서

(i) $x<2$일 때, $2x-4<0$이므로

$x+1\leq-(2x-4)$, $3x\leq3$

$\therefore x\leq1$

그런데 $x<2$이므로 $x\leq1$

(ii) $x\geq2$일 때, $2x-4\geq0$이므로

$x+1\leq2x-4$, $-x\leq-5$

$\therefore x\geq5$

그런데 $x\geq2$이므로 $x\geq5$

(i), (ii)에서 부등식 $x+1\leq|2x-4|$의 해는

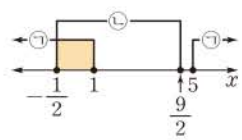
$x\leq1$ 또는 $x\geq5$ ······ ㉠

$|2x-4|\leq5$에서 $-5\leq2x-4\leq5$

$\therefore -\dfrac{1}{2}\leq x\leq\dfrac{9}{2}$ ······ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$-\dfrac{1}{2}\leq x\leq1$



답 $-\dfrac{1}{2}\leq x\leq1$

0861 $|x-1|<2x-3$에서

(i) $x<1$일 때, $x-1<0$이므로

$-(x-1)<2x-3$, $-3x<-4$

$\therefore x>\dfrac{4}{3}$

그런데 $x<1$이므로 해는 없다.

(ii) $x\geq1$일 때, $x-1\geq0$이므로

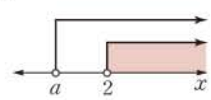
$x-1<2x-3$, $-x<-2$

$\therefore x>2$

그런데 $x\geq1$이므로 $x>2$

(i), (ii)에서 주어진 부등식의 해는 $x>2$

따라서 $x>2$가 $x>a$에 포함되려면 오른쪽 그림에서



$a\leq2$

답 $a\leq2$

유형 12 절댓값 기호가 두 개인 부등식

본책 126쪽

두 일차식 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $f(a)=0$, $g(b)=0$ $(a<b)$일 때, 부등식 $|f(x)|+|g(x)|<c$ $(c>0)$의 해는 x의 값의 범위를

$x<a$, $a\leq x<b$, $x\geq b$

로 나누어 푼다.

0862 $|x|+|x-3|\geq5$에서

(i) $x<0$일 때, $x<0$, $x-3<0$이므로

$-x-(x-3)\geq5$, $-x-x+3\geq5$

$-2x\geq2$ $\therefore x\leq-1$

그런데 $x<0$이므로 　 $x\le-1$

(ii) $0\le x<3$일 때, $x\ge0$, $x-3<0$이므로

$x-(x-3)\ge5$, 　 $x-x+3\ge5$

$\therefore 0\cdot x\ge2$

따라서 해는 없다.

(iii) $x\ge3$일 때, $x>0$, $x-3\ge0$이므로

$x+(x-3)\ge5$, 　 $2x\ge8$

$\therefore x\ge4$

그런데 $x\ge3$이므로 　 $x\ge4$

이상에서 주어진 부등식의 해는

$x\le-1$ 또는 $x\ge4$

따라서 $a=-1$, $b=4$이므로

$a+b=3$

답 3

0863 $|x+1|-|2x-4|\ge-3$에서

(i) $x<-1$일 때, $x+1<0$, $2x-4<0$이므로

$-(x+1)+2x-4\ge-3$, 　 $-x-1+2x-4\ge-3$

$\therefore x\ge2$

그런데 $x<-1$이므로 해는 없다.

(ii) $-1\le x<2$일 때, $x+1\ge0$, $2x-4<0$이므로

$x+1+2x-4\ge-3$, 　 $3x\ge0$

$\therefore x\ge0$

그런데 $-1\le x<2$이므로 　 $0\le x<2$

(iii) $x\ge2$일 때, $x+1>0$, $2x-4\ge0$이므로

$x+1-(2x-4)\ge-3$, 　 $x+1-2x+4\ge-3$

$-x\ge-8$ 　 $\therefore x\le8$

그런데 $x\ge2$이므로 　 $2\le x\le8$

이상에서 주어진 부등식의 해는 　 $0\le x\le8$

따라서 $M=8$, $m=0$이므로

$M+m=8$

답 ④

0864 $\sqrt{x^2-4x+4}=\sqrt{(x-2)^2}=|x-2|$이므로 주어진 부등식은 　 $|x+1|+|x-2|<x+2$

(i) $x<-1$일 때, $x+1<0$, $x-2<0$이므로

$-(x+1)-(x-2)<x+2$

$-x-1-x+2<x+2$

$-3x<1$ 　 $\therefore x>-\frac{1}{3}$

그런데 $x<-1$이므로 해는 없다.

(ii) $-1\le x<2$일 때, $x+1\ge0$, $x-2<0$이므로

$x+1-(x-2)<x+2$, 　 $x+1-x+2<x+2$

$\therefore x>1$

그런데 $-1\le x<2$이므로 　 $1<x<2$

(iii) $x\ge2$일 때, $x+1>0$, $x-2\ge0$이므로

$x+1+x-2<x+2$ 　 $\therefore x<3$

그런데 $x\ge2$이므로 　 $2\le x<3$

이상에서 주어진 부등식의 해는

$1<x<3$

답 ③

0865 $||x-1|-2|\le3$에서 　 $-3\le|x-1|-2\le3$

$\therefore -1\le|x-1|\le5$

그런데 $|x-1|\ge0$이므로 　 $0\le|x-1|\le5$ 　 ⋯ ❶

$-5\le x-1\le5$ 　 $\therefore -4\le x\le6$ 　 ⋯ ❷

따라서 주어진 부등식을 만족시키는 정수 x는

$-4, -3, -2, \cdots, 6$

의 11개이다. 　 ⋯ ❸

답 11

채점 기준	비율
❶ 주어진 부등식에서 $\|x-1\|$의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %
❷ 부등식의 해를 구할 수 있다.	40 %
❸ 부등식을 만족시키는 정수 x의 개수를 구할 수 있다.	20 %

다른 풀이 (i) $x<1$일 때, $x-1<0$이므로

$|-(x-1)-2|\le3$, 　 $|-x-1|\le3$

$-3\le-x-1\le3$, 　 $-2\le-x\le4$

$\therefore -4\le x\le2$

그런데 $x<1$이므로 　 $-4\le x<1$

(ii) $x\ge1$일 때, $x-1\ge0$이므로

$|(x-1)-2|\le3$, 　 $|x-3|\le3$

$-3\le x-3\le3$ 　 $\therefore 0\le x\le6$

그런데 $x\ge1$이므로 　 $1\le x\le6$

(i), (ii)에서 주어진 부등식의 해는

$-4\le x\le6$

0866 $|x+2|+|x-1|\le k$에서

(i) $x<-2$일 때, $x+2<0$, $x-1<0$이므로

$-(x+2)-(x-1)\le k$, 　 $-x-2-x+1\le k$

$-2x\le k+1$ 　 $\therefore x\ge-\frac{k+1}{2}$

그런데 $x<-2$이므로 　 $-\frac{k+1}{2}\le x<-2$

$k>3$에서 $-\frac{k+1}{2}<-2$

(ii) $-2\le x<1$일 때, $x+2\ge0$, $x-1<0$이므로

$x+2-(x-1)\le k$, 　 $x+2-x+1\le k$

$\therefore 0\cdot x\le k-3$

$k>3$에서 $k-3>0$

따라서 해는 모든 실수이다.

그런데 $-2\le x<1$이므로 　 $-2\le x<1$

(iii) $x\ge1$일 때, $x+2>0$, $x-1\ge0$이므로

$x+2+x-1\le k$, 　 $2x\le k-1$

$\therefore x\le\frac{k-1}{2}$

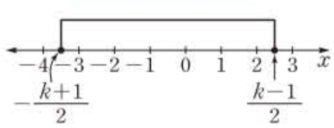
그런데 $x\ge1$이므로 　 $1\le x\le\frac{k-1}{2}$

$k>3$에서 $\frac{k-1}{2}>1$

이상에서 주어진 부등식의 해는

$-\frac{k+1}{2}\le x\le\frac{k-1}{2}$

주어진 부등식을 만족시키는 정수 x의 개수가 6이므로 오른쪽 그림에서



$2\le\frac{k-1}{2}<3$, 　 $4\le k-1<6$

$\therefore 5\le k<7$

답 $5\le k<7$

참고 $-4<-\frac{k+1}{2}\le-3$에서 k의 값의 범위를 구하여도 $5\le k<7$로 같다.

SSEN 특강

$-\frac{k+1}{2}$은 $-\frac{1}{2}$보다 $\frac{k}{2}$만큼 작은 수이고, $\frac{k-1}{2}$은 $-\frac{1}{2}$보다 $\frac{k}{2}$만큼 큰 수이므로 $-\frac{k+1}{2}\le x\le\frac{k-1}{2}$을 만족시키는 정수 x의 개수가 6이려면 정수 x는 -3, -2, -1, 0, 1, 2이어야 한다. 즉 $-4<-\frac{k+1}{2}\le-3$, $2\le\frac{k-1}{2}<3$이어야 한다.

유형 13 절댓값 기호를 포함한 부등식 ; 해가 없거나 무수히 많은 경우

본책 126쪽

① $|ax+b|<c$의 해가 없다. ➡ $c\le0$
② $|ax+b|\le c$의 해가 없다. ➡ $c<0$
③ $|ax+b|>c$의 해가 모든 실수이다. ➡ $c<0$
④ $|ax+b|\ge c$의 해가 모든 실수이다. ➡ $c\le0$

0867 $|2x-3|+1>a$에서 $\quad |2x-3|>a-1$

이 부등식의 해가 모든 실수이려면

$a-1<0 \quad \therefore a<1$

답 ④

0868 주어진 부등식의 해가 존재하지 않으려면

$\frac{1}{2}a+1<0, \quad \frac{1}{2}a<-1$

$\therefore a<-2$

따라서 정수 a의 최댓값은 -3이다.

답 ③

0869 $\left|\frac{1}{3}x+2\right|+k\le0$에서 $\quad \left|\frac{1}{3}x+2\right|\le-k$

이 부등식의 해가 존재하려면

$-k\ge0 \quad \therefore k\le0$

답 $k\le0$

0870 **전략** 부등식의 기본 성질을 이용한다.

풀이 ㄱ. $a>0$이므로 $\frac{1}{a}<1$의 양변에 a를 곱하면 $\quad 1<a$

$b>0$이므로 $1<\frac{1}{b}$의 양변에 b를 곱하면 $\quad b<1$

그런데 $b>0$이므로 $\quad 0<b<1$

$\therefore 0<b<1<a$

ㄴ. ㄱ에서 $a>b$이고, $ab>0$이므로 $a>b$의 양변에 ab를 곱하면

$a^2b>ab^2$

ㄷ. $(ab+1)-(a+b)=ab-a-b+1$

$=a(b-1)-(b-1)$

$=(a-1)(b-1)$

그런데 ㄱ에서 $a>1$, $0<b<1$이므로

$a-1>0$, $b-1<0$

따라서 $(a-1)(b-1)<0$이므로

$(ab+1)-(a+b)<0 \quad \therefore ab+1<a+b$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

0871 **전략** 부등식 $px<q$의 해가 $x>r$이면 $p<0$, $\frac{q}{p}=r$임을 이용한다.

풀이 부등식 $(a+b)x<a$의 해가 $x>\frac{1}{3}$이므로

$a+b<0$ ······ ㉠ ··· ❶

$\therefore x>\frac{a}{a+b}$

따라서 $\frac{a}{a+b}=\frac{1}{3}$이므로

$3a=a+b \quad \therefore b=2a$ ······ ㉡ ··· ❷

㉡을 ㉠에 대입하면

$a+2a<0, \quad 3a<0 \quad \therefore a<0$ ··· ❸

㉡을 부등식 $ax+a>bx-2b$에 대입하면

$ax+a>2ax-4a, \quad ax<5a$

$\therefore x>5$ ($\because a<0$) ··· ❹

답 $x>5$

채점 기준	비율
❶ $a+b$의 부호를 구할 수 있다.	20 %
❷ b를 a에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30 %
❸ a의 부호를 구할 수 있다.	20 %
❹ 부등식 $ax+a>bx-2b$의 해를 구할 수 있다.	30 %

0872 **전략** 두 조건 (가), (나)를 만족시키는 x의 값의 범위를 각각 구한 후 공통부분을 구한다.

풀이 조건 (가)에서 $\sqrt{x-5}\sqrt{-3-x}=-\sqrt{(x-5)(-3-x)}$이므로

$x-5<0$, $-3-x<0$ 또는 $x-5=0$ 또는 $-3-x=0$

$\therefore -3\le x\le5$ ······ ㉠

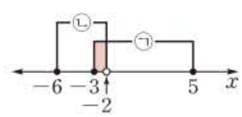
조건 (나)에서 $\frac{\sqrt{x+6}}{\sqrt{x+2}}=-\sqrt{\frac{x+6}{x+2}}$이므로

$x+6>0$, $x+2<0$ 또는 $x+6=0$, $x+2\ne0$

$\therefore -6\le x<-2$ ······ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$-3\le x<-2$



따라서 주어진 조건을 모두 만족시키는 정수 x는 -3의 1개이다.

답 1

SSEN 특강 음수의 제곱근의 성질

실수 a, b에 대하여

① $\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$이면 $\quad a<0$, $b<0$ 또는 $a=0$ 또는 $b=0$

② $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=-\sqrt{\frac{a}{b}}$이면 $\quad a>0$, $b<0$ 또는 $a=0$, $b\ne0$

0873 **전략** 반올림의 뜻에 의하여 $\frac{a}{b}$의 값의 범위를 구한다.

풀이 $\frac{a}{b}$를 소수점 아래 첫째 자리에서 반올림하면 5이므로

$4.5\le\frac{a}{b}<5.5$

b는 자연수이므로 각 변에 $2b$를 곱하면

$9b\le2a<11b$

$2a-5b=23$, 즉 $2a=5b+23$을 앞의 식에 대입하면

$9b \le 5b+23 < 11b$

$9b \le 5b+23$에서 $\quad 4b \le 23 \quad \therefore b \le \frac{23}{4}$ ...... ㉠

$5b+23 < 11b$에서 $\quad -6b < -23 \quad \therefore b > \frac{23}{6}$ ...... ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $\quad \frac{23}{6} < b \le \frac{23}{4}$

이때 b는 자연수이므로 $\quad b=4$ 또는 $b=5$

그런데 $b=4$이면 $a=\frac{43}{2}$이므로 a는 자연수가 아니다.

따라서 $b=5$, $a=24$이므로 $\quad ab=120$ 답 120

0874 전략 연립부등식에서 각 부등식의 해를 a, b로 나타낸 후 주어진 해와 비교한다.

풀이 (1) $3x+a<2x+b$에서 $\quad x<b-a$

$x+1 \le 2x+b$에서 $\quad x \ge 1-b$

그런데 잘못 변형한 연립부등식의 해가 $-1 \le x < 3$이므로

$1-b=-1$, $b-a=3$

$\therefore a=-1$, $b=2$ ···➊

(2) 원래 부등식은 $3x-1<x+1 \le 2x+2$이므로

$3x-1<x+1$에서 $\quad 2x<2 \quad \therefore x<1$ ...... ㉠

$x+1 \le 2x+2$에서 $\quad x \ge -1$ ...... ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $\quad -1 \le x < 1$ ···➋

답 (1) $a=-1$, $b=2$ (2) $-1 \le x < 1$

채점 기준	비율
➊ a, b의 값을 구할 수 있다.	50 %
➋ 원래 부등식의 해를 구할 수 있다.	50 %

0875 전략 주어진 수직선을 이용하여 연립부등식에서 각각의 부등식의 해를 찾는다.

풀이 $ax+b<0$에서 $\quad ax<-b$

이 부등식의 해가 $x<5$이므로

$a>0$, $-\frac{b}{a}=5 \quad \therefore \frac{b}{a}=-5$

$cx+d \ge 0$에서 $\quad cx \ge -d$

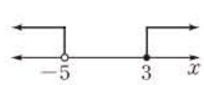
이 부등식의 해가 $x \ge -3$이므로

$c>0$, $-\frac{d}{c}=-3 \quad \therefore \frac{d}{c}=3$

$ax-b<0$에서 $\quad x<\frac{b}{a} \quad \therefore x<-5$

$cx-d \ge 0$에서 $\quad x \ge \frac{d}{c} \quad \therefore x \ge 3$

따라서 연립부등식 $\begin{cases} ax-b<0 \\ cx-d \ge 0 \end{cases}$의 해는 없다.



답 ⑤

0876 전략 연립부등식의 해는 각 부등식의 해의 공통부분임을 이용한다.

풀이 연립부등식 $\begin{cases} ax+2 \le -x-2a \\ bx+10<2ax+5b \end{cases}$의 해가 $x<\frac{5}{3}$이므로 각 부등식의 해의 공통부분이 $x<\frac{5}{3}$이다.

$ax+2 \le -x-2a$에서

$(a+1)x \le -2(a+1)$ ...... ㉠

(i) $a>-1$일 때, $a+1>0$이므로 부등식 ㉠의 해는 $x \le -2$이고 이때 연립부등식의 해는 $x<\frac{5}{3}$가 될 수 없다.

(ii) $a=-1$일 때, $0 \cdot x \le 0$이므로 부등식 ㉠의 해는 모든 실수이고 이때 연립부등식의 해는 $x<\frac{5}{3}$가 될 수 있다.

(iii) $a<-1$일 때, $a+1<0$이므로 부등식 ㉠의 해는 $x \ge -2$이고 이때 연립부등식의 해는 $x<\frac{5}{3}$가 될 수 없다.

이상에서 $\quad a=-1$ ···➊

$a=-1$을 $bx+10<2ax+5b$에 대입하면

$bx+10<-2x+5b \quad \therefore (b+2)x<5b-10$

이 부등식의 해가 $x<\frac{5}{3}$이어야 하므로 $\quad b+2>0$

$\therefore x<\frac{5b-10}{b+2}$

따라서 $\frac{5b-10}{b+2}=\frac{5}{3}$이므로 $\quad 15b-30=5b+10$

$10b=40 \quad \therefore b=4$ ···➋

$\therefore a-b=-5$ ···➌

답 -5

채점 기준	비율
➊ a의 값을 구할 수 있다.	50 %
➋ b의 값을 구할 수 있다.	40 %
➌ $a-b$의 값을 구할 수 있다.	10 %

0877 전략 부등식의 해를 수직선 위에 나타내어 정수 x가 3개가 되도록 하는 a의 값의 범위를 구한다.

풀이 $\frac{x-a}{2} \le \frac{5-x}{3}$에서 $\quad 3(x-a) \le 2(5-x)$

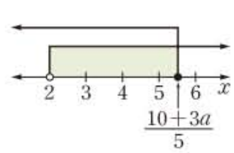
$3x-3a \le 10-2x$, $\quad 5x \le 10+3a$

$\therefore x \le \frac{10+3a}{5}$

$\frac{5-x}{3}<2x-3$에서 $\quad 5-x<6x-9$

$-7x<-14 \quad \therefore x>2$

주어진 부등식을 만족시키는 정수 x가 3개이므로 오른쪽 그림에서



$5 \le \frac{10+3a}{5}<6$

$25 \le 10+3a<30$, $\quad 15 \le 3a<20$

$\therefore 5 \le a<\frac{20}{3}$

따라서 a의 최솟값은 5이다. 답 ②

0878 전략 학생 수를 x라 하고 피자 조각의 개수를 x로 나타낸다.

풀이 학생 수를 x라 하면 피자 조각의 개수는 $3(x-5)$이므로

$2x+1 \le 3(x-5) \le 2x+6$

$2x+1 \le 3(x-5)$에서 $\quad 2x+1 \le 3x-15$

$\therefore x \ge 16$ ...... ㉠

$3(x-5) \leq 2x+6$에서 $\quad 3x-15 \leq 2x+6$

$\therefore x \leq 21$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$16 \leq x \leq 21$

이때 x는 자연수이고, $\underline{3(x-5)\text{가 } 6\text{의 배수}}$이어야 하므로

$x=17,\ 19,\ 21$ 한 판이 6조각이므로 6의 배수이어야 한다.

따라서 최소 학생 수는 17이다.

답 ②

0879 전략 십의 자리의 숫자가 a, 일의 자리의 숫자가 b인 수는 $10a+b$임을 이용한다.

풀이 구하는 자연수의 십의 자리의 숫자를 x라 하면 일의 자리의 숫자는 $x+3$이므로

$$\begin{cases} x+(x+3) \geq 10 \\ 10(x+3)+x > 2\{10x+(x+3)\}-30 \end{cases}$$ … ❶

$x+(x+3) \geq 10$에서

$2x \geq 7 \quad \therefore x \geq \frac{7}{2}$ …… ㉠

$10(x+3)+x > 2\{10x+(x+3)\}-30$에서

$11x+30 > 22x-24, \quad -11x > -54$

$\therefore x < \frac{54}{11}$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$\frac{7}{2} \leq x < \frac{54}{11}$ … ❷

이때 x는 자연수이므로 $\quad x=4$

따라서 구하는 자연수는 47이다. … ❸

답 47

채점 기준	비율
❶ 연립부등식을 세울 수 있다.	40 %
❷ 연립부등식의 해를 구할 수 있다.	40 %
❸ 처음 자연수를 구할 수 있다.	20 %

0880 전략 다리의 길이와 도로의 길이를 문자로 나타낸 후 주어진 조건을 식으로 나타낸다.

풀이 다리의 길이를 l m라 하고 C 지점에서 P 지점까지의 거리를 a m, D 지점에서 Q 지점까지의 거리를 b m라 하자.

C → P → A → Q, C → B → D → Q,

C → B → A → Q로 가는 경우의 이동 거리가 모두 같으므로

$a+x+x=9+12+b=9+l+x$

$\therefore a=9+l-x,\ b=l+x-12$ …… ㉠

D → Q → A → P, D → B → C → P,

D → B → A → P로 가는 경우의 순으로 이동 거리가 멀어지므로

$b+x+x < 12+9+a < 12+l+x$

㉠을 위의 식에 대입하면

$(l+x-12)+2x < 21+(9+l-x) < 12+l+x$

$\therefore 3x-12 < 30-x < 12+x$

$3x-12 < 30-x$에서 $\quad 4x < 42$

$\therefore x < \frac{21}{2}$ …… ㉡

$30-x < 12+x$에서 $\quad -2x < -18$

$\therefore x > 9$ …… ㉢

㉡, ㉢의 공통범위를 구하면 $\quad 9 < x < \frac{21}{2}$

따라서 구하는 자연수 x의 값은 10이다.

답 ③

0881 전략 절댓값은 항상 0 이상임을 이용한다.

풀이 $|x-k| \geq 0$이므로 주어진 부등식이 오직 한 개의 해를 가지려면

$k^2+k=0, \quad k(k+1)=0$

$\therefore k=-1\ (\because k \neq 0)$ … ❶

따라서 주어진 부등식은 $|x+1| \leq 0$이므로 구하는 해는

$x=-1$ … ❷

답 $x=-1$

채점 기준	비율
❶ k의 값을 구할 수 있다.	70 %
❷ 부등식의 해를 구할 수 있다.	30 %

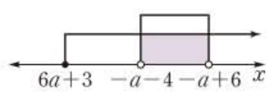
0882 전략 연립부등식의 해는 각 부등식의 해의 공통부분임을 이용한다.

풀이 $x-6a \geq 3$에서 $\quad x \geq 6a+3$

$|x+a-1| < 5$에서 $\quad -5 < x+a-1 < 5$

$\therefore -a-4 < x < -a+6$

주어진 연립부등식의 해가 부등식 $|x+a-1| < 5$의 해와 같으려면 오른쪽 그림에서



$6a+3 \leq -a-4$

$7a \leq -7 \quad \therefore a \leq -1$

답 $a \leq -1$

0883 전략 $|x-k| < k^2$의 해를 k로 나타낸 후 $-6 < x < 12$와 비교한다.

풀이 $|x-k| < k^2$에서

$-k^2 < x-k < k^2 \quad \therefore -k^2+k < x < k^2+k$

이 부등식의 해가 $-6 < x < 12$이므로

$-k^2+k=-6,\ k^2+k=12$

(i) $-k^2+k=-6$에서 $\quad k^2-k-6=0$

$(k+2)(k-3)=0 \quad \therefore k=-2$ 또는 $k=3$

(ii) $k^2+k=12$에서 $\quad k^2+k-12=0$

$(k+4)(k-3)=0 \quad \therefore k=-4$ 또는 $k=3$

(i), (ii)에서 $\quad k=3$

$|x-1| < k$에서

$|x-1| < 3, \quad -3 < x-1 < 3$

$\therefore -2 < x < 4$

따라서 정수 x는 $-1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3$이므로 구하는 합은

$(-1)+0+1+2+3=5$

답 ①

다른 풀이 $-k^2+k=-6,\ k^2+k=12$에서

$k^2=k+6,\ k^2=12-k$

즉 $k+6=12-k$이므로

$2k=6 \quad \therefore k=3$

0884 전략 부등식 $px<q$에서 $p>0$이면 $x<\frac{q}{p}$, $p<0$이면 $x>\frac{q}{p}$ 임을 이용한다.

풀이 $|5-3x|<x+1$에서

(i) $x<\frac{5}{3}$일 때, $5-3x>0$이므로

$5-3x<x+1,\qquad -4x<-4$

$\therefore\ x>1$

그런데 $x<\frac{5}{3}$이므로 $\quad 1<x<\frac{5}{3}$

(ii) $x\ge\frac{5}{3}$일 때, $5-3x\le 0$이므로

$-(5-3x)<x+1,\qquad 2x<6$

$\therefore\ x<3$

그런데 $x\ge\frac{5}{3}$이므로 $\quad \frac{5}{3}\le x<3$

(i), (ii)에서 부등식 $|5-3x|<x+1$의 해는

$1<x<3$

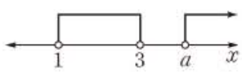
$a(x+3)>a^2+3x$에서 $\quad ax+3a>a^2+3x$

$\therefore\ (a-3)x>a(a-3)$ ······ ㉠

(iii) $a>3$일 때, $a-3>0$이므로 ㉠에서

$x>a$

주어진 연립부등식이 해를 갖지 않으려면 오른쪽 그림에서



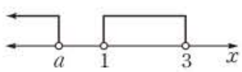
$a\ge 3$

그런데 $a>3$이므로 $\quad a>3$

(iv) $a<3$일 때, $a-3<0$이므로 ㉠에서

$x<a$

주어진 연립부등식이 해를 갖지 않으려면 오른쪽 그림에서



$a\le 1$

그런데 $a<3$이므로 $\quad a\le 1$

(v) $a=3$일 때, ㉠에서 $0\cdot x>0$이므로 해는 없다.

따라서 주어진 연립부등식의 해는 없다.

(iii)~(v)에서 $\quad a\le 1$ 또는 $a\ge 3$ 답 $a\le 1$ 또는 $a\ge 3$

0885 전략 $\sqrt{(p-q)^2}=|p-q|$임을 이용한다.

풀이 $\sqrt{x^2-2x+1}=\sqrt{(x-1)^2}=|x-1|$이므로 주어진 부등식은 $\quad ||x+2|+|x-1||\le 4$

$\therefore\ \underline{0\le |x+2|+|x-1|}\le 4$ $|x+2|\ge 0$, $|x-1|\ge 0$이므로 $|x+2|+|x-1|\ge 0$

(i) $x<-2$일 때, $x+2<0$, $x-1<0$이므로

$0\le -(x+2)-(x-1)\le 4,\qquad 0\le -2x-1\le 4$

$1\le -2x\le 5\qquad \therefore\ -\frac{5}{2}\le x\le -\frac{1}{2}$

그런데 $x<-2$이므로 $\quad -\frac{5}{2}\le x<-2$

(ii) $-2\le x<1$일 때, $x+2\ge 0$, $x-1<0$이므로

$0\le x+2-(x-1)\le 4\qquad \therefore\ 0\le 0\cdot x+3\le 4$

따라서 해는 모든 실수이다.

그런데 $-2\le x<1$이므로 $\quad -2\le x<1$

(iii) $x\ge 1$일 때, $x+2>0$, $x-1\ge 0$이므로

$0\le x+2+x-1\le 4,\qquad 0\le 2x+1\le 4$

$-1\le 2x\le 3\qquad \therefore\ -\frac{1}{2}\le x\le\frac{3}{2}$

그런데 $x\ge 1$이므로 $\quad 1\le x\le\frac{3}{2}$

이상에서 주어진 부등식의 해는

$-\frac{5}{2}\le x\le\frac{3}{2}$

따라서 $a=-\frac{5}{2}$, $b=\frac{3}{2}$이므로 $\quad a+b=-1$ 답 ②

0886 전략 주어진 부등식이 해를 가지려면 k의 값이 $|x-1|+2|x+1|$의 최솟값보다 커야 한다.

풀이 (i) $x<-1$일 때, $x-1<0$, $x+1<0$이므로

$|x-1|+2|x+1|=-(x-1)-2(x+1)$

$=-3x-1$

그런데 $x<-1$이므로 $\quad -3x>3$

$\therefore\ -3x-1>2$

(ii) $-1\le x<1$일 때, $x-1<0$, $x+1\ge 0$이므로

$|x-1|+2|x+1|=-(x-1)+2(x+1)$

$=x+3$

그런데 $-1\le x<1$이므로 $\quad 2\le x+3<4$

(iii) $x\ge 1$일 때, $x-1\ge 0$, $x+1>0$이므로

$|x-1|+2|x+1|=x-1+2(x+1)$

$=3x+1$

그런데 $x\ge 1$이므로 $\quad 3x\ge 3$

$\therefore\ 3x+1\ge 4$

이상에서 $|x-1|+2|x+1|\ge 2$이므로

$k\ge 2$

따라서 k의 최솟값은 2이다. 답 ③

08 이차부등식

0887 답 $x<-1$ 또는 $x>3$ **0888** 답 $-1\le x\le 3$

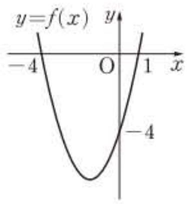
0889 답 $\alpha<x<\gamma$ **0890** 답 $x\le\beta$ 또는 $x\ge\delta$

0891 $f(x)=x^2+3x-4$라 하면

$f(x)=(x+4)(x-1)$

따라서 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같으므로 부등식 $f(x)<0$의 해는

$-4<x<1$ 답 $-4<x<1$

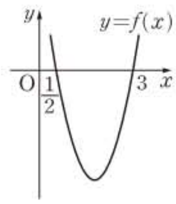


0892 $f(x)=2x^2-7x+3$이라 하면

$f(x)=(2x-1)(x-3)$

따라서 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같으므로 부등식 $f(x)\ge 0$의 해는

$x\le\frac{1}{2}$ 또는 $x\ge 3$

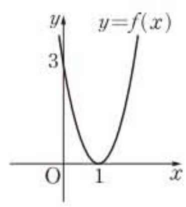


답 $x\le\frac{1}{2}$ 또는 $x\ge 3$

0893 $f(x)=3x^2-6x+3$이라 하면

$f(x)=3(x-1)^2$

따라서 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같으므로 부등식 $f(x)>0$의 해는 $x\ne 1$인 모든 실수이다. 답 $x\ne 1$인 모든 실수

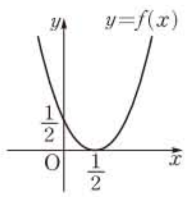


0894 $f(x)=2x^2-2x+\frac{1}{2}$이라 하면

$f(x)=2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$

따라서 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같으므로 부등식 $f(x)\le 0$의 해는 $x=\frac{1}{2}$이다.

답 $x=\frac{1}{2}$

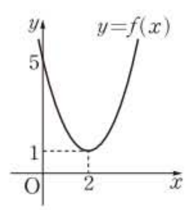


0895 $f(x)=x^2-4x+5$라 하면

$f(x)=(x-2)^2+1$

따라서 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같으므로 부등식 $f(x)<0$의 해는 없다.

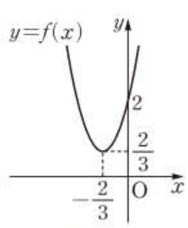
답 해는 없다.



0896 $f(x)=3x^2+4x+2$라 하면

$f(x)=3\left(x+\frac{2}{3}\right)^2+\frac{2}{3}$

따라서 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같으므로 부등식 $f(x)\ge 0$의 해는 모든 실수이다.



답 모든 실수

0897 $x^2+2x-8\le 0$에서 $(x+4)(x-2)\le 0$

$\therefore -4\le x\le 2$ 답 $-4\le x\le 2$

0898 $-3x^2+2x+1<0$에서 $3x^2-2x-1>0$

$(3x+1)(x-1)>0$

$\therefore x<-\frac{1}{3}$ 또는 $x>1$ 답 $x<-\frac{1}{3}$ 또는 $x>1$

0899 $x^2-8x+16>0$에서 $(x-4)^2>0$

따라서 주어진 부등식의 해는 $x\ne 4$인 모든 실수이다.

답 $x\ne 4$인 모든 실수

0900 $x^2+4\le 4x$에서 $x^2-4x+4\le 0$

그런데 $x^2-4x+4=(x-2)^2\ge 0$이므로 주어진 부등식의 해는 $x=2$이다. 답 $x=2$

0901 $-x^2<x+1$에서 $x^2+x+1>0$

그런데 $x^2+x+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\ge\frac{3}{4}$이므로 주어진 부등식의 해는 모든 실수이다. 답 모든 실수

0902 $2(x-2)>x^2$에서 $x^2-2x+4<0$

그런데 $x^2-2x+4=(x-1)^2+3\ge 3$이므로 주어진 부등식의 해는 없다. 답 해는 없다.

0903 $(x+1)(x-7)<0$에서 $x^2-6x-7<0$

답 $x^2-6x-7<0$

0904 $(x-3)(x-5)\ge 0$에서 $x^2-8x+15\ge 0$

답 $x^2-8x+15\ge 0$

0905 $(x-5)^2>0$에서 $x^2-10x+25>0$

답 $x^2-10x+25>0$

0906 $(x+2)^2\le 0$에서 $x^2+4x+4\le 0$

답 $x^2+4x+4\le 0$

0907 해가 $x<-2$ 또는 $x>4$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$(x+2)(x-4)>0$ $\therefore x^2-2x-8>0$

$\therefore a=-2,\ b=-8$ 답 $a=-2,\ b=-8$

0908 해가 $-3\le x\le 1$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$(x+3)(x-1)\le 0$ $\therefore x^2+2x-3\le 0$

$\therefore a=2,\ b=-3$ 답 $a=2,\ b=-3$

0909 모든 실수 x에 대하여 주어진 부등식이 성립하려면 이차함수 $y=x^2-4x+k+2$의 그래프가 x축보다 항상 위쪽에 있어야 하므로 이차방정식 $x^2-4x+k+2=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-2)^2-1\cdot(k+2)<0$

$4-k-2<0$ $\therefore k>2$ 답 $k>2$

0910 모든 실수 x에 대하여 주어진 부등식이 성립하려면 이차함수 $y=x^2-kx+3k$의 그래프가 x축에 접하거나 x축보다 항상 위쪽에 있어야 하므로 이차방정식 $x^2-kx+3k=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(-k)^2-4\cdot1\cdot3k\le0$

$k^2-12k\le0,\quad k(k-12)\le0$

$\therefore\ 0\le k\le12$ 답 $0\le k\le12$

0911 모든 실수 x에 대하여 주어진 부등식이 성립하려면 이차함수 $y=-x^2-kx+k-3$의 그래프가 x축보다 항상 아래쪽에 있어야 하므로 이차방정식 $-x^2-kx+k-3=0$, 즉 $x^2+kx-k+3=0$의 판별식을 D라 하면

$D=k^2-4\cdot1\cdot(-k+3)<0$

$k^2+4k-12<0,\quad (k+6)(k-2)<0$

$\therefore\ -6<k<2$ 답 $-6<k<2$

0912 모든 실수 x에 대하여 주어진 부등식이 성립하려면 이차함수 $y=-2x^2-(k+1)x-k+1$의 그래프가 x축에 접하거나 x축보다 항상 아래쪽에 있어야 하므로 이차방정식 $-2x^2-(k+1)x-k+1=0$, 즉 $2x^2+(k+1)x+k-1=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(k+1)^2-4\cdot2\cdot(k-1)\le0$

$k^2-6k+9\le0,\quad (k-3)^2\le0$

$\therefore\ k=3$ 답 3

0913 이차부등식 $x^2+2x+k-3<0$의 해가 존재하지 않으려면 모든 실수 x에 대하여 이차부등식 $x^2+2x+k-3\ge0$이 성립해야 한다.

즉 이차함수 $y=x^2+2x+k-3$의 그래프가 x축에 접하거나 x축보다 항상 위쪽에 있어야 하므로 이차방정식 $x^2+2x+k-3=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=1^2-1\cdot(k-3)\le0$

$-k+4\le0\quad \therefore\ k\ge4$ 답 $k\ge4$

0914 $4x+10\ge6$에서 $\quad 4x\ge-4$

$\therefore\ x\ge-1$ ······ ㉠

$2x^2-5x-3\le0$에서 $\quad (2x+1)(x-3)\le0$

$\therefore\ -\frac{1}{2}\le x\le3$ ······ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$-\frac{1}{2}\le x\le3$ 답 $-\frac{1}{2}\le x\le3$

0915 $2x+3>6x-1$에서 $\quad -4x>-4$

$\therefore\ x<1$ ······ ㉠

$6-x\ge x^2$에서 $\quad x^2+x-6\le0$

$(x+3)(x-2)\le0\quad \therefore\ -3\le x\le2$ ······ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$-3\le x<1$ 답 $-3\le x<1$

0916 $x^2+2x-15\le0$에서 $\quad (x+5)(x-3)\le0$

$\therefore\ -5\le x\le3$ ······ ㉠

$x^2-7x+10>0$에서 $\quad (x-2)(x-5)>0$

$\therefore\ x<2$ 또는 $x>5$ ······ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$-5\le x<2$ 답 $-5\le x<2$

0917 $2x^2-9x+10>0$에서 $\quad (x-2)(2x-5)>0$

$\therefore\ x<2$ 또는 $x>\frac{5}{2}$ ······ ㉠

$3x^2-10x+3<0$에서 $\quad (3x-1)(x-3)<0$

$\therefore\ \frac{1}{3}<x<3$ ······ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$\frac{1}{3}<x<2$ 또는 $\frac{5}{2}<x<3$

답 $\frac{1}{3}<x<2$ 또는 $\frac{5}{2}<x<3$

0918 $-5\le x^2+5x-1$에서

$x^2+5x+4\ge0,\quad (x+4)(x+1)\ge0$

$\therefore\ x\le-4$ 또는 $x\ge-1$ ······ ㉠

$x^2+5x-1\le5$에서 $\quad x^2+5x-6\le0$

$(x+6)(x-1)\le0\quad \therefore\ -6\le x\le1$ ······ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$-6\le x\le-4$ 또는 $-1\le x\le1$

답 $-6\le x\le-4$ 또는 $-1\le x\le1$

0919 $5x-1<x^2+5$에서

$x^2-5x+6>0,\quad (x-2)(x-3)>0$

$\therefore\ x<2$ 또는 $x>3$ ······ ㉠

$x^2+5<6x$에서 $\quad x^2-6x+5<0$

$(x-1)(x-5)<0\quad \therefore\ 1<x<5$ ······ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$1<x<2$ 또는 $3<x<5$ 답 $1<x<2$ 또는 $3<x<5$

0920 이차방정식 $x^2-2x+k+2=0$의 두 근을 α, β, 판별식을 D라 하면

(i) $\frac{D}{4}=(-1)^2-1\cdot(k+2)\ge0$

$-1-k\ge0\quad \therefore\ k\le-1$

(ii) $\alpha+\beta=2>0$

(iii) $\alpha\beta=k+2>0\quad \therefore\ k>-2$

이상에서 공통부분을 구하면

$-2<k\le-1$ 답 $-2<k\le-1$

0921 이차방정식 $x^2+(k+1)x+1=0$의 두 근을 α, β, 판별식을 D라 하면

(i) $D=(k+1)^2-4\cdot1\cdot1\ge0$

$k^2+2k-3\ge0,\quad (k+3)(k-1)\ge0$

$\therefore\ k\le-3$ 또는 $k\ge1$

(ii) $\alpha+\beta=-k-1<0 \qquad \therefore k>-1$

(iii) $\alpha\beta=1>0$

이상에서 공통부분을 구하면

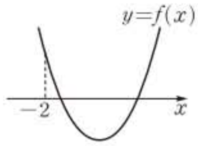
$k\geq1$ 　　　　답 $k\geq1$

0922 이차방정식 $x^2-(k+2)x+k^2-1=0$의 두 근을 α, β라 하면 $\alpha\beta<0$이므로

$k^2-1<0, \qquad (k+1)(k-1)<0$

$\therefore -1<k<1$ 　　　　답 $-1<k<1$

0923 $f(x)=x^2-4x+k-3$이라 하면 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근이 모두 -2보다 크므로 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다.



(i) 이차방정식 $f(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-2)^2-(k-3)\geq0$

$7-k\geq0 \qquad \therefore k\leq7$

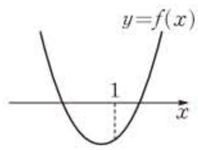
(ii) $f(-2)=4+8+k-3>0 \qquad \therefore k>-9$

(iii) 이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 축의 방정식이 $x=2$이고 $2>-2$이다.

이상에서 공통부분을 구하면

$-9<k\leq7$ 　　　　답 $-9<k\leq7$

0924 $f(x)=x^2+(k^2+2)x-3k-13$이라 하면 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근 사이에 1이 있으므로 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다.

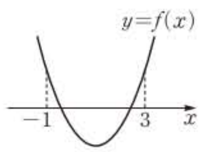


따라서 $f(1)<0$이어야 하므로

$1+k^2+2-3k-13<0, \qquad k^2-3k-10<0$

$(k+2)(k-5)<0 \qquad \therefore -2<k<5$ 　　　　답 $-2<k<5$

0925 $f(x)=x^2-(k-1)x-k+4$라 하면 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근이 -1과 3 사이에 있으므로 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다.



(i) 이차방정식 $f(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$D=\{-(k-1)\}^2-4\cdot1\cdot(-k+4)\geq0$

$k^2+2k-15\geq0, \qquad (k+5)(k-3)\geq0$

$\therefore k\leq-5$ 또는 $k\geq3$ 　　…… ㉠

(ii) $f(-1)=1+k-1-k+4=4>0$

(iii) $f(3)=9-3(k-1)-k+4>0$

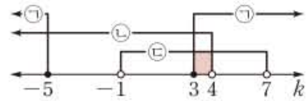
$16-4k>0 \qquad \therefore k<4$ 　　…… ㉡

(iv) 이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 축의 방정식이 $x=\frac{k-1}{2}$이므로

$-1<\frac{k-1}{2}<3 \qquad \therefore -1<k<7$ 　　…… ㉢

이상에서 공통부분을 구하면

$3\leq k<4$



답 $3\leq k<4$

유형 01 그래프를 이용한 부등식의 풀이

본책 134쪽

① 부등식 $f(x)>0$의 해
➡ $y=f(x)$의 그래프에서 x축보다 위쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위

② 부등식 $f(x)>g(x)$의 해
➡ $y=f(x)$의 그래프에서 $y=g(x)$의 그래프보다 위쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위

0926 $f(x)g(x)>0$에서

$f(x)>0$, $g(x)>0$ 또는 $f(x)<0$, $g(x)<0$

(i) $f(x)>0$, $g(x)>0$을 만족시키는 x의 값의 범위는

$0<x<d$

(ii) $f(x)<0$, $g(x)<0$을 만족시키는 x의 값의 범위는

$a<x<b$

(i), (ii)에서 부등식 $f(x)g(x)>0$의 해는

$a<x<b$ 또는 $0<x<d$ 　　　　답 ⑤

0927 $ax^2+(b-m)x+c-n\leq0$에서

$ax^2+bx+c-(mx+n)\leq0$

$\therefore ax^2+bx+c\leq mx+n$

부등식 $ax^2+bx+c\leq mx+n$의 해는 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프에서 직선 $y=mx+n$보다 아래쪽에 있거나 만나는 부분의 x의 값의 범위이므로

$x\leq-2$ 또는 $x\geq3$ 　　　　답 $x\leq-2$ 또는 $x\geq3$

0928 부등식 $0<f(x)<g(x)$의 해는 $y=f(x)$의 그래프에서 x축보다 위쪽에 있고 $y=g(x)$의 그래프보다 아래쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위이므로

$3<x<4$

따라서 $\alpha=3$, $\beta=4$이므로

$\alpha+\beta=7$ 　　　　답 7

유형 02 이차부등식의 풀이

본책 134쪽

이차방정식 $f(x)=0$의 판별식을 D라 할 때, 이차부등식 $f(x)>0$의 해는 다음과 같이 구한다.

① $D>0$일 때
➡ $f(x)$를 인수분해하거나 근의 공식을 이용한다.

② $D=0$ 또는 $D<0$일 때
➡ $f(x)$를 $a(x-p)^2+q$ 꼴로 변형한다.

0929 $(3x-2)(x+4)<2x-5$에서

$3x^2+10x-8<2x-5, \qquad 3x^2+8x-3<0$

$(x+3)(3x-1)<0 \qquad \therefore -3<x<\frac{1}{3}$

따라서 정수 x는 -2, -1, 0의 3개이다. 　　　　답 3

0930 이차방정식 $x^2-6x+1=0$의 해는

$x=3\pm2\sqrt{2}$

이므로 이차부등식 $x^2-6x+1<0$의 해는

$3-2\sqrt{2}<x<3+2\sqrt{2}$

따라서 $\alpha=3-2\sqrt{2}$, $\beta=3+2\sqrt{2}$이므로

$\alpha-\beta=-4\sqrt{2}$ 답 ①

다른 풀이 α, β가 이차방정식 $x^2-6x+1=0$의 두 근이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=6$, $\alpha\beta=1$

$\therefore (\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=36-4=32$

이때 $\alpha<\beta$에서 $\alpha-\beta<0$이므로

$\alpha-\beta=-\sqrt{32}=-4\sqrt{2}$

0931 ㄱ. $x^2+2x+5=(x+1)^2+4\geq4$

따라서 $x^2+2x+5\leq0$의 해는 없다.

ㄴ. $x^2-4x+4=(x-2)^2\geq0$

따라서 $x^2-4x+4\leq0$의 해는 $x=2$이다.

ㄷ. $-3x^2+3x-1<0$에서 $3x^2-3x+1>0$

그런데 $3x^2-3x+1=3\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\geq\frac{1}{4}$이므로 주어진 부등식의 해는 모든 실수이다.

ㄹ. $-2x^2+x-2>0$에서 $2x^2-x+2<0$

그런데 $2x^2-x+2=2\left(x-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{15}{8}\geq\frac{15}{8}$이므로 주어진 부등식의 해는 없다.

이상에서 해가 없는 부등식은 ㄱ, ㄹ이다. 답 ㄱ, ㄹ

0932 $x^2-4x-21\leq0$에서 $(x+3)(x-7)\leq0$

$\therefore -3\leq x\leq7$

① $|x-1|\leq4$에서 $-4\leq x-1\leq4$ $\therefore -3\leq x\leq5$

② $|x-1|\leq5$에서 $-5\leq x-1\leq5$ $\therefore -4\leq x\leq6$

③ $|x-2|\leq5$에서 $-5\leq x-2\leq5$ $\therefore -3\leq x\leq7$

④ $|x+1|\leq4$에서 $-4\leq x+1\leq4$ $\therefore -5\leq x\leq3$

⑤ $|x+1|\leq5$에서 $-5\leq x+1\leq5$ $\therefore -6\leq x\leq4$

따라서 주어진 이차부등식과 해가 같은 것은 ③이다. 답 ③

유형 03 절댓값 기호를 포함한 부등식

본책 135쪽

$|A|=\begin{cases}A & (A\geq0)\\-A & (A<0)\end{cases}$임을 이용하여 절댓값 기호를 없앤다.

이때 A가 x에 대한 다항식이면 $A=0$이 되는 x의 값을 기준으로 범위를 나누어 푼다.

0933 $x^2-2x-2<2|x-1|$에서

(i) $x<1$일 때,

$x^2-2x-2<-2(x-1)$, $x^2-4<0$

$(x+2)(x-2)<0$ $\therefore -2<x<2$

그런데 $x<1$이므로 $-2<x<1$

(ii) $x\geq1$일 때,

$x^2-2x-2<2(x-1)$, $x^2-4x<0$

$x(x-4)<0$ $\therefore 0<x<4$

그런데 $x\geq1$이므로 $1\leq x<4$

(i), (ii)에서 주어진 부등식의 해는 $-2<x<4$

따라서 $\alpha=-2$, $\beta=4$이므로 $\beta-2\alpha=8$ 답 ④

0934 $x^2-2|x|-15<0$에서

(i) $x<0$일 때,

$x^2+2x-15<0$, $(x+5)(x-3)<0$

$\therefore -5<x<3$

그런데 $x<0$이므로 $-5<x<0$

(ii) $x\geq0$일 때,

$x^2-2x-15<0$, $(x+3)(x-5)<0$

$\therefore -3<x<5$

그런데 $x\geq0$이므로 $0\leq x<5$

(i), (ii)에서 주어진 부등식의 해는 $-5<x<5$

따라서 정수 x는 $-4, -3, -2, \cdots, 4$의 9개이다. 답 9

다른 풀이 $x^2=|x|^2$이므로 주어진 부등식은

$|x|^2-2|x|-15<0$, $(|x|-5)(|x|+3)<0$

$\therefore -3<|x|<5$

그런데 $|x|\geq0$이므로 $0\leq|x|<5$

$|x|<5$에서 $-5<x<5$이므로 구하는 정수 x의 개수는 9이다.

0935 $|x^2-2|>4$에서

$x^2-2<-4$ 또는 $x^2-2>4$ ··· ❶

(i) $x^2-2<-4$에서 $x^2+2<0$

그런데 $x^2+2\geq2$이므로 $x^2+2<0$의 해는 없다.

(ii) $x^2-2>4$에서 $x^2-6>0$

$(x+\sqrt{6})(x-\sqrt{6})>0$

$\therefore x<-\sqrt{6}$ 또는 $x>\sqrt{6}$ ··· ❷

(i), (ii)에서 주어진 부등식의 해는

$x<-\sqrt{6}$ 또는 $x>\sqrt{6}$ ··· ❸

답 $x<-\sqrt{6}$ 또는 $x>\sqrt{6}$

채점 기준	비율
❶ 주어진 부등식을 변형할 수 있다.	30 %
❷ 각 부등식의 해를 구할 수 있다.	50 %
❸ 주어진 부등식의 해를 구할 수 있다.	20 %

유형 04 이차부등식의 풀이; 이차함수의 식을 구하는 경우

본책 135쪽

이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 두 점 $(\alpha, 0)$, $(\beta, 0)$에서 만나면

$f(x)=a(x-\alpha)(x-\beta)$

로 놓는다. 이때 이차함수의 그래프가 아래로 볼록하면 $a>0$, 위로 볼록하면 $a<0$이다.

0936 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 두 점 $(-3, 0)$, $(2, 0)$에서 만나므로

$f(x)=a(x+3)(x-2)$ $(a<0)$

라 하자. 이 그래프가 점 $(0, 3)$을 지나므로

$-6a=3 \quad \therefore a=-\frac{1}{2}$

$\therefore f(x)=-\frac{1}{2}(x+3)(x-2)$

$f(x)>-7$에서 $\quad -\frac{1}{2}(x+3)(x-2)>-7$

$(x+3)(x-2)<14, \quad x^2+x-20<0$

$(x+5)(x-4)<0 \quad \therefore -5<x<4$

따라서 $\alpha=-5$, $\beta=4$이므로 $\quad \beta-\alpha=9$

답 9

0937 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 x축과 두 점 $(-4, 0)$, $(1, 0)$에서 만나므로

$y=a(x+4)(x-1)=ax^2+3ax-4a \ (a>0)$

즉 $b=3a$, $c=-4a$이므로 이것을 $ax^2-bx+c<0$에 대입하면

$ax^2-3ax-4a<0, \quad x^2-3x-4<0 \ (\because a>0)$

$(x+1)(x-4)<0 \quad \therefore -1<x<4$

답 ③

0938 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 두 점 $(1, 0)$, $(5, 0)$에서 만나므로

$f(x)=a(x-1)(x-5) \ (a>0)$

라 하자. 이 그래프가 점 $(0, 5)$를 지나므로

$5a=5 \quad \therefore a=1$

$\therefore f(x)=(x-1)(x-5)$ ··· ❶

$f(x)+3\le 0$에서 $\quad (x-1)(x-5)+3\le 0$

$x^2-6x+8\le 0, \quad (x-2)(x-4)\le 0 \quad \therefore 2\le x\le 4$

따라서 정수 x는 2, 3, 4의 3개이다. ··· ❷

답 3

채점 기준	비율
❶ $f(x)$를 구할 수 있다.	50 %
❷ $f(x)+3\le 0$을 만족시키는 정수 x의 개수를 구할 수 있다.	50 %

유형 05 해가 주어진 이차부등식

본책 135쪽

① 해가 $\alpha<x<\beta$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식
➡ $(x-\alpha)(x-\beta)<0$
② 해가 $x<\alpha$ 또는 $x>\beta$ $(\alpha<\beta)$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식
➡ $(x-\alpha)(x-\beta)>0$

0939 $ax^2+bx-3<0$의 해가 $-\frac{1}{3}<x<\frac{3}{2}$이므로 $\quad a>0$

해가 $-\frac{1}{3}<x<\frac{3}{2}$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$\left(x+\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{3}{2}\right)<0 \quad \therefore x^2-\frac{7}{6}x-\frac{1}{2}<0$

양변에 a를 곱하면 $\quad ax^2-\frac{7}{6}ax-\frac{1}{2}a<0 \ (\because a>0)$

이 부등식이 $ax^2+bx-3<0$과 같으므로

$b=-\frac{7}{6}a, \ -3=-\frac{1}{2}a$

따라서 $a=6$, $b=-7$이므로 $\quad a+b=-1$

답 ②

다른 풀이 이차방정식 $ax^2+bx-3=0$의 두 근이 $-\frac{1}{3}$, $\frac{3}{2}$이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$-\frac{1}{3}+\frac{3}{2}=-\frac{b}{a}, \ -\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2}=-\frac{3}{a}$

$\therefore a=6, \ b=-7$

0940 해가 $x=3$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$(x-3)^2\le 0 \quad \therefore x^2-6x+9\le 0$

이 부등식이 $x^2+ax+b\le 0$과 같으므로

$a=-6, \ b=9$ ··· ❶

이것을 $bx^2-ax-8<0$에 대입하면

$9x^2+6x-8<0, \quad (3x+4)(3x-2)<0$

$\therefore -\frac{4}{3}<x<\frac{2}{3}$ ··· ❷

따라서 정수 x는 -1, 0이므로 구하는 합은 -1이다. ··· ❸

답 -1

채점 기준	비율
❶ a, b의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ 이차부등식 $bx^2-ax-8<0$의 해를 구할 수 있다.	40 %
❸ 정수 x의 값의 합을 구할 수 있다.	20 %

0941 $ax^2+bx+c>0$의 해가 $\frac{1}{3}<x<\frac{1}{2}$이므로 $\quad a<0$

해가 $\frac{1}{3}<x<\frac{1}{2}$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)<0 \quad \therefore x^2-\frac{5}{6}x+\frac{1}{6}<0$

양변에 a를 곱하면 $\quad ax^2-\frac{5}{6}ax+\frac{a}{6}>0 \ (\because a<0)$

이 부등식이 $ax^2+bx+c>0$과 같으므로

$b=-\frac{5}{6}a, \ c=\frac{a}{6}$

이것을 $cx^2+bx+a>0$에 대입하면

$\frac{a}{6}x^2-\frac{5}{6}ax+a>0, \quad x^2-5x+6<0$

$\frac{6}{a}<0$이므로 양변에 $\frac{6}{a}$을 곱하면 부등호의 방향이 바뀐다.

$(x-2)(x-3)<0 \quad \therefore 2<x<3$

답 ②

0942 $f(x)=ax^2+bx+c \ (a\ne 0)$라 하면 $f(x)\le 0$의 해가 $-4\le x\le 0$이므로 $\quad a>0$

해가 $-4\le x\le 0$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$x(x+4)\le 0 \quad \therefore x^2+4x\le 0$

양변에 a를 곱하면 $\quad ax^2+4ax\le 0 \ (\because a>0)$

이 부등식이 $\underbrace{ax^2+bx+c\le 0}_{f(x)\le 0}$과 같으므로

$b=4a, \ c=0$ ······ ㉠

한편 $f(1)=10$이므로 $\quad a+b+c=10$

㉠을 위의 식에 대입한 후 정리하면 $\quad 5a=10 \quad \therefore a=2$

따라서 $f(x)=2x^2+8x$이므로 $\quad f(2)=24$

답 ⑤

0943 $|2x+a|<6$에서 $\quad -6<2x+a<6$

$\therefore -3-\frac{a}{2}<x<3-\frac{a}{2}$

해가 $-3-\frac{a}{2}<x<3-\frac{a}{2}$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$$\left(x+3+\frac{a}{2}\right)\left(x-3+\frac{a}{2}\right)<0$$

$$\therefore\ x^2+ax+\frac{a^2}{4}-9<0$$

이 부등식이 $x^2+4x+b<0$과 같으므로

$$a=4,\ \frac{a^2}{4}-9=b$$

따라서 $a=4$, $b=-5$이므로 $ab=-20$

답 -20

유형 06 부등식 $f(x)<0$과 부등식 $f(ax+b)<0$의 관계 본책 136쪽

이차부등식 $f(x)<0$의 해가 주어졌을 때, 이차부등식 $f(ax+b)<0$의 해는 $f(x)=p(x-\alpha)(x-\beta)$이면

$$f(ax+b)=p(ax+b-\alpha)(ax+b-\beta)$$

임을 이용하여 구한다.

0944 $f(x)<0$의 해가 $2<x<9$이므로

$$f(x)=a(x-2)(x-9)\ (a>0)$$

라 하면

$$f(2x+1)=a(2x+1-2)(2x+1-9)$$
$$=2a(2x-1)(x-4)$$

$f(2x+1)<0$, 즉 $2a(2x-1)(x-4)<0$에서

$$(2x-1)(x-4)<0\ (\because\ a>0)\qquad \therefore\ \frac{1}{2}<x<4$$

답 $\frac{1}{2}<x<4$

0945 $f(x)<0$의 해가 $x<-4$ 또는 $x>3$이므로

$$f(x)=a(x+4)(x-3)\ (a<0) \qquad \cdots\ ❶$$

이라 하면

$$f(-x)=a(-x+4)(-x-3)=a(x-4)(x+3)$$

$f(-x)>0$, 즉 $a(x+3)(x-4)>0$에서

$$(x+3)(x-4)<0\ (\because\ a<0)$$

$$\therefore\ -3<x<4 \qquad \cdots\ ❷$$

따라서 정수 x는 $-2, -1, 0, 1, 2, 3$의 6개이다. ⋯ ❸

답 6

채점 기준	비율
❶ $f(x)$를 이차식으로 나타낼 수 있다.	40 %
❷ 부등식 $f(-x)>0$의 해를 구할 수 있다.	40 %
❸ 정수 x의 개수를 구할 수 있다.	20 %

0946 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 두 점 $(1, 0)$, $(5, 0)$에서 만나므로

$$f(x)=a(x-1)(x-5)\ (a>0)$$

라 하면

$$f\left(\frac{x+1}{2}\right)=a\left(\frac{x+1}{2}-1\right)\left(\frac{x+1}{2}-5\right)$$
$$=\frac{a}{4}(x-1)(x-9)$$

$f\left(\frac{x+1}{2}\right)\le 0$, 즉 $\frac{a}{4}(x-1)(x-9)\le 0$에서

$$(x-1)(x-9)\le 0\ (\because\ a>0)\qquad \therefore\ 1\le x\le 9$$

답 ④

다른 풀이 $f\left(\frac{x+1}{2}\right)\le 0$에서 $\frac{x+1}{2}=t$로 놓으면 주어진 그래프에서 $f(t)\le 0$을 만족시키는 t의 값의 범위는 $1\le t\le 5$이므로

$$1\le\frac{x+1}{2}\le 5\qquad \therefore\ 1\le x\le 9$$

0947 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 두 점 $(-1, 0)$, $(3, 0)$에서 만나므로

$$f(x)=a(x+1)(x-3)\ (a>0)$$

이라 하면

$$f\left(\frac{2x-k}{3}\right)=a\left(\frac{2x-k}{3}+1\right)\left(\frac{2x-k}{3}-3\right)$$
$$=\frac{a}{9}(2x-k+3)(2x-k-9)$$

$f\left(\frac{2x-k}{3}\right)<0$, 즉 $\frac{a}{9}(2x-k+3)(2x-k-9)<0$에서

$$(2x-k+3)(2x-k-9)<0\ (\because\ a>0)$$

$$\therefore\ \frac{k-3}{2}<x<\frac{k+9}{2}$$

이것이 $-1<x<5$와 같으므로

$$\frac{k-3}{2}=-1,\ \frac{k+9}{2}=5\qquad \therefore\ k=1$$

답 1

다른 풀이 $f\left(\frac{2x-k}{3}\right)<0$에서 $\frac{2x-k}{3}=t$로 놓으면 주어진 그래프에서 $f(t)<0$을 만족시키는 t의 값의 범위는 $-1<t<3$이므로

$$-1<\frac{2x-k}{3}<3\qquad \therefore\ \frac{k-3}{2}<x<\frac{k+9}{2}$$

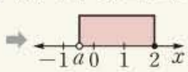
유형 07 정수인 해의 개수가 주어진 이차부등식 본책 137쪽

이차부등식의 정수인 해가 n개이면

(i) 주어진 부등식을 풀어 해를 수직선 위에 나타낸다.

(ii) n개의 정수를 포함하도록 하는 미지수의 값의 범위를 구한다.

예 부등식 $a<x\le 2$의 정수인 해가 3개이다.

➡ 

➡ $-1\le a<0$

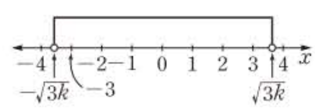
$a=-1$이면 정수인 해는 0, 1, 2의 3개

$a=0$이면 정수인 해는 1, 2의 2개

0948 $x^2-3k<0$에서 $(x+\sqrt{3k})(x-\sqrt{3k})<0$

$$\therefore\ -\sqrt{3k}<x<\sqrt{3k}$$

이때 $-\sqrt{3k}<x<\sqrt{3k}$를 만족시키는 정수 x가 7개이므로 오른쪽 그림에서



$$3<\sqrt{3k}\le 4,\qquad 9<3k\le 16\qquad \therefore\ 3<k\le\frac{16}{3}$$

따라서 자연수 k는 4, 5이므로 구하는 합은

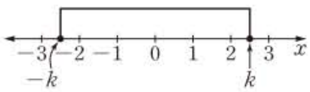
$$4+5=9$$

답 ④

0949 $x^2-k^2\le 0$에서 $(x+k)(x-k)\le 0$

$$\therefore\ -k\le x\le k$$

이때 $-k\le x\le k$를 만족시키는 정수 x가 5개이므로 오른쪽 그림에서



$2\le k<3$

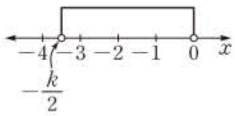
따라서 자연수 k의 값은 2이다. 답 2

$f(x)=\left(x+\frac{k}{2}\right)^2-\frac{k^2}{4}+k$

0950 점 A의 x좌표는 $-\frac{k}{2}$이고 점 B의 x좌표는 0이므로 부등식 $f(x)-g(x)<0$, 즉 $f(x)<g(x)$의 해는

$-\frac{k}{2}<x<0$

이때 $-\frac{k}{2}<x<0$을 만족시키는 정수 x가 3개이므로 오른쪽 그림에서



$-4\le -\frac{k}{2}<-3$

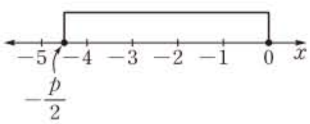
$\therefore 6<k\le 8$ 답 $6<k\le 8$

0951 $2x^2+px\le 0$에서 $x(2x+p)\le 0$

(i) $p>0$일 때,

$x(2x+p)\le 0$에서 $-\frac{p}{2}\le x\le 0$

이 부등식을 만족시키는 정수 x가 5개이므로 오른쪽 그림에서



$-5<-\frac{p}{2}\le -4$ $\therefore 8\le p<10$

따라서 정수 p는 8 또는 9이다.

(ii) $p=0$일 때,

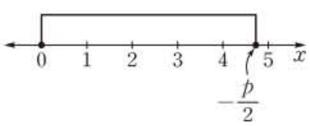
$x(2x+p)\le 0$에서 $x^2\le 0$

이 부등식을 만족시키는 정수 x는 0뿐이므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(iii) $p<0$일 때,

$x(2x+p)\le 0$에서 $0\le x\le -\frac{p}{2}$

이 부등식을 만족시키는 정수 x가 5개이므로 오른쪽 그림에서



$4\le -\frac{p}{2}<5$ $\therefore -10<p\le -8$

따라서 정수 p는 -9 또는 -8이다.

이상에서 정수 p의 최댓값은 9, 최솟값은 -9이므로

$M=9,\ m=-9$

$\therefore M-m=18$ 답 18

유형 08 이차부등식이 해를 한 개만 가질 조건 본책 137쪽

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식을 D라 할 때

① $ax^2+bx+c\le 0$이 해를 한 개만 가질 조건

⇒ $a>0,\ D=0$

② $ax^2+bx+c\ge 0$이 해를 한 개만 가질 조건

⇒ $a<0,\ D=0$

0952 이차부등식 $(a+2)x^2-6x+a+2\ge 0$의 해가 오직 한 개 존재하려면

$a+2<0$ $\therefore a<-2$ …… ㉠

또 이차방정식 $(a+2)x^2-6x+a+2=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-3)^2-(a+2)^2=0$

$a^2+4a-5=0,\quad (a+5)(a-1)=0$

$\therefore a=-5$ 또는 $a=1$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $a=-5$ 답 ①

0953 이차부등식 $x^2-(k-8)x+k\le 0$의 해가 오직 한 개 존재하므로 이차방정식 $x^2-(k-8)x+k=0$의 판별식을 D라 하면

$D=\{-(k-8)\}^2-4k=0$

$k^2-20k+64=0,\quad (k-4)(k-16)=0$

$\therefore k=4$ 또는 $k=16$

따라서 모든 실수 k의 값의 합은

$4+16=20$ 답 ⑤

0954 이차부등식 $kx^2-2(k^2-2k)x-k+2\le 0$의 해가 오직 한 개 존재하려면

$k>0$ …… ㉠

또 이차방정식 $kx^2-2(k^2-2k)x-k+2=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=\{-(k^2-2k)\}^2-k(-k+2)=0$

$(k^2-2k)^2+k^2-2k=0$

$(k^2-2k)(k^2-2k+1)=0,\quad k(k-2)(k-1)^2=0$

$\therefore k=0$ 또는 $k=1$ 또는 $k=2$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $k=1$ 또는 $k=2$

따라서 서로 다른 실수 k의 개수는 2이다. 답 2

0955 이차부등식 $-ax^2+8x-a<0$을 만족시키지 않는 x의 값이 오직 하나뿐이면 부등식 $-ax^2+8x-a\ge 0$이 단 한 개의 실근을 가져야 한다. … ❶

즉 $ax^2-8x+a\le 0$이 단 한 개의 실근을 가져야 하므로

$a>0$ …… ㉠

또 이차방정식 $ax^2-8x+a=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-4)^2-a^2=0$

$a^2-16=0,\quad (a+4)(a-4)=0$

$\therefore a=-4$ 또는 $a=4$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $a=4$ … ❷

따라서 $-4x^2+8x-4=-4(x-1)^2<0$을 만족시키지 않는 x의 값은 오직 1뿐이므로 $k=1$ … ❸

$\therefore a+k=5$ … ❹

답 5

채점 기준	비율
❶ 부등식 $-ax^2+8x-a\ge 0$이 단 한 개의 실근을 가짐을 알 수 있다.	30 %
❷ a의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ k의 값을 구할 수 있다.	20 %
❹ $a+k$의 값을 구할 수 있다.	10 %

유형 09 이차부등식이 해를 가질 조건 본책 138쪽

이차부등식 $ax^2+bx+c>0$이 해를 가질 조건
① $a>0$이면
⇒ 이차부등식은 항상 해를 갖는다.
② $a<0$이면
⇒ $ax^2+bx+c=0$의 판별식을 D라 할 때, $D>0$이어야 한다.

0956 (i) $a>0$일 때,
이차함수 $y=ax^2+2x+a$의 그래프는 아래로 볼록하므로 주어진 이차부등식은 항상 해를 갖는다.
(ii) $a<0$일 때,
주어진 이차부등식이 해를 가지려면 이차방정식 $ax^2+2x+a=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=1^2-a^2>0$, $a^2-1<0$

$(a+1)(a-1)<0$ $\therefore -1<a<1$

그런데 $a<0$이므로 $-1<a<0$

(i), (ii)에서 구하는 a의 값의 범위는

$-1<a<0$ 또는 $a>0$ 답 ⑤

참고 $a=0$이면 주어진 부등식은 이차부등식이 아니므로
$a\neq0$

0957 이차부등식 $2x^2+x-a<0$이 해를 가지려면 이차방정식 $2x^2+x-a=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=1^2-4\cdot2\cdot(-a)>0$

$1+8a>0$ $\therefore a>-\frac{1}{8}$

따라서 정수 a의 최솟값은 0이다. 답 ③

0958 이차부등식 $4x^2-2(k+1)x+1\le0$이 해를 가지려면 이차방정식 $4x^2-2(k+1)x+1=0$이 실근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=\{-(k+1)\}^2-4\ge0$

$k^2+2k-3\ge0$, $(k+3)(k-1)\ge0$

$\therefore k\le-3$ 또는 $k\ge1$ 답 $k\le-3$ 또는 $k\ge1$

0959 (i) $a>2$일 때,
이차함수 $y=(a-2)x^2+2(a-2)x-5$의 그래프는 아래로 볼록하므로 주어진 부등식의 해는 항상 존재한다.
(ii) $a=2$일 때,
$0\cdot x^2+0\cdot x-5=-5<0$이므로 주어진 부등식의 해는 존재하지 않는다.
(iii) $a<2$일 때,
주어진 부등식의 해가 존재하려면 이차방정식 $(a-2)x^2+2(a-2)x-5=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(a-2)^2-(a-2)\cdot(-5)>0$

$(a+3)(a-2)>0$ $\therefore a<-3$ 또는 $a>2$

그런데 $a<2$이므로 $a<-3$

이상에서 조건을 만족시키는 a의 값의 범위는

$a<-3$ 또는 $a>2$

따라서 a의 값이 아닌 것은 ③이다. 답 ③

유형 10 이차부등식이 항상 성립할 조건 본책 138쪽

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식을 D라 할 때, 모든 실수 x에 대하여
① $ax^2+bx+c>0$이 성립할 조건 ⇒ $a>0$, $D<0$
② $ax^2+bx+c\ge0$이 성립할 조건 ⇒ $a>0$, $D\le0$
③ $ax^2+bx+c<0$이 성립할 조건 ⇒ $a<0$, $D<0$
④ $ax^2+bx+c\le0$이 성립할 조건 ⇒ $a<0$, $D\le0$

0960 모든 실수 x에 대하여 $x^2+4ax+3a(a-1)\ge0$이 성립해야 하므로 이차방정식 $x^2+4ax+3a(a-1)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(2a)^2-3a(a-1)\le0$, $a^2+3a\le0$

$a(a+3)\le0$ $\therefore -3\le a\le0$ 답 ②

0961 모든 실수 x에 대하여 $ax^2+6ax+4a-15<0$이 성립해야 하므로

$a<0$ …… ㉠

또 이차방정식 $ax^2+6ax+4a-15=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(3a)^2-a(4a-15)<0$, $5a^2+15a<0$

$5a(a+3)<0$ $\therefore -3<a<0$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $-3<a<0$

따라서 정수 a는 -2, -1이므로 구하는 합은

$(-2)+(-1)=-3$ 답 -3

0962 모든 실수 x에 대하여 $\sqrt{x^2+kx+k+3}$이 실수가 되려면 모든 실수 x에 대하여 $x^2+kx+k+3\ge0$이 성립해야 한다.
이차방정식 $x^2+kx+k+3=0$의 판별식을 D라 하면

$D=k^2-4(k+3)\le0$, $k^2-4k-12\le0$

$(k+2)(k-6)\le0$ $\therefore -2\le k\le6$ 답 ②

0963 (i) $m=1$일 때,
$0\cdot x^2-0\cdot x+3=3>0$이므로 주어진 부등식은 모든 실수 x에 대하여 성립한다. ⋯ ❶
(ii) $m\neq1$일 때,
모든 실수 x에 대하여 $(m-1)x^2-2(m-1)x+3>0$이 성립하려면

$m-1>0$ $\therefore m>1$ …… ㉠

또 이차방정식 $(m-1)x^2-2(m-1)x+3=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=\{-(m-1)\}^2-3(m-1)<0$

$(m-1)(m-4)<0 \qquad \therefore 1<m<4 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $\quad 1<m<4$ ⋯ ❷

(i), (ii)에서 $\quad 1\le m<4$ ⋯ ❸

답 $1\le m<4$

채점 기준	비율
❶ $m=1$일 때, 주어진 부등식이 모든 실수 x에 대하여 성립함을 알 수 있다.	40 %
❷ $m\ne1$일 때, 조건을 만족시키는 m의 값의 범위를 구할 수 있다.	50 %
❸ m의 값의 범위를 구할 수 있다.	10 %

유형 11 이차부등식이 해를 갖지 않을 조건

본책 139쪽

이차부등식 $ax^2+bx+c>0$이 해를 갖지 않을 조건
➡ 이차부등식 $ax^2+bx+c\le0$의 해는 모든 실수이다.
➡ 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식을 D라 할 때,
$a<0,\ D\le0$

0964 $-x^2+2(a+3)x+4(a+3)>0$에서

$x^2-2(a+3)x-4(a+3)<0$

이 부등식의 해가 존재하지 않으려면 모든 실수 x에 대하여

$x^2-2(a+3)x-4(a+3)\ge0$

이 성립해야 한다.

이차방정식 $x^2-2(a+3)x-4(a+3)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=\{-(a+3)\}^2+4(a+3)\le0$

$(a+7)(a+3)\le0 \qquad \therefore -7\le a\le-3$ 답 $-7\le a\le-3$

0965 주어진 부등식의 해가 존재하지 않으려면 모든 실수 x에 대하여

$x^2-2ax+8>0$

이 성립해야 한다.

이차방정식 $x^2-2ax+8=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-a)^2-8<0$

$a^2-8<0, \qquad (a+2\sqrt{2})(a-2\sqrt{2})<0$

$\therefore -2\sqrt{2}<a<2\sqrt{2}$

따라서 정수 a는 $-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2$의 5개이다. 답 ③

0966 주어진 부등식이 해를 갖지 않으려면 모든 실수 x에 대하여

$x^2-(m+4)x+m+7\ge0$

이 성립해야 한다. ⋯ ❶

이차방정식 $x^2-(m+4)x+m+7=0$의 판별식을 D라 하면

$D=\{-(m+4)\}^2-4(m+7)\le0$

$m^2+4m-12\le0, \qquad (m+6)(m-2)\le0$

$\therefore -6\le m\le2$ ⋯ ❷

따라서 m의 최댓값은 2, 최솟값은 -6이므로 구하는 합은

$2+(-6)=-4$ ⋯ ❸

답 -4

채점 기준	비율
❶ 모든 실수 x에 대하여 $x^2-(m+4)x+m+7\ge0$이 성립해야 함을 알 수 있다.	30 %
❷ m의 값의 범위를 구할 수 있다.	50 %
❸ m의 최댓값과 최솟값의 합을 구할 수 있다.	20 %

0967 주어진 부등식의 해가 존재하지 않으려면 모든 실수 x에 대하여

$(k-3)x^2-2(k-3)x-2\le0 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

이 성립해야 한다.

(i) $k=3$일 때,

$0\cdot x^2-0\cdot x-2=-2<0$이므로 ㉠은 모든 실수 x에 대하여 성립한다.

(ii) $k\ne3$일 때,

모든 실수 x에 대하여 ㉠이 성립하려면

$k-3<0 \qquad \therefore k<3 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

또 이차방정식 $(k-3)x^2-2(k-3)x-2=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=\{-(k-3)\}^2-(k-3)\cdot(-2)\le0$

$(k-1)(k-3)\le0 \qquad \therefore 1\le k\le3 \qquad \cdots\cdots$ ㉢

㉡, ㉢의 공통부분을 구하면 $\quad 1\le k<3$

(i), (ii)에서 $\quad 1\le k\le3$ 답 ④

유형 12 제한된 범위에서 항상 성립하는 이차부등식

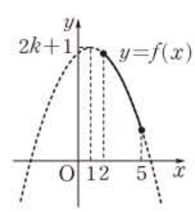
본책 139쪽

① $a\le x\le b$에서 이차부등식 $f(x)>0$이 항상 성립한다.
➡ $a\le x\le b$에서 ($f(x)$의 최솟값)>0이다.
② $a\le x\le b$에서 이차부등식 $f(x)<0$이 항상 성립한다.
➡ $a\le x\le b$에서 ($f(x)$의 최댓값)<0이다.

0968 $f(x)=-x^2+2x+2k$라 하면

$f(x)=-(x-1)^2+2k+1$

$2\le x\le5$에서 $f(x)\ge0$이어야 하므로 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 한다.



$\underbrace{f(5)}_{2\le x\le5\text{에서 } f(x)\text{의 최솟값}}\ge0$에서

$-25+10+2k\ge0, \qquad 2k\ge15$

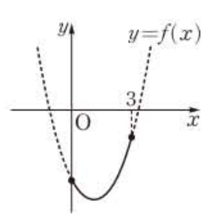
$\therefore k\ge\frac{15}{2}$

따라서 정수 k의 최솟값은 8이다. 답 8

0969 $x^2-ax\le-a^2+9$에서

$x^2-ax+a^2-9\le0$

$f(x)=x^2-ax+a^2-9$라 하면 $0\le x\le3$에서 $f(x)\le0$이어야 하므로 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 한다.



$f(0)\le0$에서

$a^2-9\le0, \qquad (a+3)(a-3)\le0$

$\therefore -3\le a\le3 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

$f(3)\le 0$에서 $\quad 9-3a+a^2-9\le 0$

$a^2-3a\le 0,\quad a(a-3)\le 0$

$\therefore\ 0\le a\le 3$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$0\le a\le 3$

답 ④

0970 $2x^2-x-1\le 0$에서 $\quad (2x+1)(x-1)\le 0$

$\therefore\ -\frac{1}{2}\le x\le 1$

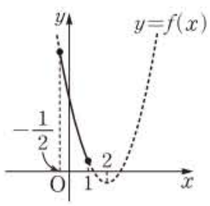
$-x^2+2x-3\le x^2-6x+k$에서

$2x^2-8x+k+3\ge 0$

$f(x)=2x^2-8x+k+3$이라 하면

$f(x)=2(x-2)^2+k-5$

$-\frac{1}{2}\le x\le 1$에서 $f(x)\ge 0$이어야 하므로 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 한다.



$f(1)\ge 0$에서

$2-8+k+3\ge 0$

$\therefore\ k\ge 3$

따라서 k의 최솟값은 3이다.

답 3

0971 $f(x)>g(x)$에서

$x^2-2ax+2a^2-5>-x^2+2ax+3a$

$\therefore\ 2x^2-4ax+2a^2-3a-5>0$

$h(x)=2x^2-4ax+2a^2-3a-5$라 하면

$h(x)=2(x-a)^2-3a-5$

(i) $a<0$일 때,

$0\le x\le 3$에서 $h(x)$의 최솟값은 $h(0)=2a^2-3a-5$이므로

$2a^2-3a-5>0,\quad (a+1)(2a-5)>0$

$\therefore\ a<-1$ 또는 $a>\frac{5}{2}$

그런데 $a<0$이므로 $\quad a<-1$

(ii) $0\le a\le 3$일 때,

$0\le x\le 3$에서 $h(x)$의 최솟값은 $h(a)=-3a-5$이므로

$-3a-5>0 \quad \therefore\ a<-\frac{5}{3}$

그런데 $0\le a\le 3$이므로 조건을 만족시키는 a의 값은 존재하지 않는다.

(iii) $a>3$일 때,

$0\le x\le 3$에서 $h(x)$의 최솟값은 $h(3)=2a^2-15a+13$이므로

$2a^2-15a+13>0,\quad (a-1)(2a-13)>0$

$\therefore\ a<1$ 또는 $a>\frac{13}{2}$

그런데 $a>3$이므로 $\quad a>\frac{13}{2}$

이상에서 실수 a의 값의 범위는

$a<-1$ 또는 $a>\frac{13}{2}$

답 $a<-1$ 또는 $a>\frac{13}{2}$

유형 13 두 그래프의 위치 관계와 이차부등식 ; 만나는 경우 본책 140쪽

① 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 직선 $y=mx+n$보다 위쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위
➡ 이차부등식 $ax^2+bx+c>mx+n$의 해

② 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 직선 $y=mx+n$보다 아래쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위
➡ 이차부등식 $ax^2+bx+c<mx+n$의 해

0972 $y=-x^2+ax+b$의 그래프가 직선 $y=x+2$보다 위쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위는

$-x^2+ax+b>x+2$,

즉 $x^2+(1-a)x+2-b<0$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

의 해이다.

해가 $1<x<3$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$(x-1)(x-3)<0 \quad \therefore\ x^2-4x+3<0$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠과 ㉡이 같아야 하므로

$1-a=-4,\ 2-b=3 \quad \therefore\ a=5,\ b=-1$

$\therefore\ a+2b=3$

답 ③

0973 $y=2x^2-2x-3$의 그래프가 $y=x^2+x+7$의 그래프보다 아래쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위는

$2x^2-2x-3<x^2+x+7$

의 해이므로 $\quad\cdots$ ❶

$x^2-3x-10<0,\quad (x+2)(x-5)<0$

$\therefore\ -2<x<5$ $\quad\cdots$ ❷

답 $-2<x<5$

채점 기준	비율
❶ 구하는 x의 값의 범위가 어떤 이차부등식의 해인지 알 수 있다.	50 %
❷ x의 값의 범위를 구할 수 있다.	50 %

0974 $y=x^2+5x+a$의 그래프가 직선 $y=x+2$보다 아래쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위는

$x^2+5x+a<x+2$, 즉 $x^2+4x+a-2<0$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

의 해이다.

해가 $b<x<1$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$(x-b)(x-1)<0$

$\therefore\ x^2-(b+1)x+b<0$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠과 ㉡이 같아야 하므로

$4=-(b+1),\ a-2=b \quad \therefore\ a=-3,\ b=-5$

$\therefore\ a+b=-8$

답 ①

0975 $y=mx^2+nx+mn+17$의 그래프가 x축보다 위쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위는

$mx^2+nx+mn+17>0$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

의 해이다.

㉠의 해가 $-3<x<5$이므로 $\quad m<0$

해가 $-3<x<5$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$(x+3)(x-5)<0 \quad \therefore\ x^2-2x-15<0$

양변에 m을 곱하면

$mx^2-2mx-15m>0$ ($\because m<0$) …… ㉡

㉠과 ㉡이 같아야 하므로

$n=-2m$, $mn+17=-15m$

$n=-2m$을 $mn+17=-15m$에 대입하면

$m\cdot(-2m)+17=-15m$, $2m^2-15m-17=0$

$(m+1)(2m-17)=0$ $\therefore m=-1$ 또는 $m=\frac{17}{2}$

그런데 $m<0$이므로 $m=-1$

따라서 $n=-2\cdot(-1)=2$이므로

$m+n=1$

답 1

유형 14 두 그래프의 위치 관계와 이차부등식 ; 만나지 않는 경우

본책 140쪽

이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 직선 $y=mx+n$보다 항상 위쪽에 있다.

➡ 모든 실수 x에 대하여 이차부등식 $ax^2+bx+c>mx+n$, 즉 $ax^2+(b-m)x+c-n>0$이 성립한다.

0976 $y=x^2-2x+1$의 그래프가 직선 $y=mx-8$보다 항상 위쪽에 있으려면 모든 실수 x에 대하여 $x^2-2x+1>mx-8$, 즉 $x^2-(2+m)x+9>0$이 성립해야 한다.

이차방정식 $x^2-(2+m)x+9=0$의 판별식을 D라 하면

$D=\{-(2+m)\}^2-4\cdot9<0$

$m^2+4m-32<0$, $(m+8)(m-4)<0$

$\therefore -8<m<4$

따라서 정수 m의 최댓값은 3, 최솟값은 -7이므로 구하는 합은

$3+(-7)=-4$

답 ②

0977 $y=mx^2+2(2-m)x+1$의 그래프가 x축보다 항상 위쪽에 있으려면 모든 실수 x에 대하여 $mx^2+2(2-m)x+1>0$이 성립해야 하므로

$m>0$ …… ㉠

또 이차방정식 $mx^2+2(2-m)x+1=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(2-m)^2-m<0$

$m^2-5m+4<0$, $(m-1)(m-4)<0$

$\therefore 1<m<4$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $1<m<4$

답 $1<m<4$

0978 $y=ax^2-6x-3$의 그래프가 직선 $y=2ax+1$보다 항상 아래쪽에 있으려면 모든 실수 x에 대하여

$ax^2-6x-3<2ax+1$, 즉 $ax^2-2(a+3)x-4<0$이 성립해야 하므로

$a<0$ …… ㉠

또 이차방정식 $ax^2-2(a+3)x-4=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=\{-(a+3)\}^2-a\cdot(-4)<0$

$a^2+10a+9<0$, $(a+9)(a+1)<0$

$\therefore -9<a<-1$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$-9<a<-1$

따라서 정수 a는 $-8, -7, -6, \cdots, -2$의 7개이다.

답 7

0979 $y=kx^2-4x+4$의 그래프가 $y=-2x^2+2kx$의 그래프보다 항상 위쪽에 있으려면 모든 실수 x에 대하여

$kx^2-4x+4>-2x^2+2kx$,

즉 $(k+2)x^2-2(k+2)x+4>0$ …… ㉠

이 성립해야 한다.

(i) $k=-2$일 때,

$0\cdot x^2-0\cdot x+4=4>0$이므로 모든 실수 x에 대하여 ㉠이 성립한다.

(ii) $k\neq-2$일 때,

모든 실수 x에 대하여 ㉠이 성립하려면

$k+2>0$ $\therefore k>-2$ …… ㉡

또 이차방정식 $(k+2)x^2-2(k+2)x+4=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=\{-(k+2)\}^2-4(k+2)<0$

$(k+2)(k-2)<0$ $\therefore -2<k<2$ …… ㉢

㉡, ㉢의 공통부분을 구하면 $-2<k<2$

(i), (ii)에서 구하는 k의 값의 범위는

$-2\le k<2$

답 ④

유형 15 이차부등식의 활용

본책 141쪽

이차부등식의 활용 문제를 풀 때에는 다음과 같은 순서로 한다.

(i) 주어진 조건에 맞게 부등식을 세운다.

(ii) 부등식을 풀어 해를 구한다. 이때 미지수의 범위에 주의한다.

0980 새로 만든 직사각형의 가로, 세로의 길이는 각각

$(40-x)$ cm, $(25+x)$ cm

이므로 넓이가 750 cm^2 이상이 되려면

$(40-x)(25+x)\ge750$, $x^2-15x-250\le0$

$(x+10)(x-25)\le0$ $\therefore -10\le x\le25$

그런데 $0\le x<40$이어야 하므로

$40-x>0$이어야 하므로 $x<40$

$0\le x\le25$

따라서 x의 최댓값은 25이다.

답 ①

0981 축구공의 높이가 4 m 이상이려면

$-5t^2+12t\ge4$, $5t^2-12t+4\le0$

$(5t-2)(t-2)\le0$ $\therefore \frac{2}{5}\le t\le2$

따라서 축구공의 지면으로부터의 높이가 4 m 이상인 시간은

$2-\frac{2}{5}=\frac{8}{5}$ (초)동안이다.

답 $\frac{8}{5}$초

0982 가격을 $1000x$원 할인한다고 하면 하루에 판매량이 $5x$장 늘어나므로 하루 판매액은

$(20000-1000x)(30+5x)$ (원) — $20000-1000x>0$이어야 하므로 $x<20$

하루 판매액이 80만 원 이상이려면

$(20000-1000x)(30+5x)\geq 800000$

$(20-x)(6+x)\geq 160,\quad x^2-14x+40\leq 0$

$(x-4)(x-10)\leq 0\quad \therefore 4\leq x\leq 10$

이때 $4000\leq 1000x\leq 10000$이므로 할인할 수 있는 금액의 범위는 4000원 이상 10000원 이하이다.

따라서 할인할 수 있는 금액의 최솟값은 4000원이다. 답 4000원

유형 16 연립이차부등식의 풀이 본책 141쪽

연립이차부등식은 각 부등식의 해를 구한 다음 공통부분을 구하여 푼다. 이때 $A<B<C$ 꼴의 부등식은 연립부등식 $\begin{cases} A<B \\ B<C \end{cases}$로 바꾸어 푼다.

0983 $x^2-3x+2>0$에서 $\quad(x-1)(x-2)>0$

$\therefore x<1$ 또는 $x>2$ …… ㉠

$x^2-x-12\leq 0$에서 $\quad(x+3)(x-4)\leq 0$

$\therefore -3\leq x\leq 4$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $\quad -3\leq x<1$ 또는 $2<x\leq 4$

따라서 정수 x는 $-3, -2, -1, 0, 3, 4$의 6개이다. 답 ③

0984 $|2x+3|>4$에서 $\quad 2x+3<-4$ 또는 $2x+3>4$

$\therefore x<-\frac{7}{2}$ 또는 $x>\frac{1}{2}$ …… ㉠

$2x^2-5x-3<0$에서 $\quad(2x+1)(x-3)<0$

$\therefore -\frac{1}{2}<x<3$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $\quad \frac{1}{2}<x<3$

따라서 정수 x는 1, 2의 2개이다. 답 ②

0985 $2x^2-5x+1\leq x^2+3x+10$에서

$x^2-8x-9\leq 0,\quad (x+1)(x-9)\leq 0$

$\therefore -1\leq x\leq 9$ …… ㉠ ➊

$x^2+3x+10<3x^2-11x+30$에서

$-2x^2+14x-20<0,\quad x^2-7x+10>0$

$(x-2)(x-5)>0$

$\therefore x<2$ 또는 $x>5$ …… ㉡ ➋

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$-1\leq x<2$ 또는 $5<x\leq 9$ ➌

따라서 자연수 x는 1, 6, 7, 8, 9이므로 구하는 합은

$1+6+7+8+9=31$ ➍

답 31

채점 기준	비율
➊ 부등식 $2x^2-5x+1\leq x^2+3x+10$의 해를 구할 수 있다.	30 %
➋ 부등식 $x^2+3x+10<3x^2-11x+30$의 해를 구할 수 있다.	30 %
➌ 주어진 부등식의 해를 구할 수 있다.	20 %
➍ 자연수 x의 값의 합을 구할 수 있다.	20 %

0986 $x^2+x-6\leq 0$에서 $\quad(x+3)(x-2)\leq 0$

$\therefore -3\leq x\leq 2$ …… ㉠

$x^2+5\geq 2x^2+4x$에서

$x^2+4x-5\leq 0,\quad (x+5)(x-1)\leq 0$

$\therefore -5\leq x\leq 1$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$-3\leq x\leq 1$

해가 $-3\leq x\leq 1$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$(x+3)(x-1)\leq 0\quad \therefore x^2+2x-3\leq 0$

양변에 -3을 곱하면 $\quad -3x^2-6x+9\geq 0$

이 부등식이 $ax^2+bx+9\geq 0$과 같으므로

$a=-3,\ b=-6$

$\therefore a+b=-9$ 답 ①

0987 $x^2+3x-10>0$에서 $\quad(x+5)(x-2)>0$

$\therefore x<-5$ 또는 $x>2$ …… ㉠

$x^2-5|x|+6\leq 0$에서

(i) $x\geq 0$일 때,

$x^2-5x+6\leq 0,\quad (x-2)(x-3)\leq 0$

$\therefore 2\leq x\leq 3$

그런데 $x\geq 0$이므로 $\quad 2\leq x\leq 3$

(ii) $x<0$일 때,

$x^2+5x+6\leq 0,\quad (x+3)(x+2)\leq 0$

$\therefore -3\leq x\leq -2$

그런데 $x<0$이므로 $\quad -3\leq x\leq -2$

(i), (ii)에서 $x^2-5|x|+6\leq 0$의 해는

$-3\leq x\leq -2$ 또는 $2\leq x\leq 3$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $\quad 2<x\leq 3$

따라서 $\alpha=2,\ \beta=3$이므로 $\quad \alpha\beta=6$ 답 ⑤

다른 풀이 $x^2=|x|^2$이므로 $x^2-5|x|+6\leq 0$에서

$|x|^2-5|x|+6\leq 0,\quad (|x|-2)(|x|-3)\leq 0$

$2\leq |x|\leq 3\quad \therefore -3\leq x\leq -2$ 또는 $2\leq x\leq 3$

0988 $\frac{\sqrt{2x^2-7x+5}}{\sqrt{x^2+2x-8}}=-\sqrt{\frac{2x^2-7x+5}{x^2+2x-8}}$이므로

$2x^2-7x+5>0,\ x^2+2x-8<0$

또는 $2x^2-7x+5=0,\ x^2+2x-8\neq 0$

$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=-\sqrt{\frac{a}{b}}$이면 $a>0,\ b<0$ 또는 $a=0,\ b\neq 0$

(i) $2x^2-7x+5>0$에서 $\quad(x-1)(2x-5)>0$

$\therefore x<1$ 또는 $x>\frac{5}{2}$ …… ㉠

$x^2+2x-8<0$에서 $\quad(x+4)(x-2)<0$

$\therefore -4<x<2$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $\quad -4<x<1$

(ii) $2x^2-7x+5=0$에서 $\quad(x-1)(2x-5)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=\frac{5}{2}$ — $x^2+2x-8\neq 0$을 만족시킨다.

(i), (ii)에서 $\quad -4<x\leq 1$ 또는 $x=\frac{5}{2}$

답 $-4<x\leq 1$ 또는 $x=\frac{5}{2}$

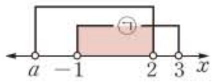
유형 17 해가 주어진 연립이차부등식 본책 142쪽

연립이차부등식의 해가 주어지면 각 부등식의 해의 공통부분이 주어진 해와 일치하도록 수직선 위에 나타내어 미정계수의 값의 범위를 구한다.

0989 $x^2-2x-3<0$에서 $(x+1)(x-3)<0$

$\therefore -1<x<3$ ······ ㉠

따라서 ㉠과 $(x-2)(x-a)<0$의 해의 공통부분이 $-1<x<2$이므로 오른쪽 그림에서



$a\le -1$

즉 a의 최댓값은 -1이다. 답 -1

참고 $a=-1$이면 $(x-2)(x-a)<0$의 해는 $-1<x<2$이므로 ㉠과의 공통부분은

$-1<x<2$

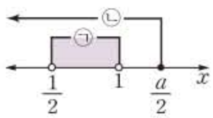
따라서 주어진 조건을 만족시킨다.

0990 $2x^2+1<3x$에서 $2x^2-3x+1<0$

$(2x-1)(x-1)<0$ $\therefore \dfrac{1}{2}<x<1$ ······ ㉠

$3x\le x+a$에서 $2x\le a$ $\therefore x\le\dfrac{a}{2}$ ······ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분이 $\dfrac{1}{2}<x<1$이므로 오른쪽 그림에서



$\dfrac{a}{2}\ge 1$ $\therefore a\ge 2$

답 ⑤

0991 $a<b$이므로 $(x-a)(x-b)>0$에서

$x<a$ 또는 $x>b$ ······ ㉠

$b<c$이므로 $(x-b)(x-c)>0$에서

$x<b$ 또는 $x>c$ ······ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$x<a$ 또는 $x>c$

이므로 $a=-3$, $c=4$

이것을 $x^2+ax-c\le 0$에 대입하면 $x^2-3x-4\le 0$

$(x+1)(x-4)\le 0$ $\therefore -1\le x\le 4$

따라서 x의 최댓값은 4, 최솟값은 -1이므로 구하는 합은

$4+(-1)=3$ 답 3

0992 $2|x-2|<a$에서 $|x-2|<\dfrac{a}{2}$

$-\dfrac{a}{2}<x-2<\dfrac{a}{2}$

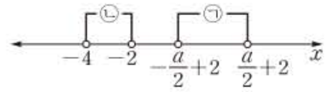
$\therefore -\dfrac{a}{2}+2<x<\dfrac{a}{2}+2$ ······ ㉠ ··· ❶

$x^2+6x+8<0$에서 $(x+4)(x+2)<0$

$\therefore -4<x<-2$ ······ ㉡ ··· ❷

주어진 연립부등식이 해를 갖지 않으려면 ㉠, ㉡의 공통부분이 존재하지 않아야 한다.

이때 $a>0$에서 $\dfrac{a}{2}+2>0$이므로 오른쪽 그림에서



$-\dfrac{a}{2}+2\ge -2$, $-\dfrac{a}{2}\ge -4$

$\therefore a\le 8$

그런데 $a>0$이므로 $0<a\le 8$ ··· ❸

답 $0<a\le 8$

채점 기준	비율
❶ 부등식 $2\lvert x-2\rvert<a$의 해를 구할 수 있다.	20 %
❷ 부등식 $x^2+6x+8<0$의 해를 구할 수 있다.	20 %
❸ a의 값의 범위를 구할 수 있다.	60 %

0993 모든 실수 x에 대하여 $-x^2+3<2x+a$, 즉 $x^2+2x+a-3>0$이 성립해야 하므로 이차방정식 $x^2+2x+a-3=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$\dfrac{D_1}{4}=1^2-(a-3)<0$

$\therefore a>4$ ······ ㉠

모든 실수 x에 대하여 $2x+a\le 2x^2+7$, 즉 $2x^2-2x+7-a\ge 0$이 성립해야 하므로 이차방정식 $2x^2-2x+7-a=0$의 판별식을 D_2라 하면

$\dfrac{D_2}{4}=(-1)^2-2(7-a)\le 0$

$-13+2a\le 0$ $\therefore a\le\dfrac{13}{2}$ ······ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$4<a\le\dfrac{13}{2}$ 답 $4<a\le\dfrac{13}{2}$

유형 18 정수인 해의 개수가 주어진 연립부등식 본책 143쪽

연립부등식의 정수인 해가 n개이면

(i) 각 부등식의 해를 수직선 위에 나타낸다.

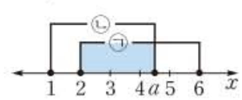
(ii) 공통부분이 n개의 정수를 포함하도록 하는 미지수의 값의 범위를 구한다.

0994 $x^2-8x+12\le 0$에서 $(x-2)(x-6)\le 0$

$\therefore 2\le x\le 6$ ······ ㉠

$x^2-(a+1)x+a\le 0$에서 $(x-1)(x-a)\le 0$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 정수 x가 3개이므로 오른쪽 그림에서



$4\le a<5$ 답 $4\le a<5$

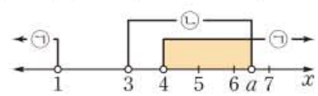
참고 $a\le 1$이면 주어진 연립부등식을 만족시키는 정수 x는 존재하지 않으므로 $a>1$이다. 따라서 부등식 $(x-1)(x-a)\le 0$의 해는 $1\le x\le a$이다.

0995 $x^2-5x+4>0$에서 $(x-1)(x-4)>0$

$\therefore x<1$ 또는 $x>4$ ······ ㉠

$x^2-(a+3)x+3a<0$에서 $(x-3)(x-a)<0$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 정수 x의 값이 5와 6뿐이려면 오른쪽 그림에서



$6<a\le 7$ 답 ④

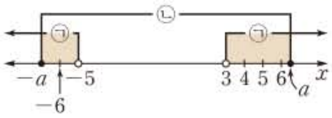
0996 $x^2+2x-15>0$에서 $(x+5)(x-3)>0$

$\therefore x<-5$ 또는 $x>3$ ...... ㉠ ⋯ ❶

$x^2-a^2\le 0$에서 $(x+a)(x-a)\le 0$

$\therefore -a\le x\le a$ ...... ㉡ ⋯ ❷

㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 정수 x가 4개 이상이므로 오른쪽 그림에서



$a\ge 6$

따라서 자연수 a의 최솟값은 6이다. ⋯ ❸

답 6

채점 기준	비율
❶ 부등식 $x^2+2x-15>0$의 해를 구할 수 있다.	20 %
❷ 부등식 $x^2-a^2\le 0$의 해를 구할 수 있다.	20 %
❸ 자연수 a의 최솟값을 구할 수 있다.	60 %

0997 $x^2-4|x|<0$에서

(i) $x\ge 0$일 때,

$x^2-4x<0$, $x(x-4)<0$ $\therefore 0<x<4$

그런데 $x\ge 0$이므로 $0<x<4$

(ii) $x<0$일 때,

$x^2+4x<0$, $x(x+4)<0$ $\therefore -4<x<0$

그런데 $x<0$이므로 $-4<x<0$

(i), (ii)에서 $x^2-4|x|<0$의 해는

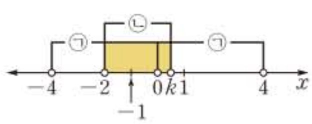
$-4<x<0$ 또는 $0<x<4$ ...... ㉠

$x^2+(2-k)x-2k<0$에서 $(x+2)(x-k)<0$

(iii) $k>-2$일 때,

$(x+2)(x-k)<0$에서 $-2<x<k$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 정수 x가 오직 한 개이려면 오른쪽 그림에서

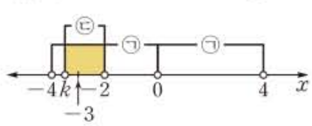


$-1<k\le 1$

(iv) $k<-2$일 때,

$(x+2)(x-k)<0$에서 $k<x<-2$ ...... ㉢

㉠, ㉢을 동시에 만족시키는 정수 x가 오직 한 개이려면 오른쪽 그림에서



$k<-3$

(iii), (iv)에서 $k<-3$ 또는 $-1<k\le 1$

따라서 k의 최댓값은 1이다. 답 1

유형 19 연립이차부등식의 활용 본책 143쪽

연립이차부등식의 활용 문제를 풀 때에는 다음과 같은 순서로 한다.

(i) 구하는 값을 x로 놓고 조건에 맞게 연립부등식을 세운다.

(ii) 각 부등식의 해를 구하여 공통부분을 찾는다.

0998 $2x-1$, x, $2x+1$은 변의 길이이므로

$2x-1>0$ $\therefore x>\frac{1}{2}$ ...... ㉠

세 변 중 가장 긴 변의 길이는 $2x+1$이므로 삼각형이 만들어질 조건에 의하여 (가장 긴 변의 길이)<(나머지 두 변의 길이의 합)

$2x+1<(2x-1)+x$

$\therefore x>2$ ...... ㉡

둔각삼각형이려면 $(2x+1)^2>(2x-1)^2+x^2$

$x^2-8x<0$, $x(x-8)<0$

$\therefore 0<x<8$ ...... ㉢

㉠, ㉡, ㉢의 공통부분을 구하면 $2<x<8$

따라서 자연수 x는 3, 4, 5, 6, 7의 5개이다. 답 ③

SSEN 특강 삼각형의 변과 각 사이의 관계

삼각형의 세 변의 길이가 a, b, c $(a\le b\le c)$일 때

① $c^2<a^2+b^2$ ➡ 예각삼각형

② $c^2=a^2+b^2$ ➡ 빗변의 길이가 c인 직각삼각형

③ $c^2>a^2+b^2$ ➡ 둔각삼각형

0999 주어진 그림에서 길의 넓이는

$(2x+8)(2x+5)-8\cdot 5=4x^2+26x\,(\mathrm{m}^2)$

길의 넓이가 90 m² 이상 140 m² 이하이어야 하므로

$90\le 4x^2+26x\le 140$ $\therefore 45\le 2x^2+13x\le 70$

$45\le 2x^2+13x$에서

$2x^2+13x-45\ge 0$, $(x+9)(2x-5)\ge 0$

$\therefore x\le -9$ 또는 $x\ge \frac{5}{2}$

그런데 $x>0$이므로 $x\ge \frac{5}{2}$ ...... ㉠

$2x^2+13x\le 70$에서

$2x^2+13x-70\le 0$, $(x+10)(2x-7)\le 0$

$\therefore -10\le x\le \frac{7}{2}$

그런데 $x>0$이므로 $0<x\le \frac{7}{2}$ ...... ㉡

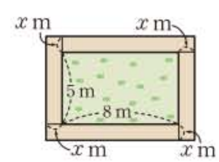
㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$\frac{5}{2}\le x\le \frac{7}{2}$ 답 ③

참고 오른쪽 그림과 같이 길을 네 개의 직사각형으로 나누어 넓이를 구할 수도 있다.

$2(5+x)x+2(8+x)x$

$=4x^2+26x\,(\mathrm{m}^2)$



1000 직사각형의 둘레의 길이가 36이므로 가로의 길이를 x라 하면 세로의 길이는 $18-x$이다. ⋯ ❶

이때 x, $18-x$는 변의 길이이고, 가로의 길이가 세로의 길이보다 길거나 같으므로

$x>0$, $18-x>0$, $x\ge 18-x$

$\therefore 9\le x<18$ ...... ㉠

직사각형의 넓이가 56 이상이므로

$x(18-x)\ge 56$

$x^2-18x+56\le0, \qquad (x-4)(x-14)\le0$

$\therefore\ 4\le x\le14$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$9\le x\le14$ ⋯➋

따라서 가로의 길이의 최댓값은 14, 최솟값은 9이므로 구하는 합은

23 ⋯➌

답 23

채점 기준	비율
❶ 가로, 세로의 길이를 미지수 x에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30 %
❷ x의 값의 범위를 구할 수 있다.	60 %
❸ 가로의 길이의 최댓값과 최솟값의 합을 구할 수 있다.	10 %

유형 20 이차방정식의 근의 판별

본책 144쪽

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식을 D라 할 때
① 서로 다른 두 실근을 가지면 ➡ $D>0$
② 중근을 가지면 ➡ $D=0$
③ 서로 다른 두 허근을 가지면 ➡ $D<0$

1001 이차방정식 $4x^2-2(a-1)x-a^2+2=0$이 허근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=\{-(a-1)\}^2-4(-a^2+2)<0$

$5a^2-2a-7<0, \qquad (a+1)(5a-7)<0$

$\therefore\ -1<a<\frac{7}{5}$

따라서 정수 a의 값은 0, 1이므로 구하는 합은 1이다. 답 ④

1002 $kx^2-4kx-(k-1)=0$이 이차방정식이므로

$k\ne0$

이차방정식 $kx^2-4kx-(k-1)=0$이 실근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-2k)^2+k(k-1)\ge0$

$5k^2-k\ge0, \qquad k(5k-1)\ge0$

$\therefore\ k<0$ 또는 $k\ge\frac{1}{5}$ ($\because k\ne0$) 답 $k<0$ 또는 $k\ge\frac{1}{5}$

1003 이차방정식 $x^2-2(k+1)x+k+7=0$이 서로 다른 두 실근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D_1이라 하면

$\frac{D_1}{4}=\{-(k+1)\}^2-(k+7)>0$

$k^2+k-6>0, \qquad (k+3)(k-2)>0$

$\therefore\ k<-3$ 또는 $k>2$ …… ㉠

이차방정식 $x^2+kx-k^2+5k=0$이 허근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D_2라 하면

$D_2=k^2-4(-k^2+5k)<0$

$5k^2-20k<0, \qquad 5k(k-4)<0$

$\therefore\ 0<k<4$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $\quad 2<k<4$

따라서 정수 k는 3의 1개이다. 답 ①

1004 이차방정식 $x^2+2(2k-1)x+k^2+ak+1=0$이 실근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D_1이라 하면

$\frac{D_1}{4}=(2k-1)^2-(k^2+ak+1)\ge0$

$3k^2-(4+a)k\ge0$ …… ㉠

㉠이 실수 k의 값에 관계없이 항상 성립해야 하므로 k에 대한 이차방정식 $3k^2-(4+a)k=0$의 판별식을 D_2라 하면

$D_2=\{-(4+a)\}^2-4\cdot3\cdot0\le0$

$(a+4)^2\le0 \qquad \therefore\ a=-4$ 답 -4

유형 21 이차방정식의 실근의 부호

본책 144쪽

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식을 D라 하면
① 두 근이 모두 양수일 조건 ➡ $D\ge0,\ -\frac{b}{a}>0,\ \frac{c}{a}>0$
② 두 근이 모두 음수일 조건 ➡ $D\ge0,\ -\frac{b}{a}<0,\ \frac{c}{a}>0$
③ 두 근이 서로 다른 부호일 조건 ➡ $\frac{c}{a}<0$

1005 이차방정식 $x^2+2(m-1)x+m+5=0$의 두 근을 α, β, 판별식을 D라 하면

(i) $\frac{D}{4}=(m-1)^2-(m+5)\ge0$

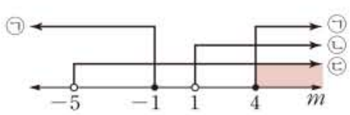
$m^2-3m-4\ge0, \qquad (m+1)(m-4)\ge0$

$\therefore\ m\le-1$ 또는 $m\ge4$ …… ㉠

(ii) $\alpha+\beta=-2(m-1)<0$

$m-1>0 \qquad \therefore\ m>1$ …… ㉡

(iii) $\alpha\beta=m+5>0 \qquad \therefore\ m>-5$ …… ㉢



이상에서 공통부분을 구하면 $\quad m\ge4$ 답 $m\ge4$

1006 이차방정식 $x^2+(k+3)x+k+6=0$의 두 근을 α, β, 판별식을 D라 하면

(i) $D=(k+3)^2-4(k+6)\ge0$

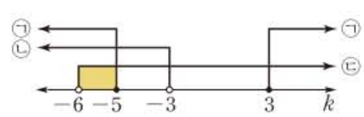
$k^2+2k-15\ge0, \qquad (k+5)(k-3)\ge0$

$\therefore\ k\le-5$ 또는 $k\ge3$ …… ㉠

(ii) $\alpha+\beta=-(k+3)>0$

$k+3<0 \qquad \therefore\ k<-3$ …… ㉡

(iii) $\alpha\beta=k+6>0 \qquad \therefore\ k>-6$ …… ㉢



이상에서 공통부분을 구하면 $\quad -6<k\le-5$

따라서 실수 k의 최댓값은 -5이다. 답 ①

1007 이차방정식 $3x^2+(m^2+m-6)x+m^2-9=0$의 두 근을 α, β라 하면 두 근의 부호가 서로 다르므로

$\alpha\beta=\frac{m^2-9}{3}<0$, $\quad m^2-9<0$

$(m+3)(m-3)<0 \quad \therefore -3<m<3$ …… ㉠

또 두 근의 절댓값이 같으므로

$\alpha+\beta=-\frac{m^2+m-6}{3}=0$

$m^2+m-6=0$, $\quad (m+3)(m-2)=0$

$\therefore m=-3$ 또는 $m=2$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $\quad m=2$ 　답 2

SSEN 특강 이차방정식의 두 실근의 절댓값

이차방정식의 두 근이 서로 다른 부호일 때

① |양수인 근|=|음수인 근|
➡ (두 근의 합)=0, (두 근의 곱)<0

② |양수인 근|>|음수인 근|
➡ (두 근의 합)>0, (두 근의 곱)<0

③ |양수인 근|<|음수인 근|
➡ (두 근의 합)<0, (두 근의 곱)<0

1008 이차방정식 $x^2-(k^2-4k+3)x-3k+5=0$의 두 근을 α, β라 하면 두 근의 부호가 서로 다르므로

$\alpha\beta=-3k+5<0 \quad \therefore k>\frac{5}{3}$ …… ㉠ ··· ❶

또 음수인 근의 절댓값이 양수인 근보다 크므로

$\alpha+\beta=k^2-4k+3<0$

$(k-1)(k-3)<0 \quad \therefore 1<k<3$ …… ㉡ ··· ❷

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $\quad \frac{5}{3}<k<3$ ··· ❸

답 $\frac{5}{3}<k<3$

채점 기준	비율
❶ 두 근의 부호가 서로 다르도록 하는 k의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %
❷ 음수인 근의 절댓값이 양수인 근보다 크도록 하는 k의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %
❸ 조건을 모두 만족시키는 k의 값의 범위를 구할 수 있다.	20 %

유형 22 이차방정식의 근의 분리

본책 145쪽

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ $(a>0)$의 판별식을 D라 하고, $f(x)=ax^2+bx+c$라 할 때

① 두 근이 모두 p보다 크다. ➡ $D\geq0$, $f(p)>0$, $-\frac{b}{2a}>p$

② 두 근이 모두 p보다 작다. ➡ $D\geq0$, $f(p)>0$, $-\frac{b}{2a}<p$

③ 두 근 사이에 p가 있다. ➡ $f(p)<0$

1009 $f(x)=x^2-2kx+2-k$라 하면 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근이 모두 1보다 작으므로

(i) $f(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-k)^2-(2-k)\geq0$

$k^2+k-2\geq0$, $\quad (k+2)(k-1)\geq0$

$\therefore k\leq-2$ 또는 $k\geq1$

(ii) $f(1)=1-2k+2-k>0$

$-3k+3>0 \quad \therefore k<1$

(iii) 이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 축의 방정식이 $x=k$이므로

$k<1$

이상에서 공통부분을 구하면 $\quad k\leq-2$ 　답 $k\leq-2$

1010 $f(x)=x^2+3px+3p-1$이라 하면 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근이 모두 -3보다 크므로

(i) $f(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(3p)^2-4(3p-1)\geq0$

$9p^2-12p+4\geq0 \quad \therefore (3p-2)^2\geq0$

따라서 p는 모든 실수이다.

(ii) $f(-3)=9-9p+3p-1>0$

$-6p+8>0 \quad \therefore p<\frac{4}{3}$

(iii) 이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 축의 방정식이 $x=-\frac{3}{2}p$이므로

$-\frac{3}{2}p>-3 \quad \therefore p<2$

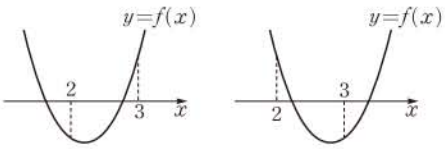
이상에서 공통부분을 구하면 $\quad p<\frac{4}{3}$

따라서 정수 p의 최댓값은 1이다. 　답 ②

1011 $x^2-5x+6=0$에서 $\quad (x-2)(x-3)=0$

$\therefore x=2$ 또는 $x=3$

즉 $x^2+ax-8=0$의 한 근만이 2와 3 사이에 있어야 하므로 $f(x)=x^2+ax-8$이라 하면 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같아야 한다.



따라서 $f(2)f(3)<0$이므로

$(4+2a-8)(9+3a-8)<0$

$(2a-4)(3a+1)<0 \quad \therefore -\frac{1}{3}<a<2$

답 $-\frac{1}{3}<a<2$

1012 $f(x)=x^2+2(k-1)x-k+3$이라 하면 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근이 모두 0과 3 사이에 있으므로

(i) $f(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(k-1)^2-(-k+3)\geq0$

$k^2-k-2\geq0$, $\quad (k+1)(k-2)\geq0$

$\therefore k\leq-1$ 또는 $k\geq2$ …… ㉠

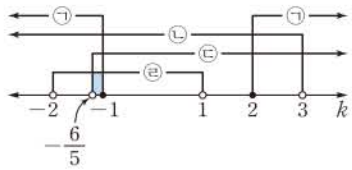
(ii) $f(0)=-k+3>0 \quad \therefore k<3$ …… ㉡

(iii) $f(3)=9+6(k-1)-k+3>0$

$5k+6>0 \qquad \therefore k>-\frac{6}{5}$ …… ㉢

(iv) 이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 축의 방정식이 $x=-k+1$이므로

$0<-k+1<3 \qquad \therefore -2<k<1$ …… ㉣



이상에서 공통부분을 구하면 $\quad -\frac{6}{5}<k\le -1$

답 $-\frac{6}{5}<k\le -1$

유형 23 사차방정식의 근의 판별 본책 145쪽

사차방정식 $x^4+ax^2+b=0$ (a, b는 실수)이

① 서로 다른 네 실근을 갖는다.
⇒ $x^2=X$로 놓으면 이차방정식 $X^2+aX+b=0$의 두 근이 서로 다른 양수이다.
⇒ $a^2-4b>0$, $-a>0$, $b>0$

② 서로 다른 두 실근과 두 허근을 갖는다.
⇒ $x^2=X$로 놓으면 이차방정식 $X^2+aX+b=0$의 두 근이 서로 다른 부호이다.
⇒ $b<0$

1013 $x^2=X$로 놓으면 주어진 방정식은

$X^2+mX-m+3=0$ …… ㉠

이때 주어진 사차방정식이 서로 다른 네 실근을 가지려면 방정식 ㉠의 두 근이 서로 다른 양수이어야 하므로

(i) ㉠의 판별식을 D라 하면

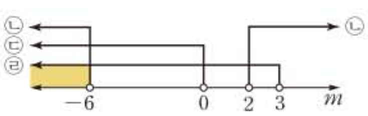
$D=m^2-4(-m+3)>0$

$m^2+4m-12>0, \qquad (m+6)(m-2)>0$

$\therefore m<-6$ 또는 $m>2$ …… ㉡

(ii) (두 근의 합)$=-m>0 \qquad \therefore m<0$ …… ㉢

(iii) (두 근의 곱)$=-m+3>0 \qquad \therefore m<3$ …… ㉣



이상에서 공통부분을 구하면

$m<-6$

답 $m<-6$

1014 $x^2=X$로 놓으면 주어진 방정식은

$X^2-kX+k^2-2k-8=0$ …… ㉠

이때 주어진 사차방정식이 서로 다른 두 실근과 서로 다른 두 허근을 가지려면 방정식 ㉠의 두 근이 서로 다른 부호이어야 하므로

(두 근의 곱)$=k^2-2k-8<0$

$(k+2)(k-4)<0 \qquad \therefore -2<k<4$

따라서 자연수 k는 1, 2, 3의 3개이다.

답 ③

1015 $x^4-2kx^2+k^2-12k=-3x^2-27$에서

$x^4+(3-2k)x^2+k^2-12k+27=0$

$x^2=X$로 놓으면 이 방정식은

$X^2+(3-2k)X+k^2-12k+27=0$ …… ㉠

이때 주어진 사차방정식이 실근만을 가지려면 방정식 ㉠의 두 근이 모두 양수이어야 하므로

(i) ㉠의 판별식을 D라 하면

$D=(3-2k)^2-4(k^2-12k+27)\ge 0$

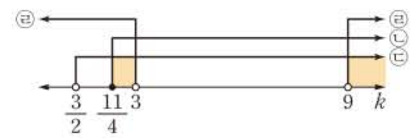
$36k-99\ge 0 \qquad \therefore k\ge \frac{11}{4}$ …… ㉡

(ii) (두 근의 합)$=2k-3>0 \qquad \therefore k>\frac{3}{2}$ …… ㉢

(iii) (두 근의 곱)$=k^2-12k+27>0$

$(k-3)(k-9)>0$

$\therefore k<3$ 또는 $k>9$ …… ㉣



이상에서 공통부분을 구하면

$\frac{11}{4}\le k<3$ 또는 $k>9$

따라서 k의 최솟값은 $\frac{11}{4}$이다.

답 ②

1016 전략 부등식 $f(x)>g(x)$의 해는 $y=f(x)$의 그래프가 $y=g(x)$의 그래프보다 위쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위이다.

풀이 ㄱ. $\beta-\gamma<\gamma-\alpha$에서 $\frac{\alpha+\beta}{2}<\gamma$이므로

$f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)>g(\gamma)$

ㄴ. $g(x)\{f(x)-g(x)\}=0$에서

$g(x)=0$ 또는 $f(x)=g(x)$

$\therefore x=\alpha$ 또는 $x=\gamma$

따라서 방정식 $g(x)\{f(x)-g(x)\}=0$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.

ㄷ. $\{f(x)\}^2\ge g(x)f(x)$에서 $\qquad \{f(x)\}^2-g(x)f(x)\ge 0$

$f(x)\{f(x)-g(x)\}\ge 0$

$\therefore f(x)\ge 0$, $f(x)\ge g(x)$ 또는 $f(x)\le 0$, $f(x)\le g(x)$

(i) $f(x)\ge 0$, $f(x)\ge g(x)$일 때,

주어진 그래프에서 $\quad \alpha\le x\le\gamma$

(ii) $f(x)\le 0$, $f(x)\le g(x)$일 때,

주어진 그래프에서 $\quad x\le\alpha$ 또는 $x\ge\beta$

(i), (ii)에서 $\quad x\le\gamma$ 또는 $x\ge\beta$ (i), (ii)의 범위를 합한 것이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

1017 전략 $f(x)\ge 0$, $f(x)<0$일 때로 나누어 $g(x)$를 구한다.

풀이 (i) $f(x)\ge 0$, 즉 $x\le -3$ 또는 $x\ge 1$일 때,

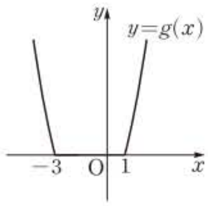
$g(x)=\frac{f(x)+f(x)}{2}=f(x)$

(ii) $f(x)<0$, 즉 $-3<x<1$일 때,

$g(x)=\frac{f(x)-f(x)}{2}=0$

(i), (ii)에서 $\quad g(x)=\begin{cases} f(x) & (x\le -3 \text{ 또는 } x\ge 1) \\ 0 & (-3<x<1) \end{cases}$

따라서 $y=g(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



ㄱ. $f(x)=x^2+2x-3=(x+1)^2-4$이므로 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=-1$에 대하여 대칭이다.
따라서 $y=g(x)$의 그래프도 직선 $x=-1$에 대하여 대칭이다.

ㄴ. 직선 $y=3$은 $y=g(x)$의 그래프와 서로 다른 두 점에서 만나므로 방정식 $g(x)=3$은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

ㄷ. 부등식 $g(x)\le 0$의 해는 $-3\le x\le 1$이다.

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

답 ⑤

1018 전략 두 이차함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프의 교점의 y좌표가 모두 k임을 이용한다.

풀이 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 두 점 $(-1,\ k)$, $(5,\ k)$를 지나므로 이차방정식 $f(x)-k=0$의 두 근이 -1, 5이다.
이때 $y=f(x)$의 x^2의 계수가 1이므로

$f(x)-k=(x+1)(x-5)$

$\therefore\ f(x)=(x+1)(x-5)+k$

같은 방법으로 하면 이차방정식 $g(x)-k=0$의 두 근이 -1, 5이고, $y=g(x)$의 x^2의 계수가 -1이므로

$g(x)-k=-(x+1)(x-5)$

$\therefore\ g(x)=-(x+1)(x-5)+k$

따라서 $g(0)=5+k$이므로 부등식 $f(x)<g(0)+2$에서

$(x+1)(x-5)+k<5+k+2$

$x^2-4x-12<0, \qquad (x+2)(x-6)<0$

$\therefore\ -2<x<6$

따라서 $\alpha=-2$, $\beta=6$이므로

$\alpha+\beta=4$

답 ④

1019 전략 직선 $x=p$를 축으로 하는 이차함수의 식은 $y=m(x-p)^2+n$ (m, n은 상수)으로 놓을 수 있다.

풀이 조건 (가)에 의하여

$f(x)=\frac{1}{2}(x-p)^2+a,\ g(x)=2(x-p)^2+b$ (a, b는 상수)

라 하면 조건 (나)의 $f(x)\ge g(x)$에서

$\frac{1}{2}(x-p)^2+a\ge 2(x-p)^2+b$

$\therefore\ \frac{3}{2}x^2-3px+\frac{3}{2}p^2+b-a\le 0 \qquad \cdots\cdots ㉠$

해가 $-1\le x\le 5$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$(x+1)(x-5)\le 0 \qquad \therefore\ x^2-4x-5\le 0$

양변에 $\frac{3}{2}$을 곱하면 $\qquad \frac{3}{2}x^2-6x-\frac{15}{2}\le 0$

이 부등식이 ㉠과 같으므로

$-3p=-6,\ \frac{3}{2}p^2+b-a=-\frac{15}{2}$

$\therefore\ p=2,\ a-b=\frac{27}{2}$

따라서 $f(x)=\frac{1}{2}(x-2)^2+a$, $g(x)=2(x-2)^2+b$이므로

$p\times\{f(2)-g(2)\}=2(a-b)=27$

답 27

1020 전략 절댓값 기호 안의 식의 값이 0이 되는 x의 값을 기준으로 구간을 나눈다.

풀이 $x^2-4x+3=0$에서 $\qquad (x-1)(x-3)=0$

$\therefore\ x=1$ 또는 $x=3$

$x-4=0$에서 $\qquad x=4$ ··· ❶

$|x^2-4x+3|-|x-4|\ge\frac{1}{2}x^2-1$에서

(i) $x<1$일 때, $x^2-4x+3>0$, $x-4<0$이므로

$x^2-4x+3+x-4\ge\frac{1}{2}x^2-1, \qquad x^2-6x\ge 0$

$x(x-6)\ge 0 \qquad \therefore\ x\le 0$ 또는 $x\ge 6$

그런데 $x<1$이므로 $\qquad x\le 0$

(ii) $1\le x<3$일 때, $x^2-4x+3\le 0$, $x-4<0$이므로

$-(x^2-4x+3)+x-4\ge\frac{1}{2}x^2-1$

$\therefore\ 3x^2-10x+12\le 0$

그런데 $3x^2-10x+12=3\left(x-\frac{5}{3}\right)^2+\frac{11}{3}\ge\frac{11}{3}$이므로 해는 없다.

(iii) $3\le x<4$일 때, $x^2-4x+3\ge 0$, $x-4<0$이므로

$x^2-4x+3+x-4\ge\frac{1}{2}x^2-1, \qquad x^2-6x\ge 0$

$x(x-6)\ge 0 \qquad \therefore\ x\le 0$ 또는 $x\ge 6$

그런데 $3\le x<4$이므로 해는 없다.

(iv) $x\ge 4$일 때, $x^2-4x+3>0$, $x-4\ge 0$이므로

$x^2-4x+3-(x-4)\ge\frac{1}{2}x^2-1$

$x^2-10x+16\ge 0, \qquad (x-2)(x-8)\ge 0$

$\therefore\ x\le 2$ 또는 $x\ge 8$

그런데 $x\ge 4$이므로 $\qquad x\ge 8$ ··· ❷

이상에서 주어진 부등식의 해는

$x\le 0$ 또는 $x\ge 8$ ··· ❸

해가 $x\le 0$ 또는 $x\ge 8$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$x(x-8)\ge 0 \qquad \therefore\ x^2-8x\ge 0$

이 부등식이 $x^2+ax+b\ge 0$과 같으므로

$a=-8,\ b=0 \qquad \therefore\ a+b=-8$ ··· ❹

답 -8

채점 기준	비율
❶ 절댓값 기호 안의 식의 값이 0이 되는 x의 값을 구할 수 있다.	10 %
❷ $x<1$, $1\le x<3$, $3\le x<4$, $x\ge 4$일 때의 해를 각각 구할 수 있다.	50 %
❸ 주어진 부등식의 해를 구할 수 있다.	10 %
❹ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	30 %

1021 전략 $a<0$, $a=0$, $a>0$인 경우로 나누어 주어진 부등식의 해를 구해 본다.

풀이 (i) $a<0$일 때,

$a(x-a)(x-a^2)<0$에서 $\qquad (x-a)(x-a^2)>0$

$\therefore x<a$ 또는 $x>a^2$

따라서 주어진 부등식을 만족시키는 정수 x는 무수히 많다. ··· ❶

(ii) $a=0$일 때,

$a(x-a)(x-a^2)<0$에서 $0<0$이므로 주어진 부등식을 만족시키는 정수 x는 존재하지 않는다. ··· ❷

(iii) $a>0$일 때,

$a(x-a)(x-a^2)<0$에서 $\quad (x-a)(x-a^2)<0$

$\therefore a<x<a^2$

주어진 부등식을 만족시키는 정수 x가 오직 한 개뿐이려면

$a^2-a=2, \quad a^2-a-2=0$

$(a+1)(a-2)=0 \quad \therefore a=-1$ 또는 $a=2$

그런데 $a>0$이므로 $\quad a=2$ ··· ❸

이상에서 구하는 정수 a의 값은 2이다. ··· ❹

답 2

채점 기준	비율
❶ $a<0$일 때, 주어진 부등식을 만족시키는 정수 x가 무수히 많음을 알 수 있다.	30 %
❷ $a=0$일 때, 주어진 부등식을 만족시키는 정수 x가 존재하지 않음을 알 수 있다.	30 %
❸ $a>0$일 때, 조건을 만족시키는 a의 값을 구할 수 있다.	30 %
❹ 정수 a의 값을 구할 수 있다.	10 %

참고 (iii)에서 세 정수 a, x, a^2은 이 순서대로 1씩 커지므로

$x=a+1$, $a^2=a+2 \quad \therefore a^2-a=2$

1022 **전략** 이차부등식 $ax^2+bx+c\geq 0$의 해가 오직 한 개 존재하면 $a<0$, $b^2-4ac=0$이다.

풀이 조건 (가)에서 부등식 $f\left(\frac{1-x}{3}\right)\geq 0$의 해가 $-5\leq x\leq 1$이므로 $\frac{1-x}{3}=t$라 하면

$-1\leq -x\leq 5, \quad 0\leq 1-x\leq 6$

$0\leq \frac{1-x}{3}\leq 2 \quad \therefore 0\leq t\leq 2$

즉 부등식 $f(t)\geq 0$의 해가 $0\leq t\leq 2$이므로

$f(x)=ax(x-2)\ (a<0)$

로 놓을 수 있다.

조건 (나)에서 부등식 $ax(x-2)\geq 3x+\frac{3}{4}$, 즉

$ax^2-(2a+3)x-\frac{3}{4}\geq 0$의 해가 오직 한 개 존재하므로 이차방정식 $ax^2-(2a+3)x-\frac{3}{4}=0$의 판별식을 D라 하면

$D=\{-(2a+3)\}^2-4\cdot a\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)=0$

$4a^2+15a+9=0, \quad (a+3)(4a+3)=0$

$\therefore a=-3$ 또는 $a=-\frac{3}{4}$

(i) $a=-3$일 때,

$f(x)=-3x(x-2)$이므로 $\quad f(1)=3$

(ii) $a=-\frac{3}{4}$일 때,

$f(x)=-\frac{3}{4}x(x-2)$이므로 $\quad f(1)=\frac{3}{4}$

따라서 $f(1)$의 값이 될 수 있는 것은 ③이다. 답 ③

1023 **전략** 이차부등식 $ax^2+bx+c<0$이 해를 가지려면 $a<0$이거나 $a>0$, $b^2-4ac>0$이어야 한다.

풀이 $(x-1)(x-p)<3(x-k)$에서

$x^2-(p+1)x+p<3x-3k$

$\therefore x^2-(p+4)x+p+3k<0$

이 이차부등식이 해를 가지려면 이차방정식

$x^2-(p+4)x+p+3k=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D_1이라 하면

$D_1=\{-(p+4)\}^2-4(p+3k)>0$

$p^2+4p+16-12k>0$ ······ ㉠

㉠이 p의 값에 관계없이 항상 성립해야 하므로 p에 대한 이차방정식 $p^2+4p+16-12k=0$의 판별식을 D_2라 하면

$\frac{D_2}{4}=2^2-(16-12k)<0$

$-12+12k<0 \quad \therefore k<1$

따라서 정수 k의 최댓값은 0이다. 답 ①

1024 **전략** $\sqrt{A}$가 순허수가 되려면 $A<0$이어야 함을 이용한다.

풀이 모든 실수 x에 대하여 $\sqrt{(k+1)x^2-(k+1)x-1}$이 순허수가 되려면 모든 실수 x에 대하여 부등식

$(k+1)x^2-(k+1)x-1<0$ ······ ㉠

이 성립해야 한다.

(i) $k=-1$일 때,

$0\cdot x^2-0\cdot x-1=-1<0$이므로 ㉠은 모든 실수 x에 대하여 성립한다.

(ii) $k\neq -1$일 때,

모든 실수 x에 대하여 ㉠이 성립하려면

$k+1<0 \quad \therefore k<-1$ ······ ㉡

또 이차방정식 $(k+1)x^2-(k+1)x-1=0$의 판별식을 D라 하면

$D=\{-(k+1)\}^2+4(k+1)<0$

$(k+5)(k+1)<0 \quad \therefore -5<k<-1$ ······ ㉢

㉡, ㉢의 공통부분을 구하면 $\quad -5<k<-1$

(i), (ii)에서 $\quad -5<k\leq -1$ 답 ②

1025 **전략** $f(x)=x^2+2ax-3a^2$으로 놓고 $y=f(x)$의 그래프를 그려 본다.

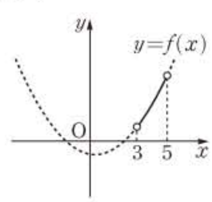
풀이 $x^2+2ax>3a^2$에서 $\quad x^2+2ax-3a^2>0$

$f(x)=x^2+2ax-3a^2$이라 하면

$f(0)=-3a^2\leq 0$

이므로 $3<x<5$에서 $f(x)>0$이려면

$f(3)\geq 0$이어야 한다.



즉 $f(3)=9+6a-3a^2\geq 0$에서

$a^2-2a-3\leq 0, \quad (a+1)(a-3)\leq 0$

$\therefore -1\leq a\leq 3$ 답 ③

다른 풀이 $3<x<5$에서 이차부등식 $x^2+2ax>3a^2$이 항상 성립하려면 $3<x<5$가 $x^2+2ax>3a^2$의 해에 포함되어야 한다.

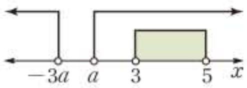
$x^2+2ax>3a^2$에서 $\quad x^2+2ax-3a^2>0$

$\therefore\ (x+3a)(x-a)>0$

(i) $a\geq0$일 때,

$x<-3a$ 또는 $x>a$

이므로 오른쪽 그림에서



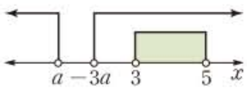
$a\leq3$

그런데 $a\geq0$이므로 $\quad 0\leq a\leq3$

(ii) $a<0$일 때,

$x<a$ 또는 $x>-3a$

이므로 오른쪽 그림에서



$-3a\leq3 \quad \therefore\ a\geq-1$

그런데 $a<0$이므로 $\quad -1\leq a<0$

(i), (ii)에서 $\quad -1\leq a\leq3$

1026 전략 이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=2x-1$을 그려 본다.

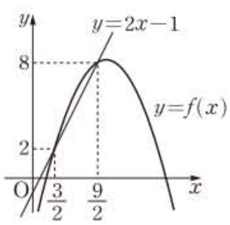
풀이 $y=2x-1$에 $y=2$를 대입하면

$2=2x-1 \quad \therefore\ x=\frac{3}{2}$

$y=8$을 대입하면

$8=2x-1 \quad \therefore\ x=\frac{9}{2}$

따라서 이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=2x-1$의 교점의 좌표가 $\left(\frac{3}{2},\ 2\right)$, $\left(\frac{9}{2},\ 8\right)$이므로 그 그래프는 오른쪽 그림과 같다. ⋯➊



$f(x)-2x+1>0$에서

$f(x)>2x-1$

이 부등식의 해는 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $y=2x-1$보다 위쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위이므로

$\frac{3}{2}<x<\frac{9}{2}$ ⋯➋

따라서 정수 x는 2, 3, 4이므로 구하는 합은

$2+3+4=9$ ⋯➌

답 9

채점 기준	비율
➊ $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=2x-1$의 교점의 좌표를 구하고 그래프를 그릴 수 있다.	40 %
➋ $f(x)-2x+1>0$을 만족시키는 x의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %
➌ 정수 x의 값의 합을 구할 수 있다.	20 %

1027 전략 임의의 실수 x_1, x_2에 대하여 $f(x_1)>g(x_2)$가 성립하려면 $f(x)$의 최솟값이 $g(x)$의 최댓값보다 커야 함을 이용한다.

풀이 $f(x)=x^2+x-a^2=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-a^2-\frac{1}{4}$이므로 $f(x)$의 최솟값은 $-a^2-\frac{1}{4}$이다. ⋯➊

또 $g(x)=-x^2-2x+3a=-(x+1)^2+3a+1$이므로 $g(x)$의 최댓값은 $3a+1$이다. ⋯➋

임의의 실수 x_1, x_2에 대하여 $f(x_1)>g(x_2)$가 성립하려면

$-a^2-\frac{1}{4}>3a+1, \quad 4a^2+12a+5<0$

$(2a+5)(2a+1)<0 \quad \therefore\ -\frac{5}{2}<a<-\frac{1}{2}$

따라서 정수 a의 최댓값은 -1이다. ⋯➌

답 -1

채점 기준	비율
➊ $f(x)$의 최솟값을 구할 수 있다.	30 %
➋ $g(x)$의 최댓값을 구할 수 있다.	30 %
➌ 정수 a의 최댓값을 구할 수 있다.	40 %

참고 모든 실수 x에 대하여 부등식 $x^2+x-a^2>-x^2-2x+3a$가 성립할 조건을 구하지 않도록 주의한다.

1028 전략 A 지점과 보관창고 사이의 거리를 x km라 하고 운송비의 조건을 이용하여 x에 대한 부등식을 세운다.

풀이 보관창고가 A 지점에서 x km 떨어져 있다고 하면 보관창고와 B 지점 사이의 거리는 $\quad 10+x$ (km)

보관창고와 C 지점 사이의 거리는 $\quad 20-x$ (km)

이때 $\overline{AC}=20$ km이므로 $\quad 0<x<20$ ⋯⋯ ㉠

공장과 보관창고와의 거리가 x km일 때, 제품 한 개당 운송비는 x^2원이므로 B 지점의 공장에서 하루에 생산된 제품의 운송비는

$200(10+x)^2$ (원)

A 지점의 공장에서 하루에 생산된 제품의 운송비는

$100x^2$ (원)

C 지점의 공장에서 하루에 생산된 제품의 운송비는

$300(20-x)^2$ (원)

하루에 드는 총 운송비가 155000원 이하가 되어야 하므로

$200(10+x)^2+100x^2+300(20-x)^2\leq155000$

$3x^2-40x-75\leq0, \quad (3x+5)(x-15)\leq0$

$\therefore\ -\frac{5}{3}\leq x\leq15$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡에서 $\quad 0<x\leq15$

따라서 보관창고는 A 지점에서 최대 15 km 떨어진 지점까지 지을 수 있다.

답 ④

1029 전략 정수 n에 대하여 $[x]=n$일 때 $n\leq x<n+1$임을 이용한다.

풀이 $[x]^2-7[x]+10\leq0$에서 $\quad ([x]-2)([x]-5)\leq0$

$\therefore\ 2\leq[x]\leq5$

이때 $[x]$의 값은 정수이므로 $\quad [x]=2,\ 3,\ 4,\ 5$

$[x]=2$에서 $\quad 2\leq x<3$

$[x]=3$에서 $\quad 3\leq x<4$

$[x]=4$에서 $\quad 4\leq x<5$

$[x]=5$에서 $\quad 5\leq x<6$

$\therefore\ 2\leq x<6$ ⋯⋯ ㉠

$x^2-5x\leq6x-24$에서 $\quad x^2-11x+24\leq0$

$(x-3)(x-8)\leq0 \quad \therefore\ 3\leq x\leq8$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $\quad 3\leq x<6$

따라서 정수 x는 3, 4, 5의 3개이다.

답 3

1030 전략 각 부등식에 $x=1$을 대입하여 n의 값을 구한다.

풀이 $6x^2-11nx+3n^2\le 0$에 $x=1$을 대입하면

$6-11n+3n^2\le 0,\quad 3n^2-11n+6\le 0$

$(3n-2)(n-3)\le 0\quad \therefore \frac{2}{3}\le n\le 3$ …… ㉠

$|3x-2n|\ge 2$에 $x=1$을 대입하면 $|3-2n|\ge 2$

$3-2n\le -2$ 또는 $3-2n\ge 2$

$\therefore n\le \frac{1}{2}$ 또는 $n\ge \frac{5}{2}$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $\frac{5}{2}\le n\le 3$

그런데 n은 정수이므로 $n=3$

따라서 주어진 연립부등식은 $\begin{cases} 6x^2-33x+27\le 0 \\ |3x-6|\ge 2 \end{cases}$

$6x^2-33x+27\le 0$에서 $2x^2-11x+9\le 0$

$(x-1)(2x-9)\le 0\quad \therefore 1\le x\le \frac{9}{2}$ …… ㉢

$|3x-6|\ge 2$에서 $3x-6\le -2$ 또는 $3x-6\ge 2$

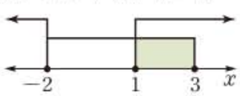
$\therefore x\le \frac{4}{3}$ 또는 $x\ge \frac{8}{3}$ …… ㉣

㉢, ㉣의 공통부분을 구하면 $1\le x\le \frac{4}{3}$ 또는 $\frac{8}{3}\le x\le \frac{9}{2}$

답 $1\le x\le \frac{4}{3}$ 또는 $\frac{8}{3}\le x\le \frac{9}{2}$

1031 전략 주어진 연립부등식의 해를 수직선 위에 나타내어 본다.

풀이 해가 $x=-2$ 또는 $1\le x\le 3$이므로 주어진 연립부등식의 각 부등식의 해를 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같아야 한다.



따라서 이차부등식 $x^2+ax+b\le 0$의 해는 $-2\le x\le 3$이고, 이차부등식 $x^2+cx+d\ge 0$의 해는 $x\le -2$ 또는 $x\ge 1$이다. ··· ❶

해가 $-2\le x\le 3$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$(x+2)(x-3)\le 0\quad \therefore x^2-x-6\le 0$

$\therefore a=-1,\ b=-6$ ··· ❷

해가 $x\le -2$ 또는 $x\ge 1$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$(x+2)(x-1)\ge 0\quad \therefore x^2+x-2\ge 0$

$\therefore c=1,\ d=-2$ ··· ❸

$\therefore ad-bc=8$ ··· ❹

답 8

채점 기준	비율
❶ 부등식 $x^2+ax+b\le 0$과 $x^2+cx+d\ge 0$의 해를 구할 수 있다.	50 %
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	20 %
❸ c, d의 값을 구할 수 있다.	20 %
❹ $ad-bc$의 값을 구할 수 있다.	10 %

1032 전략 이차부등식 $x^2+ax+b\ge 0$이 항상 성립하려면 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 판별식 D에 대하여 $D\le 0$이어야 함을 이용한다.

풀이 모든 실수 x에 대하여 $-x^2+3x+2\le mx+n$, 즉 $x^2+(m-3)x+n-2\ge 0$이 성립하므로 이차방정식 $x^2+(m-3)x+n-2=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$D_1=(m-3)^2-4(n-2)\le 0$

$m^2-6m-4n+17\le 0$

$\therefore 4n\ge m^2-6m+17$ …… ㉠

모든 실수 x에 대하여 $mx+n\le x^2-x+4$, 즉 $x^2-(m+1)x+4-n\ge 0$이 성립하므로 이차방정식 $x^2-(m+1)x+4-n=0$의 판별식을 D_2라 하면

$D_2=\{-(m+1)\}^2-4(4-n)\le 0$

$m^2+2m+4n-15\le 0$

$\therefore 4n\le -m^2-2m+15$ …… ㉡

㉠, ㉡에 의하여

$m^2-6m+17\le 4n\le -m^2-2m+15$ …… ㉢

이므로

$m^2-6m+17\le -m^2-2m+15$

$2m^2-4m+2\le 0,\quad 2(m-1)^2\le 0$

$\therefore m=1$

이것을 ㉢에 대입하면

$12\le 4n\le 12,\quad 4n=12\quad \therefore n=3$

$\therefore m^2+n^2=10$

답 ②

1033 전략 $ab>0$이면 a, b는 서로 같은 부호이고, $ab<0$이면 a, b는 서로 다른 부호임을 이용한다.

풀이 $x^2-(a+b)x+ab<0$에서

$(x-a)(x-b)<0\quad \therefore a<x<b$ …… ㉠

$abx^2-(a+b)x+1<0$에서

$(ax-1)(bx-1)<0$ …… ㉡

ㄱ. $ab<0$이면 $a<0<b$이므로 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$

㉡에서 $\frac{1}{a}<x<\frac{1}{b}$ …… ㉢

㉠, ㉢의 공통부분은 항상 존재하므로 연립부등식의 해는 항상 존재한다.

ㄴ. $ab>0$이면 $a>0,\ b>0$ 또는 $a<0,\ b<0$

(i) $a>0,\ b>0$일 때,

$0<a<b$이므로 $0<\frac{1}{b}<\frac{1}{a}$

㉡에서 $\frac{1}{b}<x<\frac{1}{a}$ …… ㉣

주어진 연립부등식이 해를 가지려면 ㉠, ㉣의 공통부분이 존재해야 하므로

$a<\frac{1}{a},\ \frac{1}{b}<b\quad \therefore a^2<1,\ b^2>1\ (\because a>0,\ b>0)$

$\therefore a^2+b^2>1$

(ii) $a<0,\ b<0$일 때,

$a<b<0$이므로 $\frac{1}{b}<\frac{1}{a}<0$

㉡에서 $\frac{1}{b}<x<\frac{1}{a}$ …… ㉤

주어진 연립부등식이 해를 가지려면 ㉠, ㉤의 공통부분이 존재해야 하므로

$a<\frac{1}{a},\ \frac{1}{b}<b\quad \therefore a^2>1,\ b^2<1\ (\because a<0,\ b<0)$

$\therefore a^2+b^2>1$

(i), (ii)에서 $\quad a^2+b^2>1$

ㄷ. ㄴ의 (i)에서 $a>0$, $b>0$일 때 $a^2<1$, $b^2>1$이므로

$\quad 0<a<1<b$

즉 $a-1<0$, $b-1>0$이므로

$\quad (a-1)(b-1)<0$

ㄴ의 (ii)에서 $a<0$, $b<0$일 때 $a^2>1$, $b^2<1$이므로

$\quad a<-1<b<0$

즉 $a+1<0$, $b+1>0$이므로

$\quad (a+1)(b+1)<0$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ③

1034 전략 각 이차부등식을 풀어 해의 공통부분을 생각한다.

풀이 $x^2+x+n-n^2>0$에서

$\quad (x+n)(x-n+1)>0$

이때 $-n<n-1$이므로 이 부등식의 해는

$\quad x<-n$ 또는 $x>n-1$ …… ㉠

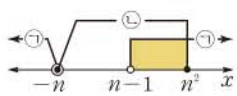
$x^2+(n-n^2)x-n^3\le 0$에서

$\quad (x+n)(x-n^2)\le 0$

이때 $-n<n^2$이므로 이 부등식의 해는

$\quad -n\le x\le n^2$ …… ㉡

$-n<n-1<n^2$이므로 ㉠, ㉡의 공통부분을 구하면



$\quad n-1<x\le n^2$

이때 정수인 해의 개수가 13 이하가 되어야 하므로

$\quad n^2-(n-1)\le 13, \quad n^2-n-12\le 0$

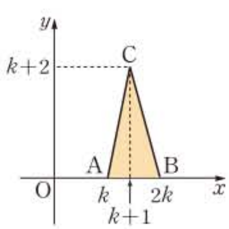
$\quad (n+3)(n-4)\le 0 \quad \therefore -3\le n\le 4$

따라서 자연수 n은 1, 2, 3, 4이므로 구하는 합은

$\quad 1+2+3+4=10$ 답 ④

1035 전략 세 점 A, B, C를 좌표평면 위에 나타낸 후 △ABC의 넓이를 구한다.

풀이 오른쪽 그림에서



$$\triangle ABC=\frac{1}{2}(2k-k)(k+2)$$

$$=\frac{1}{2}k(k+2) \quad \cdots ❶$$

△ABC의 넓이가 4 이상 24 이하이므로

$$4\le \frac{1}{2}k(k+2)\le 24$$

$\quad \therefore 8\le k^2+2k\le 48$ ⋯ ❷

$8\le k^2+2k$에서 $\quad k^2+2k-8\ge 0$

$\quad (k+4)(k-2)\ge 0 \quad \therefore k\le -4$ 또는 $k\ge 2$

그런데 k는 자연수이므로 $\quad k\ge 2$ …… ㉠

$k^2+2k\le 48$에서 $\quad k^2+2k-48\le 0$

$\quad (k+8)(k-6)\le 0 \quad \therefore -8\le k\le 6$

그런데 k는 자연수이므로 $\quad 0<k\le 6$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $\quad 2\le k\le 6$ ⋯ ❸

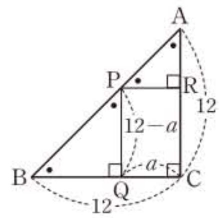
따라서 자연수 k는 2, 3, 4, 5, 6의 5개이다. ⋯ ❹

답 5

채점 기준	비율
❶ △ABC의 넓이를 k에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	20 %
❷ k에 대한 부등식을 세울 수 있다.	30 %
❸ k의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %
❹ 자연수 k의 개수를 구할 수 있다.	10 %

1036 전략 □PQCR, △APR, △PBQ의 넓이를 각각 a에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 오른쪽 그림에서 △ABC, △APR, △PBQ는 모두 직각이등변삼각형이다.



$\overline{QC}=a$이므로

$\quad 0<a<12$

$\overline{PR}=a$, $\overline{BQ}=12-a$이므로

$\quad \overline{AR}=\overline{PR}=a$, $\overline{PQ}=\overline{BQ}=12-a$

$\quad \therefore$ □PQCR$=a(12-a)$,

$$\triangle APR=\frac{1}{2}a^2,\ \triangle PBQ=\frac{1}{2}(12-a)^2$$

이때 □PQCR$>$△APR, □PQCR$>$△PBQ이므로

$$\begin{cases} a(12-a)>\frac{1}{2}a^2 & \cdots\cdots ㉠ \\ a(12-a)>\frac{1}{2}(12-a)^2 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠에서 $\quad a^2-8a<0, \quad a(a-8)<0$

$\quad \therefore 0<a<8$ …… ㉢

㉡에서 $\quad a^2-16a+48<0$

$\quad (a-4)(a-12)<0 \quad \therefore 4<a<12$ …… ㉣

㉢, ㉣의 공통부분을 구하면 $\quad 4<a<8$

따라서 자연수 a는 5, 6, 7이므로 구하는 합은

$\quad 5+6+7=18$ 답 18

1037 전략 이차방정식이 실근을 가지므로 (판별식)≥ 0임을 이용한다.

풀이 이차방정식 $x^2+kx-k=0$이 실근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\quad D=k^2+4k\ge 0, \quad k(k+4)\ge 0$

$\quad \therefore k\le -4$ 또는 $k\ge 0$ …… ㉠ ⋯ ❶

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\quad \alpha+\beta=-k,\ \alpha\beta=-k$

$\quad \therefore |\alpha-\beta|^2=(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$

$\quad\quad =k^2+4k$

$|\alpha-\beta|\le 2\sqrt{3}$에서 $|\alpha-\beta|^2\le 12$이므로

$\quad k^2+4k\le 12, \quad k^2+4k-12\le 0$

$\quad (k+6)(k-2)\le 0 \quad \therefore -6\le k\le 2$ …… ㉡ ⋯ ❷

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$\quad -6\le k\le -4$ 또는 $0\le k\le 2$

따라서 구하는 정수 k는 -6, -5, -4, 0, 1, 2의 6개이다. ⋯ ❸

답 6

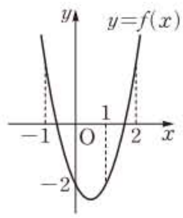
채점 기준	비율
❶ $x^2+kx-k=0$이 실근을 갖도록 하는 k의 값의 범위를 구할 수 있다.	30 %
❷ $\lvert\alpha-\beta\rvert\le 2\sqrt{3}$을 만족시키는 k의 값의 범위를 구할 수 있다.	50 %
❸ 정수 k의 개수를 구할 수 있다.	20 %

1038 전략 a가 양수인 경우와 음수인 경우로 나누어 생각한다.

풀이 $f(x)=ax^2-(a^2-4)x-2$라 하면 이차방정식 $f(x)=0$의 한 근은 -1과 0 사이에 있고, 다른 한 근은 1과 2 사이에 있다.

(i) $a>0$일 때,

$y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 하므로



$f(-1)=a+a^2-4-2>0$에서

$a^2+a-6>0$

$(a+3)(a-2)>0$

$\therefore a<-3$ 또는 $a>2$ …… ㉠

$f(0)=-2<0$

$f(1)=a-(a^2-4)-2<0$에서

$a^2-a-2>0, \quad (a+1)(a-2)>0$

$\therefore a<-1$ 또는 $a>2$ …… ㉡

$f(2)=4a-2(a^2-4)-2>0$에서

$a^2-2a-3<0, \quad (a+1)(a-3)<0$

$\therefore -1<a<3$ …… ㉢

㉠, ㉡, ㉢의 공통부분을 구하면 $\quad 2<a<3$

(ii) $a<0$일 때,

$f(0)=-2$이므로 조건을 만족시키는 $y=f(x)$의 그래프를 그릴 수 없다.

(i), (ii)에서 $\quad 2<a<3$ 답 $2<a<3$

참고 주어진 방정식은 이차방정식이므로 $a\neq 0$이다. 따라서 $a>0$일 때와 $a<0$일 때로 나누어 생각한다.

09 평면좌표

1039 $\overline{AB}=|6-1|=5$ 답 5

1040 $\overline{AB}=|5-(-3)|=8$ 답 8

1041 $\overline{OA}=|-4|=4$ 답 4

1042 $\overline{AB}=\sqrt{(3-2)^2+\{2-(-1)\}^2}=\sqrt{10}$ 답 $\sqrt{10}$

1043 $\overline{AB}=\sqrt{\{1-(-4)\}^2+\{-1-(-2)\}^2}=\sqrt{26}$ 답 $\sqrt{26}$

1044 $\overline{OA}=\sqrt{3^2+(-4)^2}=5$ 답 5

1045 $\overline{AB}=2\sqrt{5}$이므로

$\sqrt{(a-4)^2+(0-2)^2}=2\sqrt{5}$

양변을 제곱하면

$(a-4)^2+4=20, \quad a^2-8a=0$

$a(a-8)=0 \quad \therefore a=0$ 또는 $a=8$ 답 0, 8

1046 $\dfrac{2\cdot(-2)+3\cdot 6}{2+3}=\dfrac{14}{5} \quad \therefore \mathrm{P}\left(\dfrac{14}{5}\right)$ 답 $\dfrac{14}{5}$

1047 $\dfrac{1\cdot(-2)-2\cdot 6}{1-2}=14 \quad \therefore \mathrm{Q}(14)$ 답 14

1048 $\dfrac{6-2}{2}=2 \quad \therefore \mathrm{M}(2)$ 답 2

1049 $\dfrac{5\cdot 3+3\cdot 5}{5+3}=\dfrac{15}{4}, \ \dfrac{5\cdot(-6)+3\cdot 2}{5+3}=-3$

$\therefore \mathrm{P}\left(\dfrac{15}{4}, -3\right)$ 답 $\left(\dfrac{15}{4}, -3\right)$

1050 $\dfrac{2\cdot 3-1\cdot 5}{2-1}=1, \ \dfrac{2\cdot(-6)-1\cdot 2}{2-1}=-14$

$\therefore \mathrm{Q}(1, -14)$ 답 $(1, -14)$

1051 $\dfrac{5+3}{2}=4, \ \dfrac{2-6}{2}=-2$

$\therefore \mathrm{M}(4, -2)$ 답 $(4, -2)$

1052 답 (가) $\dfrac{y_2+y_3}{2}$ (나) 1 (다) $\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3}$ (라) $\dfrac{y_1+y_2+y_3}{3}$

1053 $\dfrac{2-1+3}{3}=\dfrac{4}{3}, \ \dfrac{1+0-4}{3}=-1$

$\therefore \mathrm{G}\left(\dfrac{4}{3}, -1\right)$ 답 $\left(\dfrac{4}{3}, -1\right)$

1054 $\frac{-2+4+1}{3}=1$, $\frac{3-5+8}{3}=2$

$\therefore$ G$(1,\ 2)$ 답 $(1,\ 2)$

유형 01 두 점 사이의 거리 본책 154쪽

좌표평면 위의 두 점 A$(x_1,\ y_1)$, B$(x_2,\ y_2)$ 사이의 거리는
$\overline{AB}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

1055 $\overline{AB}=5\sqrt{2}$이므로

$\sqrt{(a+1-3)^2+(-2-3)^2}=5\sqrt{2}$

양변을 제곱하면

$(a-2)^2+25=50,\quad a^2-4a-21=0$

$(a+3)(a-7)=0$

$\therefore a=-3$ 또는 $a=7$

따라서 구하는 모든 a의 값의 합은

$-3+7=4$ 답 ②

1056 $\overline{AB}=2\overline{CD}$에서 $\overline{AB}^2=4\overline{CD}^2$이므로

$(a-1)^2+(-1+a)^2=4\{2^2+(-2)^2\}$

$2a^2-4a+2=32,\quad a^2-2a-15=0$

$(a+3)(a-5)=0$

$\therefore a=5\ (\because a>0)$ 답 5

1057 $\overline{OB}=\sqrt{5^2+(-1)^2}=\sqrt{26}$

정사각형 OABC의 한 변의 길이를 a라 하면

$a^2+a^2=(\sqrt{26})^2\quad \therefore a^2=13$

따라서 구하는 넓이는 $\quad a^2=13$ 답 ②

다른 풀이 정사각형의 두 대각선은 서로를 수직이등분하고 그 길이가 같으므로

$\overline{AC}=\overline{OB}=\sqrt{5^2+(-1)^2}=\sqrt{26}$

$\therefore \square\text{OABC}=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{26}\cdot\sqrt{26}=13$

1058 $\overline{AB}\le 4$에서 $\overline{AB}^2\le 4^2$이므로

$(t-3)^2+(7-t)^2\le 16,\quad t^2-10t+21\le 0$

$(t-3)(t-7)\le 0\quad \therefore 3\le t\le 7$

따라서 정수 t는 3, 4, 5, 6, 7의 5개이다. 답 ⑤

1059 두 점 A, B가 동시에 출발한 지 t초 후의 두 점 A, B의 좌표는 각각 $(0,\ 10-3t)$, $(4t,\ 0)$이므로

$\overline{AB}=\sqrt{(4t)^2+(-10+3t)^2}$

$=\sqrt{25t^2-60t+100}$

$=\sqrt{25\left(t-\frac{6}{5}\right)^2+64}$

따라서 두 점 A, B 사이의 거리는 $t=\frac{6}{5}$일 때 최솟값 $\sqrt{64}=8$을 갖는다. 답 8

유형 02 같은 거리에 있는 점 본책 154쪽

두 점 A, B에서 같은 거리에 있는 점 P의 좌표는
$\overline{AP}=\overline{BP}$, 즉 $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$
임을 이용하여 구한다. 이때 점 P의 위치에 따라 좌표를 다음과 같이 놓는다.
① x축 위의 점 ➡ $(a,\ 0)$
② y축 위의 점 ➡ $(0,\ b)$
③ 직선 $y=mx+n$ 위의 점 ➡ $(a,\ am+n)$

1060 점 P$(a,\ b)$가 직선 $y=x+1$ 위의 점이므로

$b=a+1$ …… ㉠

또 $\overline{AP}=\overline{BP}$에서 $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$이므로

$(a-1)^2+(b+2)^2=(a-5)^2+(b-2)^2$

$a^2-2a+b^2+4b+5=a^2-10a+b^2-4b+29$

$\therefore a+b=3$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\quad a=1,\ b=2$

$\therefore a^2+b^2=5$ 답 ①

1061 P$(0,\ a)$라 하면 $\overline{AP}=\overline{BP}$에서 $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$이므로

$(-2)^2+(a-2)^2=1^2+(a-1)^2$

$a^2-4a+8=a^2-2a+2$

$-2a=-6\quad \therefore a=3$

$\therefore$ P$(0,\ 3)$ 답 $(0,\ 3)$

1062 $\overline{AP}=\overline{BP}$에서 $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$이므로

$a^2+(b-5)^2=a^2+(b-9)^2$

$a^2+b^2-10b+25=a^2+b^2-18b+81$

$8b=56\quad \therefore b=7$

한편 $\overline{OP}=10$에서 $\overline{OP}^2=100$이므로

$a^2+b^2=100$

위의 식에 $b=7$을 대입하면

$a^2+49=100\quad \therefore a^2=51$

$\therefore a^2-b^2=51-49=2$ 답 2

1063 △ABC의 외심을 P$(a,\ b)$라 하면 $\overline{PA}=\overline{PB}=\overline{PC}$이므로

$\overline{PA}^2=\overline{PB}^2=\overline{PC}^2$

$\overline{PA}^2=\overline{PC}^2$에서 $\quad (a+2)^2+(b-1)^2=(a+1)^2+b^2$

$a^2+4a+b^2-2b+5=a^2+2a+b^2+1$

$\therefore a-b=-2$ …… ㉠

$\overline{PB}^2=\overline{PC}^2$에서 $\quad (a-3)^2+(b+1)^2=(a+1)^2+b^2$

$a^2-6a+b^2+2b+10=a^2+2a+b^2+1$

$\therefore 8a-2b=9$ …… ㉡

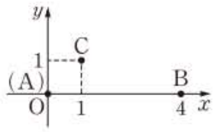
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\quad a=\frac{13}{6},\ b=\frac{25}{6}$

따라서 구하는 외심의 좌표는 $\left(\frac{13}{6},\ \frac{25}{6}\right)$이다.

답 $\left(\frac{13}{6},\ \frac{25}{6}\right)$

SSEN 특강 삼각형의 외심

① 삼각형의 세 변의 수직이등분선의 교점이다.
② 삼각형의 외심에서 세 꼭짓점에 이르는 거리는 같다.



1064 오른쪽 그림과 같이 A 지점이 원점, B 지점이 x축 위에 오도록 좌표평면을 정하면

$A(0,\ 0),\ B(4,\ 0),\ C(1,\ 1)$ ⋯ ❶

분수대를 만들려는 지점을 $P(a,\ b)$라 하면 $\overline{PA}=\overline{PB}=\overline{PC}$이므로 $\quad \overline{PA}^2=\overline{PB}^2=\overline{PC}^2$

$\overline{PA}^2=\overline{PB}^2$에서 $\quad a^2+b^2=(a-4)^2+b^2$

$8a=16 \qquad \therefore a=2$

$\overline{PA}^2=\overline{PC}^2$에서 $\quad 2^2+b^2=(2-1)^2+(b-1)^2$

$2b=-2 \qquad \therefore b=-1$

따라서 $P(2,\ -1)$이므로 구하는 거리는 ⋯ ❷

$\overline{PA}=\overline{PB}=\overline{PC}=\sqrt{2^2+(-1)^2}=\sqrt{5}$ (km) ⋯ ❸

답 $\sqrt{5}$ km

채점 기준	비율
❶ 세 지점 A, B, C의 위치를 좌표로 나타낼 수 있다.	30 %
❷ 분수대를 만들려는 지점의 좌표를 구할 수 있다.	50 %
❸ 분수대와 각 지점 사이의 거리를 구할 수 있다.	20 %

유형 03 두 점 사이의 거리의 활용; 식의 값 본책 155쪽

$a,\ b,\ x,\ y$가 실수일 때, $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$은 두 점 $(a,\ b)$, $(x,\ y)$ 사이의 거리임을 이용하여 주어진 식의 최솟값을 구한다.

1065 $O(0,\ 0),\ P(a,\ b),\ Q(1,\ 3)$이라 하면

$\sqrt{a^2+b^2}=\overline{OP},\ \sqrt{(a-1)^2+(b-3)^2}=\overline{PQ}$

$$\begin{aligned}\therefore \sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{(a-1)^2+(b-3)^2}&=\overline{OP}+\overline{PQ}\\&\ge\overline{OQ}=\sqrt{1^2+3^2}\\&=\sqrt{10}\end{aligned}$$

따라서 구하는 최솟값은 $\sqrt{10}$이다. 답 ②

1066 $P(2,\ -1),\ Q(x,\ y),\ R(5,\ 3)$이라 하면

$\sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2}=\overline{PQ},\ \sqrt{(x-5)^2+(y-3)^2}=\overline{QR}$

$\therefore \sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2}+\sqrt{(x-5)^2+(y-3)^2}$

$=\overline{PQ}+\overline{QR}$ ⋯ ❶

$\ge\overline{PR}=\sqrt{(5-2)^2+(3+1)^2}$

$=5$

따라서 구하는 최솟값은 5이다. ⋯ ❷

답 5

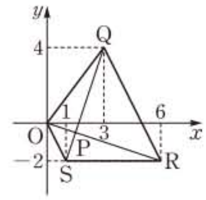
채점 기준	비율
❶ 주어진 식을 두 선분의 길이의 합으로 표현할 수 있다.	60 %
❷ 최솟값을 구할 수 있다.	40 %

1067 $O(0,\ 0),\ P(a,\ b),\ Q(3,\ 4),\ R(6,\ -2),\ S(1,\ -2)$라 하면

$\sqrt{a^2+b^2}=\overline{OP},\ \sqrt{(a-3)^2+(b-4)^2}=\overline{PQ},$

$\sqrt{(a-6)^2+(b+2)^2}=\overline{PR},\ \sqrt{(a-1)^2+(b+2)^2}=\overline{PS}$

즉 주어진 식은 $\overline{OP}+\overline{PQ}+\overline{PR}+\overline{PS}$이므로 점 P가 오른쪽 그림과 같이 사각형 OSRQ의 두 대각선 OR, QS의 교점일 때 최소이다.



따라서 구하는 최솟값은

$\overline{OR}+\overline{QS}$

$=\sqrt{6^2+(-2)^2}+\sqrt{(1-3)^2+(-2-4)^2}$

$=2\sqrt{10}+2\sqrt{10}=4\sqrt{10}$

답 ④

유형 04 두 점 사이의 거리의 활용 ; 선분의 길이의 제곱의 합의 최솟값 본책 156쪽

두 점 A, B의 좌표가 주어질 때, $\overline{AP}^2+\overline{BP}^2$의 최솟값은 다음과 같은 순서로 구한다.

(i) 점 P의 좌표를 $(a,\ b)$라 하고, 두 점 사이의 거리를 구하는 공식을 이용하여 $\overline{AP}^2+\overline{BP}^2$을 a 또는 b에 대한 이차식으로 나타낸다.

(ii) (i)에서 구한 이차식을 완전제곱을 포함한 꼴로 변형하여 최솟값을 구한다.

1068 $P(a,\ 0)$이라 하면

$$\begin{aligned}\overline{AP}^2+\overline{BP}^2&=(a-4)^2+(-1)^2+(a+2)^2+(-5)^2\\&=2a^2-4a+46\\&=2(a-1)^2+44\end{aligned}$$

따라서 $a=1$일 때 주어진 식의 최솟값은 44이다. 답 ③

1069 점 P가 직선 $y=x-1$ 위의 점이므로 $P(a,\ a-1)$이라 하면

$$\begin{aligned}\overline{AP}^2+\overline{BP}^2&=(a-3)^2+(a+3)^2+(a-4)^2+(a-10)^2\\&=4a^2-28a+134\\&=4\left(a-\frac{7}{2}\right)^2+85\end{aligned}$$

따라서 $a=\frac{7}{2}$일 때 주어진 식의 최솟값이 85이므로 점 P의 x좌표는 $\frac{7}{2}$이다. 답 ①

1070 $P(a,\ b)$라 하면

$\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2$

$=(a+1)^2+(b-2)^2+(a-4)^2+(b-6)^2+a^2+(b-1)^2$

$=3a^2-6a+3b^2-18b+58$

$=3(a-1)^2+3(b-3)^2+28$

이때 $a,\ b$가 실수이므로 $\quad (a-1)^2\ge0,\ (b-3)^2\ge0$

$\therefore \overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2\ge28$

따라서 $a=1,\ b=3$일 때 주어진 식의 최솟값이 28이므로

$P(1,\ 3)$ 답 $(1,\ 3)$

유형 05 두 점 사이의 거리의 활용; 삼각형의 모양

본책 156쪽

세 점을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 모양을 결정할 때에는 먼저 두 점 사이의 거리를 구하는 공식을 이용하여 세 변의 길이 a, b, c를 구한 후 다음을 이용한다.
① $a=b=c$ ➡ 정삼각형
② $a=b$ 또는 $b=c$ 또는 $c=a$ ➡ 이등변삼각형
③ $a^2+b^2=c^2$ ➡ 빗변의 길이가 c인 직각삼각형

1071 $\overline{AB}=\sqrt{(-3-1)^2+(1+1)^2}=2\sqrt{5}$

$\overline{BC}=\sqrt{(3+3)^2+(3-1)^2}=2\sqrt{10}$

$\overline{CA}=\sqrt{(1-3)^2+(-1-3)^2}=2\sqrt{5}$

$\therefore \overline{AB}=\overline{CA},\ \overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{CA}^2$

따라서 △ABC는 ∠A=90°인 직각이등변삼각형이다.

답 ③

1072 $\overline{AC}=\overline{BC}$에서 $\overline{AC}^2=\overline{BC}^2$이므로

$(1-2)^2+(a-5)^2=(1+1)^2+(a-4)^2$

$a^2-10a+26=a^2-8a+20$

$-2a=-6 \qquad \therefore a=3$

답 ⑤

1073 $C(x,\ y)(x>0,\ y<0)$라 하면 $\overline{AB}=\overline{BC}$에서 $\overline{AB}^2=\overline{BC}^2$이므로

$(-1-1)^2+(-2-2)^2=(x+1)^2+(y+2)^2$

$\therefore x^2+2x+y^2+4y=15$ …… ㉠

또 $\overline{AB}=\overline{CA}$에서 $\overline{AB}^2=\overline{CA}^2$이므로

$(-1-1)^2+(-2-2)^2=(1-x)^2+(2-y)^2$

$\therefore x^2-2x+y^2-4y=15$ …… ㉡

㉠−㉡을 하면 $4x+8y=0 \qquad \therefore x=-2y$

이것을 ㉠에 대입하면

$4y^2-4y+y^2+4y=15, \qquad y^2=3$

$\therefore y=-\sqrt{3}\ (\because y<0)$

따라서 $x=-2\cdot(-\sqrt{3})=2\sqrt{3}$이므로

$C(2\sqrt{3},\ -\sqrt{3})$

답 $(2\sqrt{3},\ -\sqrt{3})$

1074 (1) $\overline{OA}=\sqrt{a^2+b^2}$

$\overline{AB}=\sqrt{\{(a+b)-a\}^2+\{(b-a)-b\}^2}=\sqrt{a^2+b^2}$

$\overline{OB}=\sqrt{(a+b)^2+(b-a)^2}=\sqrt{2a^2+2b^2}$

$\therefore \overline{OA}=\overline{AB},\ \overline{OB}^2=\overline{OA}^2+\overline{AB}^2$ … ❶

따라서 △OAB는 ∠A=90°인 직각이등변삼각형이다. … ❷

(2) $\triangle OAB=\frac{1}{2}\cdot\overline{OA}\cdot\overline{AB}=\frac{1}{2}\overline{OA}^2=\frac{1}{2}(a^2+b^2)$ … ❸

답 (1) ∠A=90°인 직각이등변삼각형 (2) $\frac{1}{2}(a^2+b^2)$

채점 기준	비율
❶ 삼각형의 세 변의 길이 사이의 관계식을 구할 수 있다.	50 %
❷ △OAB가 어떤 삼각형인지 말할 수 있다.	20 %
❸ △OAB의 넓이를 a, b에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30 %

유형 06 좌표를 이용하여 도형의 성질 확인하기

본책 157쪽

좌표를 이용하여 도형의 성질을 확인할 때에는 다음과 같은 순서로 한다.
(i) 도형의 한 변이 좌표축 위에 오도록 도형을 좌표평면 위에 놓는다.
(ii) 도형의 꼭짓점에 해당하는 점의 좌표를 문자를 사용하여 나타낸다.
(iii) 두 점 사이의 거리를 구하는 공식을 이용하여 주어진 등식이 성립함을 확인한다.

1075 직선 BC를 x축으로 하고, 점 M을 지나고 직선 BC에 수직인 직선을 y축으로 하는 좌표평면을 잡으면 점 $\boxed{\text{M}}$은 원점이다. 이때 △ABC의 두 꼭짓점 A, C의 좌표를 각각 $(a,\ b)$, $(c,\ 0)$이라 하면 꼭짓점 B의 좌표는 $\boxed{(-c,\ 0)}$이므로

$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=\{(a+c)^2+b^2\}+\{(a-c)^2+b^2\}$

$=(a^2+2ac+c^2+b^2)+(a^2-2ac+c^2+b^2)$

$=2a^2+2b^2+2c^2=2(\boxed{a^2+b^2+c^2})$

또 $\overline{AM}^2=a^2+b^2$, $\overline{BM}^2=\boxed{c^2}$이므로

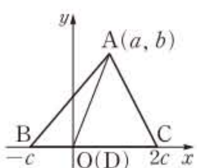
$\overline{AM}^2+\overline{BM}^2=a^2+b^2+\boxed{c^2}$

$\therefore \overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2(\overline{AM}^2+\overline{BM}^2)$

답 (가) M (나) $(-c,\ 0)$ (다) $a^2+b^2+c^2$ (라) c^2

참고 이와 같은 삼각형의 성질을 파푸스(Pappus) 정리 또는 중선 정리라 한다.

1076 오른쪽 그림과 같이 직선 BC를 x축으로 하고, 점 D를 지나고 직선 BC에 수직인 직선을 y축으로 하는 좌표평면을 잡으면 점 D는 원점이다.



이때 △ABC의 세 꼭짓점의 좌표를 각각 $A(a,\ b)$, $B(-c,\ 0)$, $C(2c,\ 0)$이라 하면 … ❶

$2\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2\{(a+c)^2+b^2\}+\{(a-2c)^2+b^2\}$

$=3a^2+3b^2+6c^2$

$=3(a^2+b^2+2c^2)$ … ❷

$\overline{AD}^2+2\overline{BD}^2=(a^2+b^2)+2c^2$

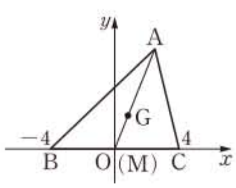
$=a^2+b^2+2c^2$ … ❸

$\therefore 2\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=3(\overline{AD}^2+2\overline{BD}^2)$ … ❹

답 풀이 참조

채점 기준	비율
❶ △ABC를 좌표평면 위에 놓고 세 점 A, B, C의 좌표를 정할 수 있다.	30 %
❷ $2\overline{AB}^2+\overline{AC}^2$을 a, b, c에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30 %
❸ $\overline{AD}^2+2\overline{BD}^2$을 a, b, c에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	30 %
❹ $2\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=3(\overline{AD}^2+2\overline{BD}^2)$이 성립함을 확인할 수 있다.	10 %

1077 오른쪽 그림과 같이 직선 BC를 x축으로 하고, 점 M을 지나고 직선 BC에 수직인 직선을 y축으로 하는 좌표평면을 잡으면 점 M은 원점이고 $B(-4,\ 0)$, $C(4,\ 0)$이다.



점 G는 △ABC의 무게중심이므로

$\overline{AM}=3\overline{MG}=3\sqrt{5}$

즉 $\overline{AM}^2=45$이므로 A(a, b)라 하면

$a^2+b^2=45$ ⋯⋯ ㉠

$\overline{AB}=9$에서 $\overline{AB}^2=81$이므로 $(a+4)^2+b^2=81$

$\therefore a^2+8a+b^2=65$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=\frac{5}{2}$, $b=\pm\frac{\sqrt{155}}{2}$

따라서 $A\left(\frac{5}{2}, \frac{\sqrt{155}}{2}\right)$ 또는 $A\left(\frac{5}{2}, -\frac{\sqrt{155}}{2}\right)$이므로

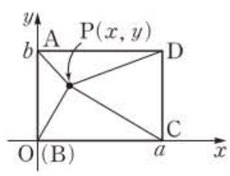
$\overline{AC}=\sqrt{\left(4-\frac{5}{2}\right)^2+\left(\pm\frac{\sqrt{155}}{2}\right)^2}=\sqrt{41}$ 답 ②

다른 풀이 $\overline{AM}=3\overline{MG}=3\sqrt{5}$, $\overline{BM}=\frac{1}{2}\overline{BC}=4$이고, 파푸스 정리에 의하여 $\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2(\overline{AM}^2+\overline{BM}^2)$이므로

$9^2+\overline{AC}^2=2\{(3\sqrt{5})^2+4^2\}$

$81+\overline{AC}^2=122$, $\overline{AC}^2=41$ $\therefore \overline{AC}=\sqrt{41}$

1078 오른쪽 그림과 같이 직선 BC를 x축으로 하고, 직선 AB를 y축으로 하는 좌표평면을 잡으면 점 B는 원점이다.



이때 나머지 세 꼭짓점의 좌표를 각각 A$(0, b)$, C$(a, 0)$, D(a, b)라 하고 점 P의 좌표를 (x, y)라 하면

$\overline{PA}^2+\overline{PC}^2=\{x^2+(y-b)^2\}+\{(x-a)^2+y^2\}$

$\overline{PB}^2+\overline{PD}^2=(x^2+y^2)+\{(x-a)^2+(y-b)^2\}$

$=\{x^2+(y-b)^2\}+\{(x-a)^2+y^2\}$

$\therefore \overline{PA}^2+\overline{PC}^2=\overline{PB}^2+\overline{PD}^2$ 답 풀이 참조

유형 07 선분의 내분점과 외분점 (1)

본책 158쪽

좌표평면 위의 두 점 A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)를 이은 선분 AB를 $m : n\,(m>0, n>0)$으로 내분하는 점 P, 외분하는 점 Q는

$P\left(\frac{mx_2+nx_1}{m+n}, \frac{my_2+ny_1}{m+n}\right)$,

$Q\left(\frac{mx_2-nx_1}{m-n}, \frac{my_2-ny_1}{m-n}\right)$(단, $m\neq n$)

1079 $\frac{3\cdot(-2)+2\cdot8}{3+2}=2$, $\frac{3\cdot7+2\cdot2}{3+2}=5$이므로

P$(2, 5)$

$\frac{3\cdot(-2)-2\cdot8}{3-2}=-22$, $\frac{3\cdot7-2\cdot2}{3-2}=17$이므로

Q$(-22, 17)$

따라서 $\overline{PQ}$의 중점의 좌표는

$\left(\frac{2-22}{2}, \frac{5+17}{2}\right)$, 즉 $(-10, 11)$ 답 $(-10, 11)$

1080 ① 점 E는 선분 AG를 2 : 1로 내분하는 점이다.

② 점 D는 선분 BG를 2 : 3으로 내분하는 점이다.

④ 점 G는 선분 AD를 2 : 1로 외분하는 점이다.

⑤ 점 D는 선분 BE를 2 : 1로 내분하는 점이다. 답 ③

1081 $\overline{AB}$를 3 : 1로 내분하는 점 P의 좌표는

$\frac{3\cdot a+1\cdot(-3)}{3+1}=\frac{3a-3}{4}$

$\overline{AB}$를 3 : 1로 외분하는 점 Q의 좌표는

$\frac{3\cdot a-1\cdot(-3)}{3-1}=\frac{3a+3}{2}$

두 점 P, Q 사이의 거리가 6이므로

$\left|\frac{3a+3}{2}-\frac{3a-3}{4}\right|=6$, $\left|\frac{3a+9}{4}\right|=6$

$\frac{3a+9}{4}=-6$ 또는 $\frac{3a+9}{4}=6$

$\therefore a=5\ (\because a>0)$ 답 5

1082 $\overline{AB}$를 $3 : b$로 내분하는 점의 좌표가 $(2, -1)$이므로

$\frac{3\cdot12+b\cdot(-4)}{3+b}=2$, $\frac{3\cdot a+b\cdot8}{3+b}=-1$

$36-4b=6+2b$, $3a+8b=-3-b$

$\therefore a=-16$, $b=5$

$\therefore a+b=-11$ 답 -11

1083 $\overline{AB}$를 4 : 1로 외분하는 점의 좌표가 $(9, 4)$이므로

$\frac{4\cdot8-1\cdot(a+2)}{4-1}=9$, $\frac{4\cdot b-1\cdot0}{4-1}=4$

$30-a=27$, $4b=12$ $\therefore a=3$, $b=3$ ⋯ ❶

$\therefore$ B$(8, 3)$, C$(3, -2)$ ⋯ ❷

따라서 $\overline{BC}$를 2 : 3으로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\frac{2\cdot3+3\cdot8}{2+3}, \frac{2\cdot(-2)+3\cdot3}{2+3}\right)$, 즉 $(6, 1)$ ⋯ ❸

답 $(6, 1)$

채점 기준	비율
❶ a, b의 값을 구할 수 있다.	50 %
❷ 두 점 B, C의 좌표를 구할 수 있다.	20 %
❸ $\overline{BC}$를 2 : 3으로 내분하는 점의 좌표를 구할 수 있다.	30 %

1084 점 P(a, b)는 $\overline{AB}$를 1 : 2로 내분하는 점이므로

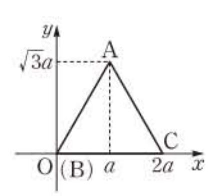
$a=\frac{1\cdot9+2\cdot(-3)}{1+2}=1$, $b=\frac{1\cdot8+2\cdot2}{1+2}=4$

점 Q(c, d)는 $\overline{AB}$를 2 : 1로 내분하는 점이므로

$c=\frac{2\cdot9+1\cdot(-3)}{2+1}=5$, $d=\frac{2\cdot8+1\cdot2}{2+1}=6$

$\therefore ac-bd=-19$ 답 ①

1085 오른쪽 그림과 같이 직선 BC를 x축으로 하고, 점 B를 지나고 직선 BC에 수직인 직선을 y축으로 하는 좌표평면을 잡으면 점 B는 원점이다.



정삼각형 ABC의 한 변의 길이를 $2a$라 하면

$A(a, \sqrt{3}a)$, $C(2a, 0)$

$\overline{BC}$ 위의 점 P의 좌표를 $(k, 0)$ $(0 \le k \le 2a)$이라 하면

$$\begin{aligned}\overline{AP}^2+\overline{BP}^2&=(k-a)^2+(-\sqrt{3}a)^2+k^2\\&=2k^2-2ak+4a^2\\&=2\left(k-\frac{1}{2}a\right)^2+\frac{7}{2}a^2\end{aligned}$$

따라서 $\overline{AP}^2+\overline{BP}^2$의 값은 $k=\frac{1}{2}a$일 때 최소이므로

$$\begin{aligned}\overline{BP}:\overline{CP}&=\frac{1}{2}a:\left(2a-\frac{1}{2}a\right)\\&=\frac{1}{2}a:\frac{3}{2}a=1:3\end{aligned}$$

즉 $m=1$, $n=3$이므로 $\quad m+n=4$

답 ①

유형 08 선분의 내분점과 외분점 (2)

본책 159쪽

두 점을 이은 선분의 내분점 또는 외분점이
① x축 위에 있다. ➡ y좌표가 0이다.
y축 위에 있다. ➡ x좌표가 0이다.
② 어느 사분면 위에 있다.
➡ x좌표와 y좌표의 부호를 확인한다.
③ 직선 $y=f(x)$ 위에 있다.
➡ 내분점 또는 외분점의 좌표를 $y=f(x)$에 대입하면 등식이 성립한다.

1086 $\overline{AB}$를 $a:(1-a)$로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{a\cdot 6+(1-a)\cdot(-3)}{a+(1-a)}, \frac{a\cdot(-2)+(1-a)\cdot 5}{a+(1-a)}\right)$$

$\therefore (9a-3, -7a+5)$

이 점이 제1사분면 위에 있으므로

$9a-3>0$, $-7a+5>0$

$\therefore \frac{1}{3}<a<\frac{5}{7}$

답 $\frac{1}{3}<a<\frac{5}{7}$

1087 $\overline{PQ}$를 $k:5$로 외분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{2k+5}{k-5}, \frac{4k-5}{k-5}\right)$$

이 점이 직선 $x+y=-4$ 위에 있으므로

$\frac{2k+5}{k-5}+\frac{4k-5}{k-5}=-4$, $\quad 6k=-4k+20$

$10k=20 \quad \therefore k=2$

답 2

1088 $\overline{AB}$를 $m:n$으로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{2m-5n}{m+n}, \frac{8m-n}{m+n}\right) \quad \cdots ❶$$

이 점이 y축 위에 있으므로 (x좌표)$=0$

$\frac{2m-5n}{m+n}=0$, $\quad 2m-5n=0$

$2m=5n$

$\therefore m:n=5:2 \quad \cdots ❷$

이때 m, n은 서로소인 자연수이므로

$m=5$, $n=2$

$\therefore mn=10 \quad \cdots ❸$

답 10

채점 기준	비율
❶ $\overline{AB}$를 $m:n$으로 내분하는 점의 좌표를 구할 수 있다.	40 %
❷ $m:n$을 구할 수 있다.	40 %
❸ mn의 값을 구할 수 있다.	20 %

1089 $\overline{AB}$를 $m:n$으로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{4m+an}{m+n}, \frac{-4m+bn}{m+n}\right)$$

이 점이 x축 위에 있으므로

$\frac{-4m+bn}{m+n}=0$, $\quad -4m+bn=0$

$\therefore m=\frac{1}{4}bn \quad \cdots\cdots ㉠$

$\overline{AC}$를 $m:n$으로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{-2m+an}{m+n}, \frac{2m+bn}{m+n}\right)$$

이 점이 y축 위에 있으므로

$\frac{-2m+an}{m+n}=0$, $\quad -2m+an=0$

$\therefore m=\frac{1}{2}an \quad \cdots\cdots ㉡$

㉠, ㉡에서 $\quad \frac{1}{4}bn=\frac{1}{2}an$

$\therefore b=2a$ ($\because n>0$)

이때 a, b는 10 이하의 자연수이므로 점 A는

$(1, 2)$, $(2, 4)$, $(3, 6)$, $(4, 8)$, $(5, 10)$의 5개

따라서 만들 수 있는 △ABC의 개수도 5이다.

답 ③

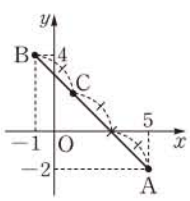
유형 09 선분의 내분점과 외분점의 활용

본책 159쪽

두 점 A, B를 지나는 직선 위의 점 C가 $m\overline{AB}=n\overline{BC}$를 만족시킨다.
➡ $\overline{AB}:\overline{BC}=n:m$이므로 이를 만족시키는 세 점 A, B, C의 위치를 그림으로 나타낸 후 점 C가 선분 AB의 내분점 또는 외분점임을 이용한다.

1090 $\overline{AB}=3\overline{BC}$에서 $\quad \overline{AB}:\overline{BC}=3:1$

(i) 점 C가 $\overline{AB}$ 위의 점일 때,
점 C는 오른쪽 그림과 같이 $\overline{AB}$를 2 : 1로 내분하는 점이므로

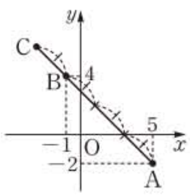


$\frac{2\cdot(-1)+1\cdot 5}{2+1}=1$,

$\frac{2\cdot 4+1\cdot(-2)}{2+1}=2$

$\therefore C(1, 2)$

(ii) 점 C가 $\overline{AB}$의 연장선 위의 점일 때,
점 C는 오른쪽 그림과 같이 $\overline{AB}$를 4 : 1로 외분하는 점이므로



$\frac{4\cdot(-1)-1\cdot 5}{4-1}=-3$,

$\frac{4\cdot 4-1\cdot(-2)}{4-1}=6$

$\therefore C(-3, 6)$

(i), (ii)에서 점 C의 좌표는 $(-3,\ 6)$, $(1,\ 2)$이다.

답 $(-3,\ 6)$, $(1,\ 2)$

다른 풀이 (ii) 점 C가 $\overline{AB}$의 연장선 위의 점일 때,
$C(a,\ b)$라 하면 점 B는 $\overline{AC}$를 $3:1$로 내분하는 점이므로

$$\frac{3a+5}{3+1}=-1,\ \frac{3b-2}{3+1}=4$$

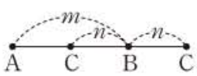
$3a+5=-4,\ 3b-2=16\qquad \therefore a=-3,\ b=6$

$\therefore C(-3,\ 6)$

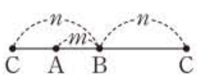
SSEN 특강 $\overline{AB}:\overline{BC}=m:n$을 만족시키는 점 C

두 점 A, B를 지나는 직선 AB 위의 점 C가
$\overline{AB}:\overline{BC}=m:n$
을 만족시키는 경우는 다음과 같다.

① $m>n$일 때
➡ 점 C는 $\overline{AB}$를 $(m-n):n$으로 내분하는 점 또는 $(m+n):n$으로 외분하는 점이다.

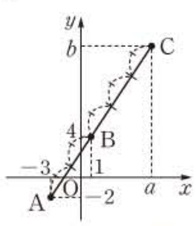


② $m<n$일 때
➡ 점 C는 $\overline{AB}$를 $(n-m):n$으로 외분하는 점 또는 $(m+n):n$으로 외분하는 점이다.



1091 $3\overline{AB}=2\overline{BC}$에서 $\quad\overline{AB}:\overline{BC}=2:3$

$a>0$에서 점 C는 오른쪽 그림과 같이 $\overline{AB}$를 $5:3$으로 외분하는 점이므로



$$a=\frac{5\cdot1-3\cdot(-3)}{5-3}=7,$$

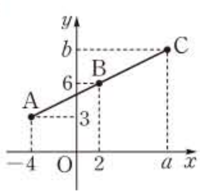
$$b=\frac{5\cdot4-3\cdot(-2)}{5-3}=13$$

$\therefore b-a=6$

답 6

1092 △OAC의 넓이가 △OBC의 넓이의 2배이므로
$\overline{AC}:\overline{BC}=2:1$ ─ 높이가 같은 두 삼각형의 넓이의 비는 밑변의 길이의 비와 같다.

$a>0$에서 점 C는 오른쪽 그림과 같이 $\overline{AB}$를 $2:1$로 외분하는 점이므로



$$a=\frac{2\cdot2-1\cdot(-4)}{2-1}=8,$$

$$b=\frac{2\cdot6-1\cdot3}{2-1}=9$$

$\therefore a+b=17$

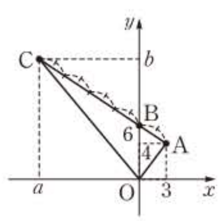
답 ③

1093 $\triangle OAB=\frac{1}{2}\cdot6\cdot3=9$이므로

$\triangle OAB:\triangle OAC=9:45=1:5$

$\therefore \overline{AB}:\overline{AC}=1:5$

$a<0$에서 점 C는 오른쪽 그림과 같이 $\overline{AB}$를 $5:4$로 외분하는 점이므로



$$a=\frac{5\cdot0-4\cdot3}{5-4}=-12,$$

$$b=\frac{5\cdot6-4\cdot4}{5-4}=14$$

$\therefore -2a+b=38$

답 ③

유형 10 삼각형의 무게중심

본책 160쪽

좌표평면 위의 세 점 $A(x_1,\ y_1)$, $B(x_2,\ y_2)$, $C(x_3,\ y_3)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 무게중심 G의 좌표는

$$\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\ \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$$

1094 △ABC의 무게중심의 좌표가 $(2,\ -2)$이므로

$$\frac{3+a+2b+3}{3}=2,\ \frac{-2-3b+a+1}{3}=-2$$

$\therefore a+2b=0,\ a-3b=-5$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $\quad a=-2,\ b=1$

$\therefore ab=-2$

답 -2

1095 △OAB의 무게중심의 좌표가 $(4,\ 2)$이므로

$$\frac{0+x_1+x_2}{3}=4,\ \frac{0+y_1+y_2}{3}=2$$

$x_1+x_2=12,\ y_1+y_2=6$

$$\therefore \frac{x_1+x_2}{2}=6,\ \frac{y_1+y_2}{2}=3$$

따라서 $\overline{AB}$의 중점의 좌표는 $(6,\ 3)$이다.

답 ③

1096 $\overline{AB}$의 중점을 M, △ABC의 무게중심을 G라 하면 점 G는 $\overline{CM}$을 $2:1$로 내분하는 점이다.

이때 $C(a,\ b)$라 하면

$$\frac{2\cdot2+1\cdot a}{2+1}=4,\ \frac{2\cdot5+1\cdot b}{2+1}=2$$

$4+a=12,\ 10+b=6$

$\therefore a=8,\ b=-4$

따라서 점 C의 좌표는 $(8,\ -4)$이다.

답 $(8,\ -4)$

다른 풀이 1 $\overline{AB}$의 중점을 M, △ABC의 무게중심을 G라 하면 점 C는 $\overline{MG}$를 $3:2$로 외분하는 점이므로

$$\frac{3\cdot4-2\cdot2}{3-2}=8,\ \frac{3\cdot2-2\cdot5}{3-2}=-4$$

$\therefore C(8,\ -4)$

다른 풀이 2 $A(x_1,\ y_1)$, $B(x_2,\ y_2)$라 하면 $\overline{AB}$의 중점의 좌표가 $(2,\ 5)$이므로

$$\frac{x_1+x_2}{2}=2,\ \frac{y_1+y_2}{2}=5$$

$\therefore x_1+x_2=4,\ y_1+y_2=10$

$C(a,\ b)$라 하면 △ABC의 무게중심의 좌표가 $(4,\ 2)$이므로

$$\frac{x_1+x_2+a}{3}=4,\ \frac{y_1+y_2+b}{3}=2$$

$4+a=12,\ 10+b=6$

$\therefore a=8,\ b=-4$

1097 세 점 D, E, F는

$$D\left(\frac{2\cdot(-2)+1\cdot4}{2+1},\ \frac{2\cdot1+1\cdot10}{2+1}\right),\ \text{즉 } D(0,\ 4)$$

$$E\left(\frac{2\cdot7+1\cdot(-2)}{2+1},\ \frac{2\cdot(-5)+1\cdot1}{2+1}\right),\ \text{즉 } E(4,\ -3)$$

$$F\left(\frac{2\cdot4+1\cdot7}{2+1},\ \frac{2\cdot10+1\cdot(-5)}{2+1}\right),\ \text{즉 } F(5,\ 5)$$

따라서 △DEF의 무게중심의 좌표는

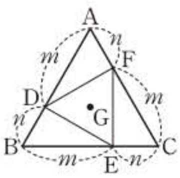
$\left(\frac{0+4+5}{3}, \frac{4-3+5}{3}\right)$, 즉 $(3, 2)$ 답 $(3, 2)$

다른 풀이 △DEF의 무게중심은 △ABC의 무게중심과 일치하므로 구하는 무게중심의 좌표는

$\left(\frac{4-2+7}{3}, \frac{10+1-5}{3}\right)$, 즉 $(3, 2)$

SSEN 특강 삼각형의 무게중심의 성질

△ABC의 세 변 AB, BC, CA를 $m:n\,(m>0,\ n>0)$으로 내분하는 점을 각각 D, E, F라 할 때, △ABC와 △DEF의 무게중심은 일치한다.



1098 $\mathrm{P}(x, y)$라 하면

$\overline{\mathrm{PA}}^2+\overline{\mathrm{PB}}^2+\overline{\mathrm{PC}}^2$

$=(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(x-x_2)^2+(y-y_2)^2$

$\quad+(x-x_3)^2+(y-y_3)^2$

$=3x^2-2(x_1+x_2+x_3)x+x_1^2+x_2^2+x_3^2$

$\quad+3y^2-2(y_1+y_2+y_3)y+y_1^2+y_2^2+y_3^2$

$=3\left(x-\frac{x_1+x_2+x_3}{3}\right)^2+3\left(y-\frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)^2+x_1^2+x_2^2+x_3^2$

$\quad+y_1^2+y_2^2+y_3^2-\frac{(x_1+x_2+x_3)^2}{3}-\frac{(y_1+y_2+y_3)^2}{3}$

따라서 $x=\frac{x_1+x_2+x_3}{3}$, $y=\frac{y_1+y_2+y_3}{3}$일 때 $\overline{\mathrm{PA}}^2+\overline{\mathrm{PB}}^2+\overline{\mathrm{PC}}^2$의 값이 최소이므로 점 P는 △ABC의 무게중심이다.

답 풀이 참조

유형 11 평행사변형과 마름모의 성질 본책 160쪽

(1) 평행사변형
두 대각선은 서로를 이등분한다.
➡ 두 대각선의 중점이 일치한다.
(2) 마름모
① 네 변의 길이가 모두 같다.
② 두 대각선은 서로를 수직이등분한다.
➡ 두 대각선의 중점이 일치한다.

1099 $\mathrm{D}(a, b)$라 하면 두 대각선 AC, BD의 중점이 일치하므로

$\frac{-1+8}{2}=\frac{5+a}{2}$, $\frac{4+4}{2}=\frac{0+b}{2}$

$\therefore a=2,\ b=8$

따라서 꼭짓점 D의 좌표는 $(2, 8)$이다. 답 $(2, 8)$

1100 $\mathrm{C}(x_1, y_1)$, $\mathrm{D}(x_2, y_2)$라 하면 두 대각선 AC, BD의 교점은 $\overline{\mathrm{AC}}$와 $\overline{\mathrm{BD}}$의 각각의 중점이다. ··· ❶

$\overline{\mathrm{AC}}$의 중점의 좌표는 $\left(\frac{2+x_1}{2}, \frac{4+y_1}{2}\right)$이므로

$\frac{2+x_1}{2}=8$, $\frac{4+y_1}{2}=2$

$\therefore x_1=14,\ y_1=0$

$\therefore \mathrm{C}(14, 0)$ ··· ❷

또 $\overline{\mathrm{BD}}$의 중점의 좌표는 $\left(\frac{-2+x_2}{2}, \frac{-4+y_2}{2}\right)$이므로

$\frac{-2+x_2}{2}=8$, $\frac{-4+y_2}{2}=2$

$\therefore x_2=18,\ y_2=8$

$\therefore \mathrm{D}(18, 8)$ ··· ❸

답 $\mathrm{C}(14, 0)$, $\mathrm{D}(18, 8)$

채점 기준	비율
❶ 두 대각선 AC, BD의 교점이 $\overline{\mathrm{AC}}$와 $\overline{\mathrm{BD}}$의 각각의 중점임을 알 수 있다.	20 %
❷ 점 C의 좌표를 구할 수 있다.	40 %
❸ 점 D의 좌표를 구할 수 있다.	40 %

1101 두 대각선 AC, BD의 중점이 일치하므로 중점의 x좌표는

$\frac{a+5}{2}=\frac{2+b}{2}$ $\quad\therefore b=a+3$ ······ ㉠

또 $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{BC}}$에서 $\overline{\mathrm{AB}}^2=\overline{\mathrm{BC}}^2$이므로

$(2-a)^2+(4-1)^2=(5-2)^2+(1-4)^2$

$a^2-4a-5=0,\quad (a+1)(a-5)=0$

$\therefore a=-1\ (\because a\neq5)$

$a=5$이면 점 A와 점 C가 일치하므로 사각형 ABCD가 만들어지지 않는다.

$a=-1$을 ㉠에 대입하면 $\quad b=2$

$\therefore a+b=1$ 답 ①

다른 풀이 마름모의 두 대각선은 서로를 수직이등분하므로

$\frac{a+5}{2}=\frac{2+b}{2}$, $b=2$

직선 AC와 직선 BD가 수직이고 직선 AC의 방정식이 $y=1$이므로 직선 BD의 방정식은 $x=2$

$\therefore a=-1,\ b=2$

1102 $\mathrm{C}(a, b)$라 하면 △ABC의 무게중심의 좌표가 $(5, 3)$이므로

$\frac{5+3+a}{3}=5$, $\frac{1+5+b}{3}=3$

$\therefore a=7,\ b=3$

$\therefore \mathrm{C}(7, 3)$

$\mathrm{D}(c, d)$라 하면 □ABCD에서 두 대각선 AC, BD의 중점이 일치하므로

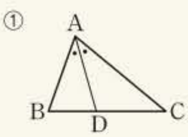
$\frac{5+7}{2}=\frac{3+c}{2}$, $\frac{1+3}{2}=\frac{5+d}{2}$

$\therefore c=9,\ d=-1$

$\therefore \mathrm{D}(9, -1)$ 답 ④

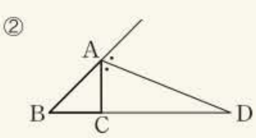
유형 12 각의 이등분선의 성질 본책 161쪽

①



$\overline{\mathrm{AB}}:\overline{\mathrm{AC}}=\overline{\mathrm{BD}}:\overline{\mathrm{CD}}$
➡ 점 D는 $\overline{\mathrm{BC}}$를 $\overline{\mathrm{AB}}:\overline{\mathrm{AC}}$로 내분하는 점이다.

②



$\overline{\mathrm{AB}}:\overline{\mathrm{AC}}=\overline{\mathrm{BD}}:\overline{\mathrm{CD}}$
➡ 점 D는 $\overline{\mathrm{BC}}$를 $\overline{\mathrm{AB}}:\overline{\mathrm{AC}}$로 외분하는 점이다.

1103 $\overline{AD}$는 $\angle A$의 이등분선이므로

$\overline{AB}:\overline{AC}=\overline{BD}:\overline{CD}$

$\overline{AB}=\sqrt{(-4-1)^2+(-7-5)^2}=13$,

$\overline{AC}=\sqrt{(5-1)^2+(2-5)^2}=5$이므로

$\overline{BD}:\overline{CD}=13:5$

따라서 점 D는 $\overline{BC}$를 13 : 5로 내분하는 점이므로

$\frac{13\cdot5+5\cdot(-4)}{13+5}=\frac{5}{2}$, $\frac{13\cdot2+5\cdot(-7)}{13+5}=-\frac{1}{2}$

$\therefore D\left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ 답 $\left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

1104 $\triangle ABD:\triangle ACD=p:q$에서

$\overline{BD}:\overline{CD}=p:q$

이때 $\overline{AD}$는 $\angle A$의 이등분선이므로

$\overline{AB}:\overline{AC}=\overline{BD}:\overline{CD}$

$\overline{AB}=\sqrt{(-6-2)^2+(3+3)^2}=10$,

$\overline{AC}=\sqrt{(10-2)^2+(12+3)^2}=17$이므로

$\overline{BD}:\overline{CD}=10:17$

따라서 $p=10$, $q=17$이므로

$q-p=7$ 답 ③

1105 $\overline{AC}$는 $\angle A$의 외각의 이등분선이므로

$\overline{AO}:\overline{AB}=\overline{OC}:\overline{BC}$ ··· ❶

$\overline{AO}=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$, $\overline{AB}=\sqrt{(2-3)^2+(-1-1)^2}=\sqrt{5}$이므로

$\overline{OC}:\overline{BC}=\sqrt{10}:\sqrt{5}=\sqrt{2}:1$ ··· ❷

따라서 점 C는 $\overline{OB}$를 $\sqrt{2}:1$로 외분하는 점이므로

$a=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}=4+2\sqrt{2}$, $b=\frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}=-2-\sqrt{2}$ ··· ❸

$\therefore a+b=2+\sqrt{2}$ ··· ❹

답 $2+\sqrt{2}$

채점 기준	비율
❶ $\overline{AO}:\overline{AB}=\overline{OC}:\overline{BC}$임을 알 수 있다.	30 %
❷ $\overline{OC}:\overline{BC}$를 구할 수 있다.	30 %
❸ a, b의 값을 구할 수 있다.	30 %
❹ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	10 %

유형 13 자취의 방정식; 점의 자취

본책 161쪽

어떤 조건을 만족시키는 점들이 도형을 이룰 때 이 도형을 주어진 조건을 만족시키는 점들의 자취라 하고, 자취의 방정식을 구할 때에는 다음을 이용한다.

① 점 $P(a, b)$가 직선 $y=mx+n$ 위를 움직인다.
➡ $b=ma+n$

② 점 P가 어떤 등식을 만족시킨다.
➡ $P(x, y)$로 놓고 좌표를 어떤 등식에 대입한다.

1106 $P(a, b)$라 하면 점 P는 직선 $2x-y-4=0$ 위의 점이므로

$2a-b-4=0$ ······ ㉠

$Q(x, y)$라 하면 점 Q는 $\overline{AP}$를 1 : 2로 내분하는 점이므로

$x=\frac{1\cdot a+2\cdot2}{1+2}=\frac{a+4}{3}$, $y=\frac{1\cdot b+2\cdot4}{1+2}=\frac{b+8}{3}$

$\therefore a=3x-4$, $b=3y-8$ ······ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$2(3x-4)-(3y-8)-4=0$

$\therefore 6x-3y-4=0$ 답 $6x-3y-4=0$

1107 $P(x, y)$라 하면 $\overline{PA}^2-\overline{PB}^2=3$이므로

$(x-1)^2+(y-1)^2-\{(x-3)^2+(y-2)^2\}=3$

$x^2-2x+y^2-2y+2-(x^2-6x+y^2-4y+13)=3$

$4x+2y-11=3$

$\therefore 2x+y-7=0$ 답 $2x+y-7=0$

1108 두 점 A, B로부터 같은 거리에 있는 점을 $P(x, y)$라 하면 $\overline{AP}=\overline{BP}$에서 $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$이므로

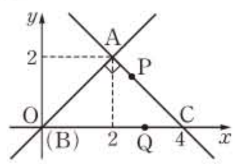
$(x-8)^2+(y+5)^2=(x-4)^2+(y-1)^2$

$x^2-16x+y^2+10y+89=x^2-8x+y^2-2y+17$

$-8x+12y+72=0$

$\therefore 2x-3y-18=0$ 답 $2x-3y-18=0$

1109 전략 도로를 좌표평면 위에 나타내어 본다.



풀이 오른쪽 그림과 같이 두 지점 B, C를 연결한 도로를 x축으로 하고, B 지점을 지나고 직선 BC에 수직인 직선을 y축으로 하는 좌표평면을 잡으면 B 지점이 원점이고 $C(4, 0)$,

$\overline{OA}=2\sqrt{2}$이므로

$A(2, 2)$

민아와 승우의 t시간 후의 위치를 각각 P, Q라 하면 $\overline{AP}=\sqrt{2}t$, $\overline{QC}=2t$이므로

$P(2+t, 2-t)$, $Q(4-2t, 0)$

t시간 후의 두 사람 사이의 직선 거리는

$\overline{PQ}=\sqrt{\{(4-2t)-(2+t)\}^2+\{0-(2-t)\}^2}$

$=\sqrt{10t^2-16t+8}$

$=\sqrt{10\left(t-\frac{4}{5}\right)^2+\frac{8}{5}}$

따라서 두 사람 사이의 직선 거리는 $\frac{4}{5}$시간 후에 최소가 되고, 그 때의 거리는 $\sqrt{\frac{8}{5}}=\frac{2\sqrt{10}}{5}$ (km)이다. 답 ②

1110 전략 주어진 방정식을 (일차식)×(일차식)=(정수) 꼴로 변형한다.

풀이 $xy-3x+y-8=0$에서

$x(y-3)+(y-3)-5=0$ $\therefore (x+1)(y-3)=5$

x, y가 정수이므로

(i) $x+1=-5$, $y-3=-1$일 때, $x=-6$, $y=2$

(ii) $x+1=-1$, $y-3=-5$일 때, $x=-2$, $y=-2$

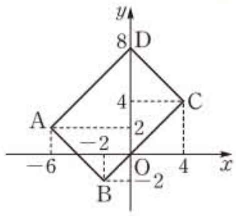
(iii) $x+1=1$, $y-3=5$일 때, $x=0$, $y=8$

(iv) $x+1=5$, $y-3=1$일 때, $x=4$, $y=4$

이상에서 순서쌍 (x, y)는

$(-6, 2)$, $(-2, -2)$, $(0, 8)$, $(4, 4)$ ··· ❶

$A(-6, 2)$, $B(-2, -2)$, $C(4, 4)$, $D(0, 8)$이라 하면



$\overline{AB}=\sqrt{(-2+6)^2+(-2-2)^2}$

$=4\sqrt{2}$,

$\overline{BC}=\sqrt{(4+2)^2+(4+2)^2}=6\sqrt{2}$,

$\overline{CD}=\sqrt{(-4)^2+(8-4)^2}=4\sqrt{2}$,

$\overline{DA}=\sqrt{(-6)^2+(2-8)^2}=6\sqrt{2}$

따라서 구하는 둘레의 길이는

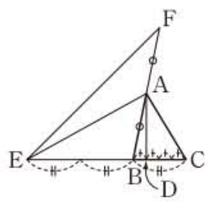
$4\sqrt{2}+6\sqrt{2}+4\sqrt{2}+6\sqrt{2}=20\sqrt{2}$ ··· ❷

답 $20\sqrt{2}$

채점 기준	비율
❶ 순서쌍 (x, y)를 구할 수 있다.	50 %
❷ 둘레의 길이를 구할 수 있다.	50 %

1111 전략 △ABC에서 조건을 만족시키는 세 점 D, E, F를 그려 본다.

풀이 △ABC에서 주어진 조건을 만족시키는 세 점 D, E, F를 그리면 오른쪽 그림과 같다.



즉 $\overline{BC}=4\overline{BD}$이므로

$\triangle ABC=4\triangle ABD$

$\overline{EB}=2\overline{BC}$이므로

$\triangle AEB=2\triangle ABC=2\cdot4\triangle ABD=8\triangle ABD$

$\overline{FB}=2\overline{AB}$이므로

$\triangle FEB=2\triangle AEB=2\cdot8\triangle ABD=16\triangle ABD$

$\therefore k=16$

답 16

1112 전략 점 P의 좌표를 a, b, c, m, n에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 점 P는 $\overline{AC}$를 $m : n$으로 내분하는 점이므로

$$p=\frac{mc+na}{m+n} \quad \cdots\cdots ㉠$$

또 점 P는 $\overline{BC}$를 $m : n$으로 외분하는 점이므로

$$p=\frac{mc-nb}{m-n} \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡에서

$$\frac{mc+na}{m+n}=\frac{mc-nb}{m-n} \quad \cdots\cdots ㉢$$

ㄱ. $a=1$, $b=5$, $m=1$, $n=2$를 ㉢에 대입하면

$\frac{c+2}{1+2}=\frac{c-10}{1-2}$, $\quad c+2=-3c+30$

$4c=28 \quad \therefore c=7$

ㄴ. $a=0$, $c=6$, $m=2$, $n=1$을 ㉢에 대입하면

$\frac{12+0}{2+1}=\frac{12-b}{2-1}$, $\quad 4=12-b$

$\therefore b=8$

또한 $p=4$이므로 $\quad a<p<c<b$

ㄷ. ㉠에서 $\quad (m+n)p=mc+na$

㉡에서 $\quad (m-n)p=mc-nb$

앞의 두 식을 변끼리 빼면

$2np=n(a+b) \qquad \therefore p=\frac{a+b}{2}$ $(\because n>0)$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

1113 전략 평행선 사이의 선분의 길이의 비를 이용하여 $\overline{PB}$와 $\overline{PC}$의 길이의 비를 구한다.

풀이 △ABP에서 $\overline{AP}/\!/\overline{DC}$이므로

$\overline{AB} : \overline{AD}=\overline{PB} : \overline{PC}$

이때 $\overline{AB}=\sqrt{(-5)^2+(-9-3)^2}=13$,

$\overline{AD}=\overline{AC}=\sqrt{4^2+(-3)^2}=5$이므로

$\overline{PB} : \overline{PC}=13 : 5$

따라서 점 P는 $\overline{BC}$를 $13 : 5$로 외분하는 점이므로 점 P의 좌표는

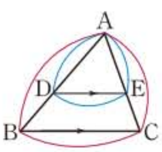
$$\left(\frac{13\cdot4-5\cdot(-5)}{13-5}, \frac{13\cdot0-5\cdot(-9)}{13-5}\right), \text{ 즉 } \left(\frac{77}{8}, \frac{45}{8}\right)$$

답 ⑤

SSEN 특강 평행선 사이의 선분의 길이의 비

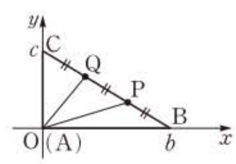
△ABC에서 두 점 D, E가 각각 $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ 위의 점일 때, $\overline{BC}/\!/\overline{DE}$이면

$\overline{AB} : \overline{AD}=\overline{AC} : \overline{AE}=\overline{BC} : \overline{DE}$



1114 전략 점 A가 원점에 오도록 직각삼각형 ABC를 좌표평면 위에 놓은 후 점 P, Q의 좌표를 구한다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 직선 AB를 x축으로 하고, 직선 AC를 y축으로 하는 좌표평면을 잡으면 점 A는 원점이다.



이때 △ABC의 두 꼭짓점 B, C의 좌표를 각각 $(b, 0)$, $(0, c)$라 하면 점 P는 $\overline{BC}$를 $1 : 2$로 내분하는 점이므로

$$P\left(\frac{1\cdot0+2\cdot b}{1+2}, \frac{1\cdot c+2\cdot0}{1+2}\right), \text{ 즉 } P\left(\frac{2b}{3}, \frac{c}{3}\right)$$

점 Q는 $\overline{BC}$를 $2 : 1$로 내분하는 점이므로

$$Q\left(\frac{2\cdot0+1\cdot b}{2+1}, \frac{2\cdot c+1\cdot0}{2+1}\right), \text{ 즉 } Q\left(\frac{b}{3}, \frac{2c}{3}\right) \quad \cdots ❶$$

$\therefore l=\overline{AB}^2+\overline{AP}^2+\overline{AQ}^2+\overline{AC}^2$

$=b^2+\left\{\left(\frac{2b}{3}\right)^2+\left(\frac{c}{3}\right)^2\right\}+\left\{\left(\frac{b}{3}\right)^2+\left(\frac{2c}{3}\right)^2\right\}+c^2$

$=\frac{14}{9}(b^2+c^2)$ ··· ❷

이때 $\overline{BC}=\sqrt{b^2+c^2}=\sqrt{6}$이므로 $\quad b^2+c^2=6$

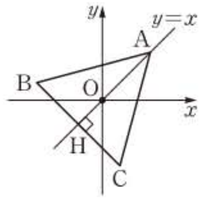
$\therefore 3l=3\cdot\frac{14}{9}\cdot6=28$ ··· ❸

답 28

채점 기준	비율
❶ 두 점 P, Q의 좌표를 두 점 B, C의 좌표를 이용하여 나타낼 수 있다.	40 %
❷ l을 두 점 B, C의 좌표를 이용하여 나타낼 수 있다.	30 %
❸ $3l$의 값을 구할 수 있다.	30 %

1115 **전략** △ABC를 좌표평면 위에 나타낸 후 삼각형의 무게중심은 세 중선을 꼭짓점으로부터 각각 2 : 1로 내분함을 이용한다.

풀이 점 A가 직선 $y=x$ 위에 있고 △ABC의 무게중심이 원점이므로 △ABC를 좌표평면 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



이때 점 A에서 $\overline{BC}$에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\overline{AO}=\frac{2}{3}\overline{AH}$$

△ABC의 한 변의 길이를 $a\,(a>0)$라 하면 넓이가 $36\sqrt{3}$이므로

$$\frac{\sqrt{3}}{4}a^2=36\sqrt{3},\qquad a^2=144$$

$$\therefore a=12\ (\because a>0)$$

즉 $\overline{AH}=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 12=6\sqrt{3}$이므로

$$\overline{AO}=\frac{2}{3}\overline{AH}=\frac{2}{3}\cdot 6\sqrt{3}=4\sqrt{3}$$

이때 $\mathrm{A}(k,\ k)$라 하면

$$\sqrt{k^2+k^2}=4\sqrt{3},\qquad 2k^2=48$$

$$\therefore k^2=24$$

따라서 점 A의 x좌표와 y좌표의 곱은

$k^2=24$ $k=\pm 2\sqrt{6}$이므로 점 A의 좌표는 $(-2\sqrt{6},\ -2\sqrt{6})$ 또는 $(2\sqrt{6},\ 2\sqrt{6})$

답 24

1116 **전략** $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$, $\mathrm{B}(x_2,\ y_2)$, $\mathrm{C}(x_3,\ y_3)$이라 하고, 주어진 조건을 이용하여 $x_1+x_2+x_3$, $y_1+y_2+y_3$의 값을 구한다.

풀이 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$, $\mathrm{B}(x_2,\ y_2)$, $\mathrm{C}(x_3,\ y_3)$이라 하면 $\overline{AB}$의 중점의 좌표가 $(1,\ 2)$이므로

$$\frac{x_1+x_2}{2}=1,\ \frac{y_1+y_2}{2}=2$$

$$\therefore x_1+x_2=2,\ y_1+y_2=4 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$\overline{BC}$의 중점의 좌표가 $(5,\ 3)$이므로

$$\frac{x_2+x_3}{2}=5,\ \frac{y_2+y_3}{2}=3$$

$$\therefore x_2+x_3=10,\ y_2+y_3=6 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

$\overline{CA}$의 중점의 좌표가 $(3,\ 7)$이므로

$$\frac{x_3+x_1}{2}=3,\ \frac{y_3+y_1}{2}=7$$

$$\therefore x_3+x_1=6,\ y_3+y_1=14 \qquad \cdots\cdots ㉢$$

㉠, ㉡, ㉢에서

$$2(x_1+x_2+x_3)=18,\ 2(y_1+y_2+y_3)=24$$

$$\therefore x_1+x_2+x_3=9,\ y_1+y_2+y_3=12$$

△ABC의 무게중심의 좌표가 $(a,\ b)$이므로

$$a=\frac{x_1+x_2+x_3}{3}=3,\ b=\frac{y_1+y_2+y_3}{3}=4$$

$$\therefore a+b=7$$

답 7

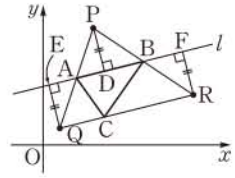
다른 풀이 $\mathrm{D}(1,\ 2)$, $\mathrm{E}(5,\ 3)$, $\mathrm{F}(3,\ 7)$이라 하면 △ABC의 무게중심은 △DEF의 무게중심과 일치하므로 △ABC의 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{1+5+3}{3},\ \frac{2+3+7}{3}\right),\ 즉\ (3,\ 4)$$

따라서 $a=3$, $b=4$이므로 $\qquad a+b=7$

1117 **전략** 세 점 P, Q, R에서 직선 l에 이르는 거리가 같음을 이용하여 합동인 삼각형을 찾는다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 세 점 P, Q, R에서 직선 l에 내린 수선의 발을 각각 D, E, F라 하자.



△ADP≡△AEQ(ASA 합동)이므로

$$\overline{AP}=\overline{AQ}$$

즉 점 A는 $\overline{PQ}$의 중점이므로

$$\mathrm{A}\left(\frac{3+1}{2},\ \frac{7+1}{2}\right),\ 즉\ \mathrm{A}(2,\ 4)$$

또 △BDP≡△BFR(ASA 합동)이므로

$$\overline{BP}=\overline{BR}$$

즉 점 B는 $\overline{PR}$의 중점이므로

$$\mathrm{B}\left(\frac{3+9}{2},\ \frac{7+3}{2}\right),\ 즉\ \mathrm{B}(6,\ 5)$$

한편 점 C는 $\overline{QR}$를 1 : 2로 내분하는 점이므로

$$\mathrm{C}\left(\frac{1\cdot 9+2\cdot 1}{1+2},\ \frac{1\cdot 3+2\cdot 1}{1+2}\right),\ 즉\ \mathrm{C}\left(\frac{11}{3},\ \frac{5}{3}\right)$$

△ABC의 무게중심의 좌표가 $(a,\ b)$이므로

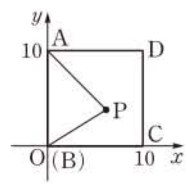
$$a=\frac{1}{3}\left(2+6+\frac{11}{3}\right)=\frac{35}{9},\ b=\frac{1}{3}\left(4+5+\frac{5}{3}\right)=\frac{32}{9}$$

$$\therefore 9(a+b)=67$$

답 ③

1118 **전략** 점 P의 좌표를 $(x,\ y)$로 놓고, 자취의 방정식을 구한다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 직선 BC를 x축으로 하고, 직선 AB를 y축으로 하는 좌표평면을 잡으면 점 B는 원점이다.



점 P의 좌표를 $(x,\ y)$라 하면 $\mathrm{A}(0,\ 10)$, $\mathrm{B}(0,\ 0)$이므로 $\overline{AP}^2-\overline{BP}^2=20$에서

$$\{x^2+(y-10)^2\}-(x^2+y^2)=20$$

$$-20y+100=20\qquad \therefore y=4$$

따라서 점 P의 자취는 ①과 같다.

답 ①

Ⅳ. 도형의 방정식

10 직선의 방정식

1119 $y-10=-2\{x-(-3)\}$ $\quad\therefore y=-2x+4$

답 $y=-2x+4$

1120 $y-1=\dfrac{-5-1}{4-1}(x-1)$ $\quad\therefore y=-2x+3$

답 $y=-2x+3$

1121 $y-(-7)=\dfrac{-4-(-7)}{1-(-2)}\{x-(-2)\}$

$\therefore y=x-5$

답 $y=x-5$

1122 두 점의 x좌표가 모두 3이므로 $\quad x=3$

답 $x=3$

1123 답 $x=-9$

1124 답 $y=2$

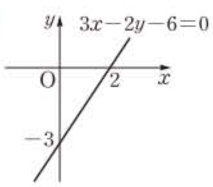
1125 답 $x=-1$

1126 답 $y=-7$

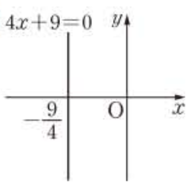
1127 답 (가) a (나) b (다) a (라) $\dfrac{b}{a}$

1128 답 $\dfrac{x}{3}-\dfrac{y}{6}=1$

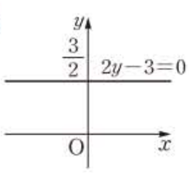
1129 답



1130 답



1131 답

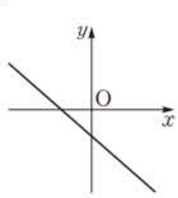


1132 $b\neq0$이므로 $ax+by+c=0$에서

$y=-\dfrac{a}{b}x-\dfrac{c}{b}$

이때 $a>0$, $b>0$, $c>0$에서 $\quad -\dfrac{a}{b}<0$, $-\dfrac{c}{b}<0$

따라서 주어진 직선의 기울기와 y절편은 모두 음수이므로 주어진 직선은 오른쪽 그림과 같이 제1사분면을 지나지 않는다.



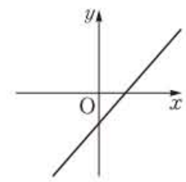
답 제1사분면

1133 $b\neq0$이므로 $ax+by+c=0$에서

$y=-\dfrac{a}{b}x-\dfrac{c}{b}$

이때 $a>0$, $b<0$, $c<0$에서 $\quad -\dfrac{a}{b}>0$, $-\dfrac{c}{b}<0$

따라서 주어진 직선의 기울기는 양수이고, y절편은 음수이므로 주어진 직선은 오른쪽 그림과 같이 제2사분면을 지나지 않는다.



답 제2사분면

1134 주어진 식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하려면

$x+2y+4=0$, $3x-y-9=0$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $\quad x=2$, $y=-3$

따라서 구하는 점의 좌표는 $\quad (2,\ -3)$

답 $(2,\ -3)$

1135 주어진 식을 k에 대하여 정리하면

$(x+1)k+y-1=0$

이 식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하려면

$x+1=0$, $y-1=0$ $\quad\therefore x=-1$, $y=1$

따라서 구하는 점의 좌표는 $\quad (-1,\ 1)$

답 $(-1,\ 1)$

1136 주어진 두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식을

$3x-2y+3+k(x-3y-3)=0$ (k는 실수) $\quad\cdots\cdots$ ㉠

으로 놓으면 이 직선이 원점을 지나므로

$3-3k=0$ $\quad\therefore k=1$

$k=1$을 ㉠에 대입하면

$3x-2y+3+(x-3y-3)=0$

$\therefore 4x-5y=0$

답 $4x-5y=0$

1137 $2m+1=-2$이므로

$2m=-3$ $\quad\therefore m=-\dfrac{3}{2}$

답 $-\dfrac{3}{2}$

1138 $-2(2m+1)=-1$이므로

$2m+1=\dfrac{1}{2}$ $\quad\therefore m=-\dfrac{1}{4}$

답 $-\dfrac{1}{4}$

1139 ㄴ. $\dfrac{1}{2}=\dfrac{-3}{-6}\neq\dfrac{4}{-1}$이므로 직선 $x-3y+4=0$과 평행하다.

ㄷ. $1\cdot3+(-3)\cdot1=0$이므로 직선 $x-3y+4=0$과 수직이다.

답 평행한 직선: ㄴ, 수직인 직선: ㄷ

1140 $\dfrac{a}{1}=\dfrac{3}{-(a+4)}\neq\dfrac{-1}{1}$에서 $\quad a^2+4a+3=0$, $a\neq-1$

$(a+3)(a+1)=0$, $a\neq-1$ $\quad\therefore a=-3$

답 -3

1141 $a\cdot1+3\{-(a+4)\}=0$에서

$2a=-12$ $\quad\therefore a=-6$

답 -6

1142 직선 $y=\frac{1}{3}x-2$에 수직인 직선의 기울기는 -3이므로 구하는 직선의 방정식은

$y-(-3)=-3\{x-(-5)\}$ $\quad\therefore y=-3x-18$

답 $y=-3x-18$

1143 $2x-5y+3=0$에서 $\quad y=\frac{2}{5}x+\frac{3}{5}$

이 직선과 평행한 직선의 기울기는 $\frac{2}{5}$이므로 구하는 직선의 방정식은

$y-(-2)=\frac{2}{5}(x-10)$ $\quad\therefore y=\frac{2}{5}x-6$

답 $y=\frac{2}{5}x-6$

1144 $6x-3y+4=0$에서 $\quad y=2x+\frac{4}{3}$

이 직선과 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{1}{2}$이고 x절편이 -4, 즉 점 $(-4,\ 0)$을 지나므로 구하는 직선의 방정식은

$y=-\frac{1}{2}\{x-(-4)\}$ $\quad\therefore y=-\frac{1}{2}x-2$

답 $y=-\frac{1}{2}x-2$

1145 $\frac{|3\cdot(-1)+4\cdot5-8|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{9}{5}$ 답 $\frac{9}{5}$

1146 $\frac{|2\cdot7-1\cdot3+4|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{15}{\sqrt{5}}=3\sqrt{5}$ 답 $3\sqrt{5}$

1147 점 $(2,\ -4)$와 직선 $y=\frac{1}{3}x+2$, 즉 $x-3y+6=0$ 사이의 거리는

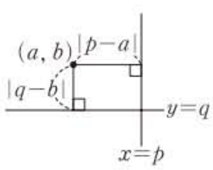
$\frac{|1\cdot2-3\cdot(-4)+6|}{\sqrt{1^2+(-3)^2}}=\frac{20}{\sqrt{10}}=2\sqrt{10}$ 답 $2\sqrt{10}$

1148 $\frac{|20|}{\sqrt{1^2+7^2}}=\frac{20}{5\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$ 답 $2\sqrt{2}$

1149 $|6-(-3)|=9$ 답 9

SSEN 특강 점과 직선 $x=p$ 또는 $y=q$ 사이의 거리

점 $(a,\ b)$와
① 직선 $x=p$ 사이의 거리
➡ $|p-a|$
② 직선 $y=q$ 사이의 거리
➡ $|q-b|$



1150 $|-2-1|=3$ 답 3

1151 $\frac{|2\cdot3-1\cdot(-5)+k|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=2\sqrt{5}$이므로 $\quad |k+11|=10$

$k+11=-10$ 또는 $k+11=10$

$\therefore k=-21$ 또는 $k=-1$ 답 $-21,\ -1$

1152 직선 $4x+3y+7=0$에 평행한 직선의 방정식을

$4x+3y+k=0$ (k는 상수, $k\neq7$)

이라 하면 점 $(-3,\ 6)$과 이 직선 사이의 거리가 3이므로

$\frac{|4\cdot(-3)+3\cdot6+k|}{\sqrt{4^2+3^2}}=3,$ $\quad |k+6|=15$

$k+6=-15$ 또는 $k+6=15$

$\therefore k=-21$ 또는 $k=9$

따라서 구하는 직선의 방정식은

$4x+3y-21=0,\ 4x+3y+9=0$

답 $4x+3y-21=0,\ 4x+3y+9=0$

1153 두 직선 $2x+3y=0$, $2x+3y-13=0$은 평행하므로 두 직선 사이의 거리는 직선 $2x+3y=0$ 위의 한 점 $(0,\ 0)$과 직선 $2x+3y-13=0$ 사이의 거리와 같다.

$\therefore \frac{|-13|}{\sqrt{2^2+3^2}}=\frac{13}{\sqrt{13}}=\sqrt{13}$ 답 $\sqrt{13}$

1154 두 직선 $3x+4y-3=0$, $6x+8y+5=0$은 평행하므로 두 직선 사이의 거리는 직선 $3x+4y-3=0$ 위의 한 점 $(1,\ 0)$과 직선 $6x+8y+5=0$ 사이의 거리와 같다.

$\therefore \frac{|6\cdot1+8\cdot0+5|}{\sqrt{6^2+8^2}}=\frac{11}{10}$ 답 $\frac{11}{10}$

유형 01 한 점과 기울기가 주어진 직선의 방정식 본책 168쪽

① 점 $(a,\ b)$를 지나고 기울기가 m인 직선의 방정식은
$y-b=m(x-a)$
② 점 $(a,\ b)$를 지나고 x축에 평행한 직선의 방정식은
$y=b$ (단, $b\neq0$)
③ x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 $\theta\,(0°\leq\theta<90°)$인 직선의 기울기 m은
$m=\tan\theta$

1155 두 점 $(-3,\ 1)$, $(5,\ 7)$을 이은 선분의 중점의 좌표는

$\left(\frac{-3+5}{2},\ \frac{1+7}{2}\right)$, 즉 $(1,\ 4)$

따라서 기울기가 2이고 점 $(1,\ 4)$를 지나는 직선의 방정식은

$y-4=2(x-1)$ $\quad\therefore y=2x+2$ 답 $y=2x+2$

1156 직선 $4x-3y+5=0$의 기울기는 $\frac{4}{3}$이므로 기울기가 $\frac{4}{3}$이고 점 $(2,\ 3)$을 지나는 직선의 방정식은

$y-3=\frac{4}{3}(x-2),$ $\quad y=\frac{4}{3}x+\frac{1}{3}$

$\therefore 4x-3y+1=0$

따라서 $a=4$, $b=-3$이므로 $\quad ab=-12$ 답 -12

1157 $\triangle ABC$의 무게중심의 좌표는

$\left(\frac{-1+2+5}{3},\ \frac{3-2+2}{3}\right)$, 즉 $(2,\ 1)$

따라서 점 $(2,\ 1)$을 지나고 x축에 평행한 직선의 방정식은

$y=1$ 　　답 $y=1$

1158 점 $(2,\ -1)$을 지나고 기울기가 $\tan 60°=\sqrt{3}$인 직선의 방정식은

$y-(-1)=\sqrt{3}(x-2)$

$\therefore \sqrt{3}x-y-1-2\sqrt{3}=0$

따라서 $a=-1$, $b=-1-2\sqrt{3}$이므로

$a+b=-2-2\sqrt{3}$ 　　답 ①

유형 02 두 점을 지나는 직선의 방정식 　본책 168쪽

두 점 $(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_2)$를 지나는 직선의 방정식은

$y-y_1=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$ (단, $x_1\neq x_2$)

1159 두 점 $(3,\ 3)$, $(-1,\ -5)$를 지나는 직선의 방정식은

$y-3=\dfrac{-5-3}{-1-3}(x-3)$ 　　$\therefore y=2x-3$

두 점 $(a,\ -7)$, $(5,\ b)$가 직선 $y=2x-3$ 위에 있으므로

$-7=2a-3$, $b=2\cdot5-3$

따라서 $a=-2$, $b=7$이므로 　$b-a=9$ 　　답 ⑤

1160 $\overline{\mathrm{AB}}$를 $2:3$으로 외분하는 점의 좌표는

$\left(\dfrac{2\cdot4-3\cdot3}{2-3},\ \dfrac{2\cdot(-7)-3\cdot(-6)}{2-3}\right)$, 즉 $(1,\ -4)$ 　··· ❶

따라서 두 점 $(1,\ -4)$, $(4,\ 2)$를 지나는 직선의 방정식은

$y-(-4)=\dfrac{2-(-4)}{4-1}(x-1)$

$\therefore y=2x-6$ 　··· ❷

답 $y=2x-6$

채점 기준	비율
❶ $\overline{\mathrm{AB}}$의 외분점의 좌표를 구할 수 있다.	40 %
❷ 직선의 방정식을 구할 수 있다.	60 %

1161 직선 AC의 방정식은 　$y=\dfrac{6-0}{1-5}(x-5)$

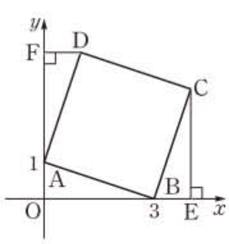
$\therefore y=-\dfrac{3}{2}x+\dfrac{15}{2}$ 　······ ㉠

직선 OB의 방정식은 　$y=x$ 　······ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 　$x=3$, $y=3$

따라서 두 대각선의 교점의 좌표는 $(3,\ 3)$이다. 　　답 ④

1162 점 C에서 x축에 내린 수선의 발을 E, 점 D에서 y축에 내린 수선의 발을 F라 하면



$\triangle\mathrm{AOB}\equiv\triangle\mathrm{BEC}\equiv\triangle\mathrm{DFA}$

(RHA 합동)

즉 $\overline{\mathrm{BE}}=1$, $\overline{\mathrm{CE}}=3$이므로

$\mathrm{C}(3+1,\ 3)$, 즉 $\mathrm{C}(4,\ 3)$

$\overline{\mathrm{DF}}=1$, $\overline{\mathrm{FA}}=3$이므로

$\mathrm{D}(1,\ 1+3)$, 즉 $\mathrm{D}(1,\ 4)$ 　··· ❶

따라서 직선 CD의 방정식은

$y-3=\dfrac{4-3}{1-4}(x-4)$, 즉 $y=-\dfrac{1}{3}x+\dfrac{13}{3}$ 　··· ❷

이므로 구하는 x절편은 13이다. 　··· ❸

└ $y=0$일 때 x의 값

답 13

채점 기준	비율
❶ 두 점 C, D의 좌표를 구할 수 있다.	50 %
❷ 직선 CD의 방정식을 구할 수 있다.	30 %
❸ 직선 CD의 x절편을 구할 수 있다.	20 %

유형 03 x절편과 y절편이 주어진 직선의 방정식 　본책 169쪽

x절편이 a, y절편이 b인 직선의 방정식은

$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$ (단, $a\neq0$, $b\neq0$)

1163 x절편이 -3, y절편이 -4인 직선의 방정식은

$-\dfrac{x}{3}-\dfrac{y}{4}=1$

이 직선이 점 $(k,\ -2k)$를 지나므로

$-\dfrac{k}{3}+\dfrac{2k}{4}=1$, 　$\dfrac{k}{6}=1$

$\therefore k=6$ 　　답 ③

1164 직선 $\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}=1$의 x절편이 2이므로 　$\mathrm{P}(2,\ 0)$

직선 $\dfrac{x}{3}-\dfrac{y}{4}=2$, 즉 $\dfrac{x}{6}-\dfrac{y}{8}=1$의 y절편이 -8이므로

└ 우변이 1이 되도록 양변을 2로 나눈다.

$\mathrm{Q}(0,\ -8)$

따라서 직선 PQ의 방정식은

$\dfrac{x}{2}-\dfrac{y}{8}=1$ 　　답 ①

1165 y절편을 $a\,(a\neq0)$라 하면 x절편은 $2a$이므로 직선 l의 방정식은 　$\dfrac{x}{2a}+\dfrac{y}{a}=1$

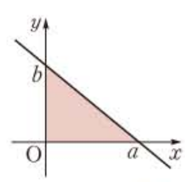
이 직선이 점 $(2,\ 3)$을 지나므로

$\dfrac{2}{2a}+\dfrac{3}{a}=1$, 　$\dfrac{4}{a}=1$ 　$\therefore a=4$

따라서 구하는 직선의 방정식은

$\dfrac{x}{8}+\dfrac{y}{4}=1$ 　　답 $\dfrac{x}{8}+\dfrac{y}{4}=1$

1166 직선 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$의 x절편은 a, y절편은 b이고, 제3사분면을 지나지 않으므로 직선의 개형은 오른쪽 그림과 같다.



이때 색칠한 부분의 넓이가 4이므로

$\dfrac{1}{2}ab=4$ 　$\therefore ab=8$ 　　답 8

1167 $ax+y=3a$에서 　$\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{3a}=1$

이 직선과 x축, y축의 교점을 각각 A, B라 하면

$A(3, 0)$, $B(0, 3a)$

이때 $\overline{AB}=6$이므로

$\sqrt{(-3)^2+(3a)^2}=6$, $\quad 3\sqrt{a^2+1}=6$

$a^2+1=4 \quad \therefore a=\sqrt{3}$ ($\because a>0$) 답 $\sqrt{3}$

유형 04 세 점이 한 직선 위에 있을 조건 본책 169쪽

세 점 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$이 한 직선 위에 있다.
➡ (직선 AB의 기울기)=(직선 BC의 기울기)
=(직선 AC의 기울기)
➡ $\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y_3-y_2}{x_3-x_2}=\dfrac{y_3-y_1}{x_3-x_1}$ (단, $x_1\neq x_2$, $x_2\neq x_3$, $x_1\neq x_3$)

1168 세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으려면 직선 AC와 직선 BC의 기울기가 같아야 하므로

$\dfrac{11-k}{5-1}=\dfrac{11-7}{5-k}$, 즉 $\dfrac{11-k}{4}=\dfrac{4}{5-k}$

$(11-k)(5-k)=16$, $\quad k^2-16k+39=0$

$(k-3)(k-13)=0 \quad \therefore k=3$ 또는 $k=13$

따라서 모든 k의 값의 합은

$3+13=16$ 답 ⑤

참고 세 직선 AB, BC, AC 중 두 직선의 기울기가 같음을 이용하여 식을 세울 때, 문자가 없는 점을 지나는 직선을 선택하는 것이 계산이 편리하다.

1169 세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으려면 직선 AB와 직선 AC의 기울기가 같아야 하므로

$\dfrac{a+1}{1+1}=\dfrac{-5+1}{-a+1}$, 즉 $\dfrac{a+1}{2}=\dfrac{4}{a-1}$ ...... ㉠ ··· ❶

$(a+1)(a-1)=8$, $\quad a^2=9$

$\therefore a=3$ ($\because a>0$) ··· ❷

㉠에서 직선 l의 기울기는 $\dfrac{3+1}{2}=2$이고 점 $A(-1, -1)$을 지나므로 직선 l의 방정식은

$y+1=2(x+1) \quad \therefore y=2x+1$ ··· ❸

답 $y=2x+1$

채점 기준	비율
❶ 기울기를 이용하여 a에 대한 식을 세울 수 있다.	40 %
❷ a의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ 직선 l의 방정식을 구할 수 있다.	30 %

1170 세 점 A, B, C가 삼각형을 이루지 않으려면 세 점이 한 직선 위에 있어야 한다.

즉 직선 AB와 직선 AC의 기울기가 같아야 하므로

$\dfrac{3}{a-4}=\dfrac{a+3}{6}$, $\quad (a-4)(a+3)=18$

$a^2-a-30=0$, $\quad (a+5)(a-6)=0$

$\therefore a=6$ ($\because a>0$) 답 ④

유형 05 도형의 넓이를 분할하는 직선 본책 170쪽

① △ABC의 꼭짓점 A를 지나면서 그 넓이를 이등분하는 직선
➡ $\overline{BC}$의 중점을 지난다.
② 직사각형의 넓이를 이등분하는 직선
➡ 두 대각선의 교점을 지난다.

1171 직선 l이 △ABC의 넓이를 이등분하려면 $\overline{BC}$의 중점을 지나야 한다.

이때 $\overline{BC}$의 중점의 좌표는

$\left(\dfrac{8+0}{2}, \dfrac{-6+2}{2}\right)$, 즉 $(4, -2)$

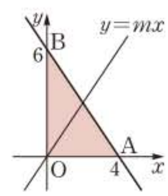
따라서 직선 l은 두 점 $(1, 4)$, $(4, -2)$를 지나므로 직선 l의 방정식은

$y-4=\dfrac{-2-4}{4-1}(x-1) \quad \therefore y=-2x+6$ 답 ②

1172 직선 $\dfrac{x}{4}+\dfrac{y}{6}=1$과 x축, y축의 교점을 각각 A, B라 하면

$A(4, 0)$, $B(0, 6)$

직선 $\dfrac{x}{4}+\dfrac{y}{6}=1$과 x축, y축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 직선 $y=mx$가 이등분하려면 오른쪽 그림과 같이 직선 $y=mx$가 $\overline{AB}$의 중점을 지나야 한다.



이때 $\overline{AB}$의 중점의 좌표는

$\left(\dfrac{4+0}{2}, \dfrac{0+6}{2}\right)$, 즉 $(2, 3)$

$x=2$, $y=3$을 $y=mx$에 대입하면

$3=2m \quad \therefore m=\dfrac{3}{2}$ 답 $\dfrac{3}{2}$

1173 두 직사각형의 넓이를 동시에 이등분하는 직선은 각 직사각형의 대각선의 교점을 모두 지나야 한다. ··· ❶

두 직사각형의 대각선의 교점의 좌표는 각각

$\left(\dfrac{-1-3}{2}, \dfrac{-1-2}{2}\right)$, $\left(\dfrac{1+3}{2}, \dfrac{1+4}{2}\right)$

$\therefore \left(-2, -\dfrac{3}{2}\right)$, $\left(2, \dfrac{5}{2}\right)$ ··· ❷

따라서 두 점 $\left(-2, -\dfrac{3}{2}\right)$, $\left(2, \dfrac{5}{2}\right)$를 지나는 직선의 기울기는

$\dfrac{\frac{5}{2}-\left(-\frac{3}{2}\right)}{2-(-2)}=1$ ··· ❸

답 1

채점 기준	비율
❶ 조건을 만족시키는 직선은 각 직사각형의 대각선의 교점을 모두 지나야 함을 알 수 있다.	40 %
❷ 두 직사각형의 대각선의 교점의 좌표를 구할 수 있다.	30 %
❸ 직선의 기울기를 구할 수 있다.	30 %

1174 △ABD : △ADC=2 : 1이므로 점 D는 $\overline{BC}$를 2 : 1로 내분하는 점이다.

$B(-4, -1)$, $C(5, -4)$이므로 점 D의 좌표는

$\left(\dfrac{2\cdot5+1\cdot(-4)}{2+1}, \dfrac{2\cdot(-4)+1\cdot(-1)}{2+1}\right)$, 즉 $(2, -3)$

따라서 두 점 A$(1, 3)$, D$(2, -3)$을 지나는 직선의 방정식은

$y-3=\dfrac{-3-3}{2-1}(x-1)$

$\therefore y=-6x+9$ 　　답 $y=-6x+9$

유형 06 직선의 개형 　본책 170쪽

직선 $ax+by+c=0\,(b\neq0)$의 개형은 $y=-\dfrac{a}{b}x-\dfrac{c}{b}$ 꼴로 변형한 후 기울기 $-\dfrac{a}{b}$와 y절편 $-\dfrac{c}{b}$의 부호를 정하여 구한다.

1175 $b\neq0$이므로 $ax+by+c=0$에서

$y=-\dfrac{a}{b}x-\dfrac{c}{b}$

이때 $ac>0$, $bc<0$에서 a, b의 부호가 서로 다르므로

$-\dfrac{a}{b}>0$, $-\dfrac{c}{b}>0$ 　$a>0$, $c>0$, $b<0$ 또는 $a<0$, $c<0$, $b>0$

따라서 주어진 직선의 기울기와 y절편이 모두 양수이므로 직선의 개형은 ①이다. 　　답 ①

1176 직선 $ax+by+c=0$, 즉 $y=-\dfrac{a}{b}x-\dfrac{c}{b}$의 기울기는 양수, y절편은 음수이므로

$-\dfrac{a}{b}>0$, $-\dfrac{c}{b}<0$

즉 $ab<0$, $bc>0$에서 a, c의 부호가 서로 다르므로

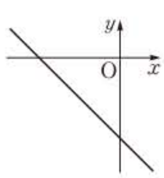
$ac<0$

$c\neq0$이므로 $bx+cy-a=0$에서

$y=-\dfrac{b}{c}x+\dfrac{a}{c}$

이때 $-\dfrac{b}{c}<0$, $\dfrac{a}{c}<0$이므로 직선 $bx+cy-a=0$의 기울기와 y절편은 모두 음수이다.

따라서 직선 $bx+cy-a=0$은 오른쪽 그림과 같이 제1사분면을 지나지 않는다.



답 ①

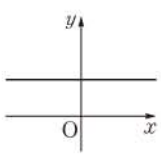
1177 직선 $ax+by+c=0$에서 $b\neq0$이면

$y=-\dfrac{a}{b}x-\dfrac{c}{b}$ 　　…… ㉠

ㄱ. $a=0$, $bc<0$이면

$-\dfrac{a}{b}=0$, $-\dfrac{c}{b}>0$ 　기울기는 0, y절편은 양수

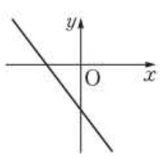
따라서 직선 ㉠은 오른쪽 그림과 같이 제1사분면과 제2사분면을 지난다.



ㄴ. $ab>0$, $bc>0$이면

$-\dfrac{a}{b}<0$, $-\dfrac{c}{b}<0$ 　기울기와 y절편 모두 음수

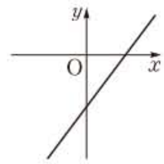
따라서 직선 ㉠은 오른쪽 그림과 같이 제1사분면을 지나지 않는다.



ㄷ. $ab<0$, $c<0$에서 $a>0$, $b<0$, $c<0$이면

$-\dfrac{a}{b}>0$, $-\dfrac{c}{b}<0$ 　기울기는 양수, y절편은 음수

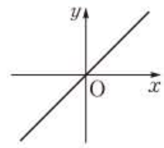
따라서 직선 ㉠은 오른쪽 그림과 같이 제4사분면을 지난다.



ㄹ. $ab<0$, $c=0$이면

$-\dfrac{a}{b}>0$, $-\dfrac{c}{b}=0$ 　기울기는 양수, y절편은 0

따라서 직선 ㉠은 오른쪽 그림과 같이 제1사분면과 제3사분면을 지난다.



이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄹ이다. 　　답 ㄴ, ㄹ

유형 07 정점을 지나는 직선 　본책 171쪽

직선 $ax+by+c+k(a'x+b'y+c')=0$이 실수 k의 값에 관계없이 항상 지나는 점의 좌표

➡ 연립방정식 $\begin{cases} ax+by+c=0 \\ a'x+b'y+c'=0 \end{cases}$의 해

1178 주어진 식을 k에 대하여 정리하면

$(2x+y+3)k+(-x+2y-4)=0$

이 식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하려면

$2x+y+3=0$, $-x+2y-4=0$

위의 두 식을 연립하여 풀면 　$x=-2$, $y=1$

따라서 P$(-2, 1)$이므로 점 P와 원점 사이의 거리는

$\sqrt{(-2)^2+1^2}=\sqrt{5}$ 　　답 ③

1179 주어진 식을 k에 대하여 정리하면

$(x+3y-4)k+(x-y-a)=0$

이 식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하려면

$x+3y-4=0$, $x-y-a=0$

이때 점 $(b, 2)$는 위의 두 직선의 교점이므로

$b+6-4=0$, $b-2-a=0$

따라서 $a=-4$, $b=-2$이므로 　$a+b=-6$ 　　답 -6

1180 주어진 식을 k에 대하여 정리하면

$(2x-y+5)k+(4x-y+3)=0$

이 식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하려면

$2x-y+5=0$, $4x-y+3=0$

위의 두 식을 연립하여 풀면 　$x=1$, $y=7$

따라서 P$(1, 7)$이므로 기울기가 4이고 점 P를 지나는 직선의 방정식은

$y-7=4(x-1)$ 　　$\therefore y=4x+3$ 　　답 $y=4x+3$

1181 직선 $x-3y+1=0$이 점 (a, b)를 지나므로

$a-3b+1=0$ 　　$\therefore a=3b-1$

이것을 $ax-by=2$에 대입하면

$(3b-1)x-by=2$

이 식을 b에 대하여 정리하면

$(3x-y)b-x-2=0$

이 식이 b의 값에 관계없이 항상 성립하려면

$3x-y=0,\ -x-2=0 \qquad \therefore x=-2,\ y=-6$

따라서 직선 $ax-by=2$는 항상 점 $(-2,\ -6)$을 지나므로

$p=-2,\ q=-6 \qquad \therefore p-q=4$ 　　답 4

유형 08 정점을 지나는 직선의 활용 　본책 171쪽

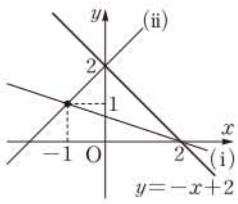
직선 $y-b=m(x-a)$
⇒ m의 값에 관계없이 항상 점 $(a,\ b)$를 지난다.

1182 $mx-y+m+1=0$에서

$(x+1)m-(y-1)=0$ 　　…… ㉠

이므로 직선 ㉠은 m의 값에 관계없이 항상 점 $(-1,\ 1)$을 지난다.

한편 $x+y-2=0$에서 $y=-x+2$이므로 오른쪽 그림에서



(i) 직선 ㉠이 점 $(2,\ 0)$을 지날 때,

$3m+1=0 \qquad \therefore m=-\frac{1}{3}$

(ii) 직선 ㉠이 점 $(0,\ 2)$를 지날 때,

$m-1=0 \qquad \therefore m=1$

(i), (ii)에서 구하는 m의 값의 범위는

$-\frac{1}{3}<m<1$ 　　답 $-\frac{1}{3}<m<1$

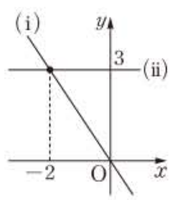
1183 $(m+1)x+y-(1-2m)=0$에서

$(x+2)m+(x+y-1)=0$ 　　…… ㉠

$x+2=0,\ x+y-1=0$에서 　$x=-2,\ y=3$

즉 직선 ㉠은 m의 값에 관계없이 항상 점 $(-2,\ 3)$을 지난다.

오른쪽 그림에서



(i) 직선 ㉠이 원점을 지날 때,

$2m-1=0 \qquad \therefore m=\frac{1}{2}$

(ii) 직선 ㉠이 x축에 평행할 때,

$m+1=0 \qquad \therefore m=-1$

(i), (ii)에서 m의 값의 범위는

$-1\le m\le\frac{1}{2}$

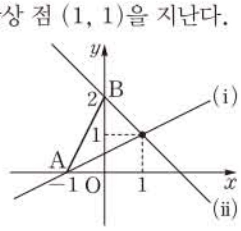
따라서 정수 m은 $-1,\ 0$의 2개이다. 　　답 2

1184 $y=mx-m+1$에서

$(x-1)m-(y-1)=0$ 　　…… ㉠

이므로 직선 ㉠은 m의 값에 관계없이 항상 점 $(1,\ 1)$을 지난다.

오른쪽 그림에서



(i) 직선 ㉠이 점 $\mathrm{A}(-1,\ 0)$을 지날 때,

$-2m+1=0 \qquad \therefore m=\frac{1}{2}$

(ii) 직선 ㉠이 점 $\mathrm{B}(0,\ 2)$를 지날 때,

$-m-1=0 \qquad \therefore m=-1$

(i), (ii)에서 m의 값의 범위는

$-1\le m\le\frac{1}{2}$

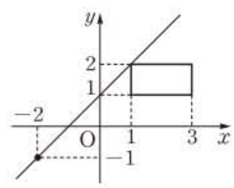
따라서 $a=-1,\ b=\frac{1}{2}$이므로 　$ab=-\frac{1}{2}$ 　　답 ②

1185 $mx-y+2m-1=0$에서

$(x+2)m-(y+1)=0$ 　　…… ㉠

이므로 직선 ㉠은 m의 값에 관계없이 항상 점 $(-2,\ -1)$을 지난다. ⋯ ❶

m은 직선 ㉠의 기울기이므로 오른쪽 그림과 같이 직선 ㉠이 점 $(1,\ 2)$를 지날 때 최대이다.



따라서 $3m-3=0$에서 $m=1$이므로 m의 최댓값은 1이다. ⋯ ❷

답 1

채점 기준	비율
❶ 직선 $mx-y+2m-1=0$이 m의 값에 관계없이 항상 지나는 점의 좌표를 구할 수 있다.	40 %
❷ m의 최댓값을 구할 수 있다.	60 %

참고 (i) 직선 ㉠이 점 $(1,\ 2)$를 지날 때, 　$m=1$

(ii) 직선 ㉠이 점 $(3,\ 1)$을 지날 때,

$5m-2=0 \qquad \therefore m=\frac{2}{5}$

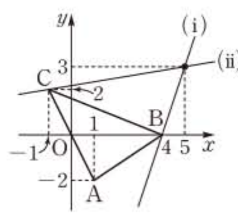
(i), (ii)에서 m의 값의 범위는 　$\frac{2}{5}\le m\le 1$

1186 $mx-y-5m+3=0$에서

$(x-5)m-(y-3)=0$ 　　…… ㉠

이므로 직선 ㉠은 m의 값에 관계없이 항상 점 $(5,\ 3)$을 지난다.

오른쪽 그림에서



(i) 직선 ㉠이 점 $\mathrm{B}(4,\ 0)$을 지날 때,

$-m+3=0 \qquad \therefore m=3$

(ii) 직선 ㉠이 점 $\mathrm{C}(-1,\ 2)$를 지날 때,

$-6m+1=0 \qquad \therefore m=\frac{1}{6}$

(i), (ii)에서 구하는 m의 값의 범위는

$m<\frac{1}{6}$ 또는 $m>3$ 　　답 $m<\frac{1}{6}$ 또는 $m>3$

참고 직선 ㉠이 △ABC와 만나도록 하는 m의 값의 범위는 $\frac{1}{6}\le m\le 3$이다.

1187 직선 $y=mx+3m+2$가 직사각형 ABCD의 넓이를 이등분하려면 대각선 AC의 중점을 지나야 한다.

$\mathrm{C}(a,\ b)$라 하면 $\overline{\mathrm{AC}}$의 중점의 좌표는 $\left(\frac{1+a}{2},\ \frac{3+b}{2}\right)$이므로

$\frac{3+b}{2}=m\cdot\frac{1+a}{2}+3m+2$

$3+b=m+am+6m+4 \qquad \therefore (7+a)m+1-b=0$

이 식이 m의 값에 관계없이 항상 성립하려면

$7+a=0,\ 1-b=0 \qquad \therefore a=-7,\ b=1$

따라서 점 C의 좌표는 $(-7,\ 1)$이다. 답 $(-7,\ 1)$

참고 직선 $y=mx+3m+2$, 즉 $(x+3)m-(y-2)=0$은 m의 값에 관계없이 항상 점 $(-3,\ 2)$를 지나므로 이 점이 대각선 AC의 중점이어야 한다.

유형 09 두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식 본책 172쪽

두 직선 $ax+by+c=0$, $a'x+b'y+c'=0$의 교점과 점 $(p,\ q)$를 지나는 직선의 방정식
➡ $ax+by+c+k(a'x+b'y+c')=0$ (k는 실수)으로 놓고 $x=p$, $y=q$를 대입하여 k의 값을 구한다.

1188 주어진 두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식을

$2x+y-4+k(2x-3y+4)=0$ (k는 실수) ······ ㉠

으로 놓으면 이 직선이 점 $(4,\ -1)$을 지나므로

$8-1-4+k(8+3+4)=0$

$3+15k=0$ $\quad\therefore k=-\dfrac{1}{5}$

$k=-\dfrac{1}{5}$을 ㉠에 대입하면

$2x+y-4-\dfrac{1}{5}(2x-3y+4)=0$

$\dfrac{8}{5}x+\dfrac{8}{5}y-\dfrac{24}{5}=0$ $\quad\therefore x+y-3=0$

따라서 $a=1$, $b=1$이므로 $\quad 2a+b=3$ 답 ④

다른 풀이 두 직선 $2x+y-4=0$, $2x-3y+4=0$의 교점의 좌표는

$(1,\ 2)$

두 점 $(1,\ 2)$, $(4,\ -1)$을 지나는 직선의 방정식은

$y-2=\dfrac{-1-2}{4-1}(x-1)$

$\therefore x+y-3=0$

1189 주어진 두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식을

$4x+3y+8+k(-x+2y+2)=0$ (k는 실수) ······ ㉠

으로 놓으면 이 직선이 점 $(1,\ 1)$을 지나므로

$4+3+8+k(-1+2+2)=0$

$15+3k=0$ $\quad\therefore k=-5$

$k=-5$를 ㉠에 대입하면

$4x+3y+8-5(-x+2y+2)=0$

$\therefore 9x-7y-2=0$ 답 $9x-7y-2=0$

1190 주어진 두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식을

$x-3y+7+k(3x-2y-1)=0$ (k는 실수) ······ ㉠

으로 놓으면 이 직선이 점 $(6,\ -4)$를 지나므로

$6+12+7+k(18+8-1)=0$

$25+25k=0$ $\quad\therefore k=-1$

$k=-1$을 ㉠에 대입하면

$x-3y+7-(3x-2y-1)=0$

$\therefore -2x-y+8=0$ ··· ❶

앞의 식에 $y=0$을 대입하면 $\quad -2x+8=0$ $\quad\therefore x=4$

$\therefore$ A$(4,\ 0)$

또 $x=0$을 대입하면 $\quad -y+8=0$ $\quad\therefore y=8$

$\therefore$ B$(0,\ 8)$ ··· ❷

$\therefore \overline{AB}=\sqrt{(-4)^2+8^2}=4\sqrt{5}$ ··· ❸

답 $4\sqrt{5}$

채점 기준	비율
❶ 두 직선의 교점과 점 $(6,\ -4)$를 지나는 직선의 방정식을 구할 수 있다.	60 %
❷ 두 점 A, B의 좌표를 구할 수 있다.	20 %
❸ $\overline{AB}$의 길이를 구할 수 있다.	20 %

1191 주어진 두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식을

$(a+4)x+(3a+1)y-2+k(x+ay+1)=0$ (k는 실수) ······ ㉠

으로 놓으면 이 직선이 원점을 지나므로

$-2+k=0$ $\quad\therefore k=2$

$k=2$를 ㉠에 대입하면

$(a+4)x+(3a+1)y-2+2(x+ay+1)=0$

$\therefore (a+6)x+(5a+1)y=0$

이 직선의 기울기가 $\dfrac{5}{4}$이므로

$-\dfrac{a+6}{5a+1}=\dfrac{5}{4}$, $\quad 25a+5=-4a-24$

$29a=-29$ $\quad\therefore a=-1$ 답 ①

유형 10 두 직선의 평행과 수직 본책 173쪽

두 직선 $ax+by+c=0$, $a'x+b'y+c'=0$ $(abc\neq0,\ a'b'c'\neq0)$이
① 평행하다. ➡ $\dfrac{a}{a'}=\dfrac{b}{b'}\neq\dfrac{c}{c'}$ ② 수직이다. ➡ $aa'+bb'=0$

1192 직선 $(k-2)x+3y-1=0$과 직선 $kx-y+3=0$이

(i) 평행하려면 $\quad \dfrac{k-2}{k}=\dfrac{3}{-1}\neq\dfrac{-1}{3}$

$-k+2=3k$ $\quad\therefore k=\dfrac{1}{2}$

(ii) 수직이려면 $\quad (k-2)k+3\cdot(-1)=0$

$k^2-2k-3=0$, $\quad (k+1)(k-3)=0$

$\therefore k=-1$ 또는 $k=3$

(i), (ii)에서 $\quad \alpha=\dfrac{1}{2}$, $\beta=3$ $(\because \beta>0)$

$\therefore \alpha\beta=\dfrac{3}{2}$ 답 $\dfrac{3}{2}$

1193 두 직선 $y=ax+b$, $y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{3}{2}$이 서로 수직이므로

$\dfrac{1}{2}a=-1$ $\quad\therefore a=-2$

따라서 직선 $y=-2x+b$가 점 $(1,\ 2)$를 지나므로

$2=-2+b$ $\quad\therefore b=4$

$\therefore a-b=-6$ 답 ②

1194 두 직선 $ax-y+b=0$, $bx-3y+a=0$이 서로 만나지 않으면 평행하므로

$$\frac{a}{b}=\frac{-1}{-3}\neq\frac{b}{a} \qquad \therefore b=3a$$

$b=3a$를 $bx+ay=0$에 대입하면

$$3ax+ay=0, \qquad ay=-3ax$$

$$\therefore y=-3x \ (\because a\neq0)$$

따라서 구하는 기울기는 -3이다. 답 -3

1195 직선 $3x+ay+1=0$이 점 $(1, -2)$를 지나므로

$$3-2a+1=0 \qquad \therefore a=2$$

직선 $bx+cy-8=0$도 점 $(1, -2)$를 지나므로

$$b-2c-8=0 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

두 직선 $3x+2y+1=0$, $bx+cy-8=0$이 서로 수직이므로

$$3b+2c=0 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $b=2$, $c=-3$

$$\therefore a+b-c=7$$

답 ④

1196 직선 $x+ay+1=0$이 직선 $2x-by+1=0$과 수직이므로

$$1\cdot2+a\cdot(-b)=0 \qquad \therefore ab=2 \qquad \cdots ❶$$

또 직선 $x+ay+1=0$이 직선 $x-(b-3)y-1=0$과 평행하므로

$$\frac{1}{1}=\frac{a}{-(b-3)}\neq\frac{1}{-1}$$

$$a=-b+3 \qquad \therefore a+b=3 \qquad \cdots ❷$$

$$\therefore a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$$

$$=3^3-3\cdot2\cdot3=9 \qquad \cdots ❸$$

답 9

채점 기준	비율
❶ ab의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ a^3+b^3의 값을 구할 수 있다.	20 %

유형 11 세 직선의 위치 관계

본책 173쪽

서로 다른 세 직선이 삼각형을 이루지 않는 경우

① 세 직선이 한 점에서 만날 때
➡ 두 직선의 교점을 다른 한 직선이 지난다.

② 세 직선 중 두 직선이 평행할 때
➡ 두 직선의 기울기는 같고, 다른 한 직선의 기울기는 다르다.

③ 세 직선이 모두 평행할 때
➡ 세 직선의 기울기가 모두 같다.

1197 주어진 세 직선이 삼각형을 이루지 않는 경우는 다음과 같다.

(i) 직선 $y=ax+2$가 직선 $y=-x$ 또는 $y=x-2$와 평행할 때,

$a=-1$ 또는 $a=1$

(ii) 직선 $y=ax+2$가 두 직선 $y=-x$, $y=x-2$의 교점을 지날 때,

$y=-x$, $y=x-2$를 연립하여 풀면

$x=1$, $y=-1$

직선 $y=ax+2$가 점 $(1, -1)$을 지나려면

$$-1=a+2 \qquad \therefore a=-3$$

(i), (ii)에서 모든 상수 a의 값의 합은

$$-1+1+(-3)=-3$$

답 ④

1198 주어진 세 직선이 한 점에서 만나려면 직선 $ax-2y+1=0$이 두 직선 $3x-y+5=0$, $x+2y-3=0$의 교점을 지나야 한다.

$3x-y+5=0$, $x+2y-3=0$을 연립하여 풀면

$$x=-1, \ y=2$$

직선 $ax-2y+1=0$이 점 $(-1, 2)$를 지나므로

$$-a-4+1=0 \qquad \therefore a=-3$$

답 -3

1199 두 직선 $4x-3y+2=0$, $2x-y+1=0$이 한 점에서 만나므로 직선 $ax-y+5=0$이 위의 두 직선 중 하나와 평행해야 한다.

두 직선 $4x-3y+2=0$, $ax-y+5=0$이 평행하려면

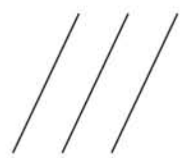
$$\frac{4}{a}=\frac{-3}{-1}\neq\frac{2}{5} \qquad \therefore a=\frac{4}{3}$$

두 직선 $2x-y+1=0$, $ax-y+5=0$이 평행하려면

$$\frac{2}{a}=\frac{-1}{-1}\neq\frac{1}{5} \qquad \therefore a=2$$

답 $\frac{4}{3}$, 2

1200 주어진 세 직선이 좌표평면을 4개의 영역으로 나누려면 오른쪽 그림과 같이 세 직선이 모두 평행해야 한다.



두 직선 $ax+y+1=0$, $2x+y+5=0$이 평행하려면

$$\frac{a}{2}=\frac{1}{1}\neq\frac{1}{5} \qquad \therefore a=2$$

두 직선 $x+by+3=0$, $2x+y+5=0$이 평행하려면

$$\frac{1}{2}=\frac{b}{1}\neq\frac{3}{5} \qquad \therefore b=\frac{1}{2}$$

$$\therefore a+b=\frac{5}{2}$$

답 $\frac{5}{2}$

1201 주어진 세 직선으로 둘러싸인 도형이 직각삼각형이 되려면 세 직선 중 어느 두 직선이 수직이어야 한다.

두 직선 $3x+y-6=0$, $ax-y+1=0$이 수직이려면

$$3a-1=0 \qquad \therefore a=\frac{1}{3}$$

두 직선 $x+2y-4=0$, $ax-y+1=0$이 수직이려면

$$a-2=0 \qquad \therefore a=2$$

따라서 정수 a의 값은 2이다. 답 2

유형 12 수직 또는 평행 조건이 주어진 직선의 방정식

본책 174쪽

① 수직인 두 직선 ➡ 기울기의 곱이 -1이다.

② 평행한 두 직선 ➡ 기울기는 같고, y절편은 다르다.

1202 두 점 A, B를 지나는 직선의 기울기는

$$\frac{-5-(-2)}{2-(-4)}=-\frac{1}{2}$$

이므로 직선 AB에 수직인 직선의 기울기는 2이다.

한편 $\overline{AB}$를 1 : 2로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{1\cdot2+2\cdot(-4)}{1+2}, \frac{1\cdot(-5)+2\cdot(-2)}{1+2}\right), \text{즉 } (-2, -3)$$

따라서 기울기가 2이고 점 $(-2, -3)$을 지나는 직선의 방정식은

$$y-(-3)=2\{x-(-2)\}$$

$$\therefore y=2x+1$$

답 $y=2x+1$

1203 두 점 $(2, 3)$, $(5, 4)$를 지나는 직선의 기울기는

$$\frac{4-3}{5-2}=\frac{1}{3}$$

기울기가 $\frac{1}{3}$이고 x절편이 -5, 즉 점 $(-5, 0)$을 지나는 직선의 방정식은

$$y=\frac{1}{3}\{x-(-5)\} \qquad \therefore x-3y+5=0$$

따라서 $a=-3$, $b=5$이므로 $\quad a-b=-8$

답 -8

1204 주어진 두 직선이 x축에서 만나므로 두 직선의 x절편은 같다.

$2x+(5k+1)y+6=0$에 $y=0$을 대입하면

$$2x+6=0 \qquad \therefore x=-3$$

따라서 두 점 $(-3, 0)$, $(0, 5)$를 지나는 직선의 방정식은

$$-\frac{x}{3}+\frac{y}{5}=1$$

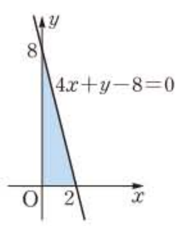
두 직선 $2x+(5k+1)y+6=0$, $-\frac{x}{3}+\frac{y}{5}=1$이 수직으로 만나므로

$$2\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)+(5k+1)\cdot\frac{1}{5}=0$$

$$-\frac{2}{3}+k+\frac{1}{5}=0 \qquad \therefore k=\frac{7}{15}$$

답 $\frac{7}{15}$

1205 직선 $4x+y-8=0$의 x절편은 2, y절편은 8이므로 이 직선과 x축, y축으로 둘러싸인 부분의 넓이는



$$\frac{1}{2}\cdot2\cdot8=8$$

두 직선 $4x+y-8=0$과 $ax+y+b=0$이 평행하므로

$$\frac{4}{a}=\frac{1}{1}\neq\frac{-8}{b} \qquad \therefore a=4,\ b\neq-8$$

따라서 직선 $4x+y+b=0$의 x절편은 $-\frac{b}{4}$, y절편은 $-b$이고 이 직선이 색칠한 부분의 넓이를 이등분하므로

$$\frac{1}{2}\cdot\left|-\frac{b}{4}\right|\cdot|-b|=\frac{1}{2}\cdot8$$

$$\frac{b^2}{8}=4 \qquad \therefore b^2=32$$

$$\therefore a^2+b^2=4^2+32=48$$

답 ①

1206 $\angle OAB=\angle OCA$에서

$$\angle BAC=\angle OAB+\angle OAC=\angle OCA+\angle OAC=90^\circ$$

△AOC에서 $\angle AOC=90^\circ$이므로 $\angle OCA+\angle OAC=180^\circ-90^\circ=90^\circ$

이므로 두 직선 l, m은 서로 수직이다.

이때 직선 l의 기울기는

$$\frac{0-4}{6-0}=-\frac{2}{3}$$

이므로 직선 m의 기울기는 $\frac{3}{2}$이다.

따라서 직선 m은 기울기가 $\frac{3}{2}$이고 점 A$(6, 0)$을 지나므로 그 방정식은

$$y=\frac{3}{2}(x-6) \qquad \therefore y=\frac{3}{2}x-9$$

답 $y=\frac{3}{2}x-9$

1207 직선 $x+2y-2=0$, 즉 $y=-\frac{1}{2}x+1$의 기울기가 $-\frac{1}{2}$이므로 직선 AH의 기울기는 2이다. ··· ❶

따라서 직선 AH의 방정식은

$$y-\frac{5}{2}=2(x-2) \qquad \therefore 4x-2y-3=0 \quad \cdots ❷$$

$x+2y-2=0$, $4x-2y-3=0$을 연립하여 풀면

수선의 발 H는 직선 AH와 직선 $x+2y-2=0$의 교점이다.

$$x=1,\ y=\frac{1}{2}$$

즉 점 H의 좌표는 $\left(1, \frac{1}{2}\right)$이다. ··· ❸

답 $\left(1, \frac{1}{2}\right)$

채점 기준	비율
❶ 직선 AH의 기울기를 구할 수 있다.	30 %
❷ 직선 AH의 방정식을 구할 수 있다.	30 %
❸ 점 H의 좌표를 구할 수 있다.	40 %

다른 풀이 H(a, b)라 하면 점 H는 직선 $x+2y-2=0$ 위의 점이므로

$$a+2b-2=0 \quad \cdots\cdots ㉠$$

직선 $x+2y-2=0$, 즉 $y=-\frac{1}{2}x+1$의 기울기가 $-\frac{1}{2}$이므로 직선 AH의 기울기는 2이다.

즉 $\dfrac{b-\frac{5}{2}}{a-2}=2$이므로 $\quad 2a-4=b-\frac{5}{2} \quad \cdots\cdots ㉡$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\quad a=1,\ b=\frac{1}{2}$

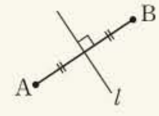
유형 13 수직이등분선의 방정식

본책 175쪽

$\overline{AB}$의 수직이등분선을 l이라 하면

① 직선 l은 $\overline{AB}$의 중점을 지난다.

② 직선 l과 직선 AB의 기울기의 곱은 -1이다.



1208 $\overline{AB}$의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{-4+2}{2}, \frac{3-1}{2}\right), \text{즉 } (-1, 1)$$

직선 AB의 기울기는 $\quad \dfrac{-1-3}{2-(-4)}=-\dfrac{2}{3}$

따라서 $\overline{AB}$의 수직이등분선은 기울기가 $\frac{3}{2}$이고 점 $(-1, 1)$을 지나므로 그 방정식은

$$y-1=\frac{3}{2}(x+1) \qquad \therefore 3x-2y+5=0$$

즉 $a=3$, $b=-2$이므로 $\quad a+b=1$ 답 1

1209 직선 $x-2y+4=0$의 x절편은 -4, y절편은 2이므로

$A(-4, 0)$, $B(0, 2)$ ⋯ ❶

$\overline{AB}$의 중점의 좌표는

$\left(\frac{-4+0}{2}, \frac{0+2}{2}\right)$, 즉 $(-2, 1)$ ⋯ ❷

또 직선 $x-2y+4=0$, 즉 $y=\frac{1}{2}x+2$의 기울기는 $\frac{1}{2}$이므로

$\overline{AB}$의 수직이등분선의 기울기는 -2이다. ⋯ ❸

따라서 구하는 직선의 방정식은

$y-1=-2(x+2) \qquad \therefore 2x+y+3=0$ ⋯ ❹

답 $2x+y+3=0$

채점 기준	비율
❶ 두 점 A, B의 좌표를 구할 수 있다.	30 %
❷ $\overline{AB}$의 중점의 좌표를 구할 수 있다.	20 %
❸ $\overline{AB}$의 수직이등분선의 기울기를 구할 수 있다.	20 %
❹ $\overline{AB}$의 수직이등분선의 방정식을 구할 수 있다.	30 %

1210 $\overline{AB}$의 중점의 좌표는

$\left(\frac{1+5}{2}, \frac{a+b}{2}\right)$, 즉 $\left(3, \frac{a+b}{2}\right)$

직선 $x-3y=0$이 이 점을 지나므로

$3-3\cdot\frac{a+b}{2}=0 \qquad \therefore a+b=2$ ⋯⋯ ㉠

또 직선 $x-3y=0$, 즉 $y=\frac{1}{3}x$의 기울기가 $\frac{1}{3}$이므로 직선 AB의 기울기는 -3이다.

즉 $\frac{b-a}{5-1}=-3$이므로 $\quad a-b=12$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\quad a=7$, $b=-5$

$\therefore ab=-35$ 답 ①

1211 $\overline{AB}$의 중점의 좌표는 $\left(\frac{6-1}{2}, \frac{1+2}{2}\right)$, 즉 $\left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right)$

직선 AB의 기울기는 $\quad \frac{2-1}{-1-6}=-\frac{1}{7}$

따라서 $\overline{AB}$의 수직이등분선은 기울기가 7이고 점 $\left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right)$을 지나므로 그 방정식은

$y-\frac{3}{2}=7\left(x-\frac{5}{2}\right) \qquad \therefore 7x-y-16=0$ ⋯⋯ ㉠

$\overline{AC}$의 중점의 좌표는 $\quad \left(\frac{6+2}{2}, \frac{1+3}{2}\right)$, 즉 $(4, 2)$

직선 AC의 기울기는 $\quad \frac{3-1}{2-6}=-\frac{1}{2}$

따라서 $\overline{AC}$의 수직이등분선은 기울기가 2이고 점 $(4, 2)$를 지나므로 그 방정식은

$y-2=2(x-4) \qquad \therefore 2x-y-6=0$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\quad x=2$, $y=-2$

따라서 $D(2, -2)$이므로 $\quad a=2$, $b=-2$

$\therefore a+b=0$ 답 0

참고 삼각형의 세 변의 수직이등분선은 한 점(외심)에서 만나므로 두 변의 수직이등분선의 교점을 구하면 된다.

1212 $\overline{AC}=13$이므로 $\quad \sqrt{(n-1)^2+(-5)^2}=13$

양변을 제곱하면 $\quad n^2-2n+1+25=169$

$n^2-2n-143=0, \qquad (n+11)(n-13)=0$

$\therefore n=13\ (\because n>0) \qquad \therefore C(13, 0)$

□ABCD가 마름모이므로 직선 l은 대각선 AC의 수직이등분선이다.

└ 두 대각선이 서로를 수직이등분한다.

$\overline{AC}$의 중점의 좌표는 $\quad \left(\frac{1+13}{2}, \frac{5}{2}\right)$, 즉 $\left(7, \frac{5}{2}\right)$

직선 AC의 기울기는 $\quad \frac{0-5}{13-1}=-\frac{5}{12}$

따라서 직선 l은 기울기가 $\frac{12}{5}$이고 점 $\left(7, \frac{5}{2}\right)$를 지나므로 그 방정식은 $\quad y-\frac{5}{2}=\frac{12}{5}(x-7) \qquad \therefore 24x-10y-143=0$

즉 $a=-10$, $b=-143$이므로 $\quad a-b=133$ 답 133

유형 14 점과 직선 사이의 거리 본책 176쪽

점 (x_1, y_1)과 직선 $ax+by+c=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

1213 직선 l의 기울기를 m이라 하면 직선 l의 방정식은

$y=m(x+1) \qquad \therefore mx-y+m=0$

점 $(0, 2)$와 직선 l 사이의 거리가 $\sqrt{5}$이므로

$\frac{|-2+m|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\sqrt{5}, \qquad |m-2|=\sqrt{5(m^2+1)}$

양변을 제곱하여 정리하면 $\quad 4m^2+4m+1=0$

$(2m+1)^2=0 \qquad \therefore m=-\frac{1}{2}$

따라서 직선 l의 기울기는 $-\frac{1}{2}$이다. 답 ①

1214 $\frac{|3\cdot(-5)+a+1|}{\sqrt{3^2+a^2}}=2$이므로

$|a-14|=2\sqrt{9+a^2}$

양변을 제곱하여 정리하면 $\quad 3a^2+28a-160=0$

$(3a+40)(a-4)=0 \qquad \therefore a=4\ (\because a$는 정수$)$ 답 ⑤

1215 △ABC의 무게중심 G의 좌표는

$\left(\frac{0+3+6}{3}, \frac{0+6+2}{3}\right)$, 즉 $\left(3, \frac{8}{3}\right)$

직선 BC의 방정식은

$y-6=\frac{2-6}{6-3}(x-3) \qquad \therefore 4x+3y-30=0$

따라서 점 $G\left(3, \frac{8}{3}\right)$과 직선 $4x+3y-30=0$ 사이의 거리는

$\frac{\left|4\cdot3+3\cdot\frac{8}{3}-30\right|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\frac{10}{5}=2$ 답 2

1216 직선 $x+7y-1=0$, 즉 $y=-\frac{1}{7}x+\frac{1}{7}$에 수직인 직선의 기울기는 7이므로 구하는 직선의 방정식을 $y=7x+a$, 즉 $7x-y+a=0$ (a는 상수)으로 놓을 수 있다.
원점과 이 직선 사이의 거리가 $\sqrt{2}$이므로

$$\frac{|a|}{\sqrt{7^2+(-1)^2}}=\sqrt{2}, \qquad |a|=\sqrt{100}=10$$

$$\therefore a=\pm 10$$

따라서 제2사분면을 지나지 않는 직선의 방정식은 $y=7x-10$이다.
└ y절편이 음수이어야 한다.

답 $y=7x-10$

1217 두 점 $(3,\ 4)$, $(-2,\ -1)$을 지나는 직선의 방정식은

$$y-4=\frac{-1-4}{-2-3}(x-3) \qquad \therefore x-y+1=0$$

직선 $x-y+1=0$ 위를 움직이는 점 P에 대하여 $\overline{\mathrm{OP}}$의 길이의 최솟값은 점 $\mathrm{O}(0,\ 0)$과 직선 $x-y+1=0$ 사이의 거리와 같으므로

$$\frac{|1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

답 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

1218 점 $(0,\ k)$에서 두 직선 $x+2y-5=0$, $2x-y-2=0$에 이르는 거리가 같으므로

$$\frac{|2k-5|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{|-k-2|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}, \qquad |2k-5|=|k+2|$$

$2k-5=-(k+2)$ 또는 $2k-5=k+2$

$\therefore k=1$ 또는 $k=7$

따라서 모든 k의 값의 합은 $\quad 1+7=8$

답 ⑤

1219 $(2k-1)x+(k-1)y+(5k-1)=0$에서

$$(2x+y+5)k-(x+y+1)=0$$

이 식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하려면

$$2x+y+5=0,\ x+y+1=0$$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $\quad x=-4,\ y=3$

$\therefore \mathrm{A}(-4,\ 3)$

직선 $ax-y+b=0$이 점 A를 지나므로

$$-4a-3+b=0 \qquad \therefore b=4a+3$$

즉 직선 $ax-y+4a+3=0$과 원점 사이의 거리가 $\sqrt{5}$이므로

$$\frac{|4a+3|}{\sqrt{a^2+(-1)^2}}=\sqrt{5}, \qquad |4a+3|=\sqrt{5(a^2+1)}$$

양변을 제곱하여 정리하면 $\quad 11a^2+24a+4=0$

$$(a+2)(11a+2)=0 \qquad \therefore a=-2\ (\because a\text{는 정수})$$

따라서 $b=4\cdot(-2)+3=-5$이므로

$$a+b=-7$$

답 -7

유형 15 점과 직선 사이의 거리의 최댓값 본책 176쪽

점 P와 직선 사이의 거리를 $f(k)$라 할 때,

$$f(k)=\frac{|a|}{g(k)}\ (a\text{는 상수})$$

이면 $g(k)$가 최소일 때 $f(k)$는 최댓값을 갖는다.

1220 $x+3y-4+k(x-y)=0$에서

$$(k+1)x+(3-k)y-4=0$$

이므로

$$f(k)=\frac{|-4|}{\sqrt{(k+1)^2+(3-k)^2}}=\frac{4}{\sqrt{2k^2-4k+10}}$$

$f(k)$는 $\sqrt{2k^2-4k+10}$의 값이 최소일 때 최대이고
└ 분수는 분모의 값이 작을수록 크다.

$$\sqrt{2k^2-4k+10}=\sqrt{2(k-1)^2+8}$$

이므로 $f(k)$의 최댓값은

$$f(1)=\frac{4}{\sqrt{8}}=\sqrt{2}$$

답 $\sqrt{2}$

다른 풀이 $x+3y-4=0$, $x-y=0$을 연립하여 풀면

$$x=1,\ y=1$$

이므로 직선 $x+3y-4+k(x-y)=0$은 k의 값에 관계없이 항상 점 $(1,\ 1)$을 지난다.
따라서 주어진 직선과 원점 사이의 거리의 최댓값은 점 $(1,\ 1)$과 원점 사이의 거리와 같으므로

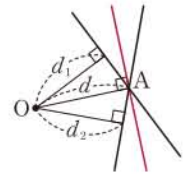
$$\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$$

SSEN 특강 점과 직선 사이의 거리의 최댓값

오른쪽 그림에서

$d_1<d,\ d_2<d$

이므로 점 O와 점 A를 지나는 임의의 직선 사이의 거리의 최댓값은 점 O로부터 $\overline{\mathrm{OA}}$와 수직인 직선에 이르는 거리 d, 즉 두 점 O, A 사이의 거리와 같다.



1221 점 $(2,\ 3)$과 직선 $kx+2y-2k+4=0$ 사이의 거리를 $f(k)$라 하면

$$f(k)=\frac{|2k+6-2k+4|}{\sqrt{k^2+2^2}}=\frac{10}{\sqrt{k^2+4}}$$

$f(k)$는 $\sqrt{k^2+4}$의 값이 최소일 때, 즉 $k=0$일 때 최대이므로 최댓값은

$$f(0)=\frac{10}{\sqrt{4}}=5$$

따라서 $a=0,\ b=5$이므로 $\quad a+b=5$

답 5

1222 주어진 두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식을

$$x+y-2+k(2x-y-4)=0\ (k\text{는 실수})$$

으로 놓으면

$$(1+2k)x+(1-k)y-2-4k=0$$

점 $(1,\ -2)$와 이 직선 사이의 거리를 $f(k)$라 하면

$$f(k)=\frac{|1+2k-2+2k-2-4k|}{\sqrt{(1+2k)^2+(1-k)^2}}=\frac{3}{\sqrt{5k^2+2k+2}}$$

$f(k)$는 $\sqrt{5k^2+2k+2}$의 값이 최소일 때 최대이고

$$\sqrt{5k^2+2k+2}=\sqrt{5\left(k+\frac{1}{5}\right)^2+\frac{9}{5}}$$

이므로 $f(k)$의 최댓값은

$$f\left(-\frac{1}{5}\right)=\frac{3}{\sqrt{\frac{9}{5}}}=\sqrt{5}$$

답 $\sqrt{5}$

유형 16 삼각형의 넓이 본책 177쪽

세 점 A, B, C를 꼭짓점으로 하는 △ABC의 넓이는 다음과 같은 순서로 구한다.

(i) $\overline{AB}$의 길이를 구한다.

(ii) 직선 AB의 방정식을 구한 후 점 C와 직선 AB 사이의 거리 h를 구한다.

(iii) $\triangle ABC=\frac{1}{2}\cdot\overline{AB}\cdot h$

1223 $\overline{AB}=\sqrt{(-2-2)^2+(-1-7)^2}=4\sqrt{5}$

직선 AB의 방정식은

$$y-7=\frac{-1-7}{-2-2}(x-2) \qquad \therefore 2x-y+3=0$$

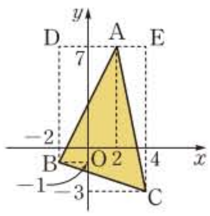
점 C$(4, -3)$과 직선 AB 사이의 거리는

$$\frac{|8+3+3|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{14}{\sqrt{5}}=\frac{14\sqrt{5}}{5}$$

$$\therefore \triangle ABC=\frac{1}{2}\cdot 4\sqrt{5}\cdot\frac{14\sqrt{5}}{5}=28$$

답 ③

다른 풀이 오른쪽 그림에서



$\triangle ABC$

$=\square DBCE-(\triangle ACE+\triangle ADB)$

$=\frac{1}{2}\cdot(8+10)\cdot 6-\left(\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 10+\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 8\right)$

$=54-26$

$=28$

1224 (1) 직선 AC의 방정식은

$$y-3=\frac{1-3}{-1-2}(x-2) \qquad \therefore 2x-3y+5=0 \quad \cdots ❶$$

따라서 점 B$(1, 4)$와 대각선 AC 사이의 거리는

$$\frac{|2-12+5|}{\sqrt{2^2+(-3)^2}}=\frac{5}{\sqrt{13}}=\frac{5\sqrt{13}}{13} \quad \cdots ❷$$

(2) $\overline{AC}=\sqrt{(-1-2)^2+(1-3)^2}=\sqrt{13}$이므로

$$\triangle ABC=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{13}\cdot\frac{5\sqrt{13}}{13}=\frac{5}{2}$$

$$\therefore \square OABC=\underbrace{2\triangle ABC}_{\triangle ABC\equiv\triangle COA}=5 \quad \cdots ❸$$

답 (1) $\frac{5\sqrt{13}}{13}$ (2) 5

채점 기준	비율
❶ 직선 AC의 방정식을 구할 수 있다.	30 %
❷ 점 B와 대각선 AC 사이의 거리를 구할 수 있다.	30 %
❸ 평행사변형 OABC의 넓이를 구할 수 있다.	40 %

1225 $\overline{AB}=\sqrt{(0-2)^2+(-2-5)^2}=\sqrt{53}$

직선 AB의 방정식은

$$y-5=\frac{-2-5}{0-2}(x-2) \qquad \therefore 7x-2y-4=0$$

점 C$(a, 0)$과 직선 AB 사이의 거리는

$$\frac{|7a-4|}{\sqrt{7^2+(-2)^2}}=\frac{|7a-4|}{\sqrt{53}}$$

△ABC의 넓이가 12이므로

$$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{53}\cdot\frac{|7a-4|}{\sqrt{53}}=12, \qquad |7a-4|=24$$

$7a-4=-24$ 또는 $7a-4=24$

$\therefore a=4$ ($\because$ a는 정수)

답 ⑤

1226 $\begin{cases} x-y+1=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ x+7y+9=0 & \cdots\cdots ㉡ \\ 3x+y-13=0 & \cdots\cdots ㉢ \end{cases}$

직선 ㉠, ㉡의 교점의 좌표는

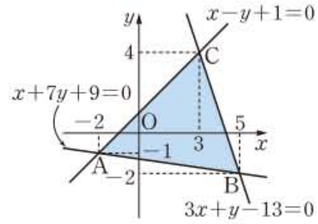
$(-2, -1)$

직선 ㉡, ㉢의 교점의 좌표는

$(5, -2)$

직선 ㉠, ㉢의 교점의 좌표는

$(3, 4)$



A$(-2, -1)$, B$(5, -2)$, C$(3, 4)$라 하면

$\overline{AC}=\sqrt{(3+2)^2+(4+1)^2}=5\sqrt{2}$

점 B$(5, -2)$와 직선 $x-y+1=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|5+2+1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{8}{\sqrt{2}}=4\sqrt{2}$$

$$\therefore \triangle ABC=\frac{1}{2}\cdot 5\sqrt{2}\cdot 4\sqrt{2}=20$$

답 20

유형 17 평행한 두 직선 사이의 거리 본책 177쪽

평행한 두 직선 l_1, l_2 사이의 거리는 다음과 같은 순서로 구한다.

(i) 직선 l_1 위의 한 점의 좌표 (x_1, y_1)을 구한다.

(ii) 점 (x_1, y_1)과 직선 l_2 사이의 거리를 구한다.

1227 두 직선이 평행하므로 직선 $3x+y=8$ 위의 한 점 $(0, 8)$과 직선 $3x+y=k$, 즉 $3x+y-k=0$ 사이의 거리가 $\sqrt{10}$이다.

즉 $\frac{|8-k|}{\sqrt{3^2+1^2}}=\sqrt{10}$이므로 $\qquad |8-k|=10$

$8-k=-10$ 또는 $8-k=10$

$\therefore k=18$ ($\because k>0$)

답 18

1228 두 직선 l, l'이 평행하므로 $\overline{AB}$의 길이의 최솟값은 평행한 두 직선 사이의 거리와 같다.

이때 직선 $l: 2x-y+6=0$ 위의 한 점 $(0, 6)$과 직선 $l': 2x-y-9=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|-6-9|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{15}{\sqrt{5}}=3\sqrt{5}$$

따라서 $\overline{AB}$의 길이의 최솟값은 $3\sqrt{5}$이다.

답 $3\sqrt{5}$

1229 두 직선이 평행하므로

$$\frac{m}{1}=\frac{-2}{1-m}\neq\frac{m+3}{2-m}$$

$\frac{m}{1}=\frac{-2}{1-m}$에서 $\qquad m(m-1)=2$

$m^2-m-2=0, \qquad (m+1)(m-2)=0$

$\therefore m=-1$ ($\because m<0$)

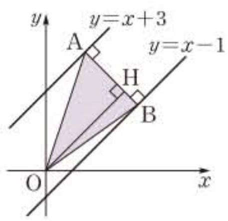
따라서 두 직선의 방정식은 $x+2y-2=0$, $x+2y+3=0$이므로 직선 $x+2y-2=0$ 위의 한 점 $(0, 1)$과 직선 $x+2y+3=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|2+3|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$$

답 $\sqrt{5}$

1230 직선 $y=x+3$ 위의 한 점 $(0, 3)$과 직선 $y=x-1$, 즉 $x-y-1=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|-3-1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{4}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2} \qquad \therefore \overline{AB}=2\sqrt{2}$$ ⋯ ❶



오른쪽 그림과 같이 점 O에서 $\overline{AB}$에 내린 수선의 발을 H라 하면 △AOB의 넓이가 6이므로

$$\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{2}\cdot\overline{OH}=6$$

$$\therefore \overline{OH}=3\sqrt{2}$$ ⋯ ❷

이때 직선 AB는 직선 $y=x+3$과 수직이므로 그 방정식을 $y=-x+k$, 즉 $x+y-k=0$ (k는 상수)으로 놓을 수 있다.

이 직선과 원점 사이의 거리가 $3\sqrt{2}$이므로

$$\frac{|-k|}{\sqrt{1^2+1^2}}=3\sqrt{2}, \qquad |-k|=6 \qquad \therefore k=\pm 6$$

그런데 두 점 A, B가 제1사분면 위의 점이므로 직선 AB의 y절편은 양수이다.

$$\therefore k=6$$

따라서 직선 AB의 방정식은 $y=-x+6$ ⋯ ❸

답 $y=-x+6$

채점 기준	비율
❶ $\overline{AB}$의 길이를 구할 수 있다.	30 %
❷ $\overline{OH}$의 길이를 구할 수 있다.	30 %
❸ 직선 AB의 방정식을 구할 수 있다.	40 %

유형 18 자취의 방정식; 점과 직선 사이의 거리

본책 178쪽

점 P의 좌표를 (x, y)로 놓고 점 P와 주어진 직선 사이의 거리를 구하는 공식을 이용하여 점 P의 자취의 방정식을 구한다.

1231 $P(x, y)$라 하면 점 P는 주어진 두 직선으로부터 같은 거리에 있으므로

$$\frac{|x+2y-1|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{|2x+y+1|}{\sqrt{2^2+1^2}}$$

$$|x+2y-1|=|2x+y+1|$$

$$x+2y-1=\pm(2x+y+1)$$

$$\therefore x-y+2=0 \text{ 또는 } x+y=0$$

따라서 원점을 지나는 점 P의 자취의 방정식은

$$x+y=0$$

답 ④

1232 두 직선이 이루는 각의 이등분선 위의 점을 $P(x, y)$라 하면 점 P에서 두 직선에 이르는 거리가 같으므로

$$\frac{|3x-4y+9|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{|4x+3y+12|}{\sqrt{4^2+3^2}}$$

$$|3x-4y+9|=|4x+3y+12|$$

$$3x-4y+9=\pm(4x+3y+12)$$

$$\therefore x+7y+3=0 \text{ 또는 } 7x-y+21=0$$

따라서 주어진 두 직선이 이루는 각을 이등분하는 직선의 방정식은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ②

1233 $P(x, y)$라 하면 $\overline{PR}=2\overline{PS}$이므로

$$\frac{|2x-y-1|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=2\cdot\frac{|x+2y-1|}{\sqrt{1^2+2^2}}$$

$$|2x-y-1|=2|x+2y-1|$$

$$2x-y-1=\pm 2(x+2y-1)$$

$$\therefore y=\frac{1}{5} \text{ 또는 } 4x+3y-3=0$$

답 $y=\frac{1}{5}$ 또는 $4x+3y-3=0$

1234 $\overline{AB}=\sqrt{(5-2)^2+(3+1)^2}=5$

△ABP에서 $\overline{AB}$를 밑변으로 하고 높이를 h라 하면 △ABP의 넓이가 20이므로

$$\frac{1}{2}\cdot 5\cdot h=20 \qquad \therefore h=8$$

즉 점 P와 직선 AB 사이의 거리가 8이므로 점 P의 자취는 직선 AB와 평행하고 직선 AB와의 거리가 8인 직선이다.

이때 직선 AB의 기울기는

$$\frac{3-(-1)}{5-2}=\frac{4}{3}$$

이므로 점 P의 자취의 방정식을 $4x-3y+k=0$ $(k\neq -11)$이라 하면 이 직선과 점 A 사이의 거리가 8이다. 즉

└ 직선 AB의 방정식이 $4x-3y-11=0$이므로 $k\neq-11$

$$\frac{|8+3+k|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=8, \qquad |k+11|=40$$

$$k+11=-40 \text{ 또는 } k+11=40$$

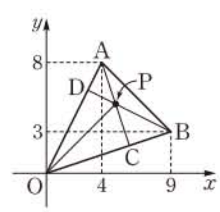
$$\therefore k=-51 \text{ 또는 } k=29$$

따라서 점 P의 자취의 방정식은

$$4x-3y-51=0 \text{ 또는 } 4x-3y+29=0$$

답 $4x-3y-51=0$ 또는 $4x-3y+29=0$

1235 전략 두 삼각형의 높이가 같으면 삼각형의 넓이의 비는 밑변의 길이의 비와 같음을 이용한다.



풀이 오른쪽 그림과 같이 직선 AP가 $\overline{OB}$와 만나는 점을 C라 하면

△PAO : △PBA $=2:1$이므로

$$\overline{OC}:\overline{BC}=\triangle POC:\triangle PBC =2:1$$

즉 점 C는 $\overline{OB}$를 $2:1$로 내분하는 점이므로

$$C\left(\frac{2\cdot 9+1\cdot 0}{2+1}, \frac{2\cdot 3+1\cdot 0}{2+1}\right), \text{ 즉 } C(6, 2)$$ ⋯ ❶

또 직선 BP가 $\overline{OA}$와 만나는 점을 D라 하면

△POB : △PBA $=3:1$이므로

$$\overline{OD}:\overline{AD}=\triangle POD:\triangle PAD=3:1$$

즉 점 D는 $\overline{OA}$를 $3:1$로 내분하는 점이므로

$$D\left(\frac{3\cdot 4+1\cdot 0}{3+1}, \frac{3\cdot 8+1\cdot 0}{3+1}\right), \text{ 즉 } D(3, 6)$$ ⋯ ❷

직선 AC의 방정식은 $\quad y-8=\frac{2-8}{6-4}(x-4)$

$\therefore 3x+y-20=0 \quad \cdots\cdots ㉠$

직선 BD의 방정식은 $\quad y-3=\frac{6-3}{3-9}(x-9)$

$\therefore x+2y-15=0 \quad \cdots\cdots ㉡$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\quad x=5,\ y=5$

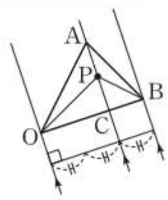
$\therefore$ P(5, 5) ⋯ ❸

답 (5, 5)

채점 기준	비율
❶ 점 C의 좌표를 구할 수 있다.	30 %
❷ 점 D의 좌표를 구할 수 있다.	30 %
❸ 점 P의 좌표를 구할 수 있다.	40 %

참고 $\triangle$PAO와 $\triangle$PBA의 밑변을 $\overline{\text{PA}}$라 하면 두 삼각형의 높이의 비는 넓이의 비와 같으므로 2 : 1이다. 따라서 $\triangle$POC와 $\triangle$PBC의 밑변을 $\overline{\text{PC}}$라 하면 두 삼각형의 높이의 비는 2 : 1이므로

$\triangle$POC : $\triangle$PBC=2 : 1



1236 전략 점 A를 지나고 $\triangle$ABC의 넓이를 이등분하는 직선은 $\overline{\text{BC}}$의 중점을 지나야 함을 이용한다.

풀이 점 C의 좌표를 $(a,\ 0)$ $(a\neq1)$이라 하면 점 B(4, 4)가 이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 꼭짓점이므로

$\frac{1+a}{2}=4 \quad \therefore a=7 \quad \therefore$ C(7, 0)

점 A를 지나는 직선이 $\triangle$ABC의 넓이를 이등분하려면 $\overline{\text{BC}}$의 중점을 지나야 한다.

$\overline{\text{BC}}$의 중점의 좌표는

$\left(\frac{4+7}{2},\ \frac{4+0}{2}\right)$, 즉 $\left(\frac{11}{2},\ 2\right)$

따라서 두 점 (1, 0), $\left(\frac{11}{2},\ 2\right)$를 지나는 직선의 기울기는

$\frac{2-0}{\frac{11}{2}-1}=\frac{4}{9}$

즉 $p=9,\ q=4$이므로 $\quad p+q=13$

답 13

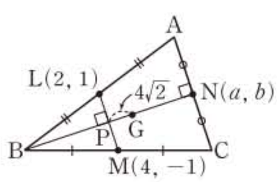
1237 전략 삼각형의 무게중심의 성질을 이용하여 $\overline{\text{BN}}$, $\overline{\text{LM}}$의 교점과 점 N 사이의 거리를 구하고, $\overline{\text{BN}}\perp\overline{\text{LM}}$임을 이용하여 $a,\ b$에 대한 식을 세운다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 두 직선 BN, LM의 교점을 P라 하면 $\overline{\text{BN}}\perp\overline{\text{LM}}$이므로

$\overline{\text{AC}}\perp\overline{\text{BN}}$

이때 $\overline{\text{AN}}=\overline{\text{CN}}$이므로

$\overline{\text{LP}}=\overline{\text{MP}}$



즉 점 P가 $\overline{\text{LM}}$의 중점이므로 점 P의 좌표는

$\left(\frac{2+4}{2},\ \frac{1-1}{2}\right)$, 즉 (3, 0)

또 $\triangle$ABC에서

$\overline{\text{BG}}:\overline{\text{GN}}=2:1,\ \overline{\text{BP}}=\overline{\text{NP}}$

이므로 $\quad (\overline{\text{NP}}+4\sqrt{2}):(\overline{\text{NP}}-4\sqrt{2})=2:1$

$\therefore \overline{\text{NP}}=12\sqrt{2}$

즉 $\sqrt{(a-3)^2+b^2}=12\sqrt{2}$이므로

$(a-3)^2+b^2=288 \quad \cdots\cdots ㉠$

한편 $\overline{\text{LM}}\perp\overline{\text{NP}}$이므로

$\frac{-1-1}{4-2}\cdot\frac{b}{a-3}=-1, \quad \frac{b}{a-3}=1$

$\therefore a-3=b \quad \cdots\cdots ㉡$

㉡을 ㉠에 대입하여 정리하면

$2b^2=288, \quad b^2=144 \quad \therefore b=\pm12$

그런데 무게중심 G가 제1사분면에 있으므로 $\quad b=12$

따라서 $a=12+3=15$이므로

$ab=180$

답 ⑤

1238 전략 두 직선이 서로 평행할 때와 수직일 때의 조건을 생각한다.

풀이 ㄱ. $a=0$일 때,

l: $-y+2=0$, 즉 $y=2$

m: $4x+8=0$, 즉 $x=-2$

따라서 두 직선 l과 m은 각각 x축, y축에 평행하므로 두 직선 l과 m은 서로 수직이다.

ㄴ. $ax-y+a+2=0$에서

$(x+1)a-(y-2)=0$

이므로 직선 l은 a의 값에 관계없이 항상 점 $(-1,\ 2)$를 지난다.

ㄷ. (i) $a=0$일 때, 두 직선 $l,\ m$은 서로 수직이다.

(ii) $a\neq0$일 때, 두 직선이 서로 평행하려면

$\frac{a}{4}=\frac{-1}{a}\neq\frac{a+2}{3a+8} \quad \therefore a^2=-4$

이를 만족시키는 실수 a의 값은 존재하지 않는다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

1239 전략 세 직선이 좌표평면을 6개의 영역으로 나누는 경우를 그려서 생각한다.

풀이 주어진 세 직선이 좌표평면을 6개의 영역으로 나누는 경우는 다음과 같다.

(i) 직선 $x+ay=4$가 직선 $x-y=1$ 또는 $x+y=3$과 평행할 때,

$a=-1$ 또는 $a=1$

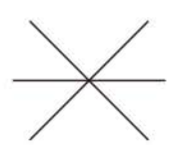
(ii) 직선 $x+ay=4$가 두 직선 $x-y=1$, $x+y=3$의 교점을 지날 때,

$x-y=1,\ x+y=3$을 연립하여 풀면

$x=2,\ y=1$

따라서 직선 $x+ay=4$가 점 (2, 1)을 지나려면

$2+a=4 \quad \therefore a=2$



(i), (ii)에서 모든 상수 a의 값의 곱은

$(-1)\cdot1\cdot2=-2$

답 ①

1240 전략 직선 AP의 기울기를 이용하여 직선 l의 기울기를 구한 후 직선의 방정식을 구한다.

풀이 직선 AP의 기울기는

$$\frac{0-1}{t-0}=-\frac{1}{t}$$

따라서 직선 l의 기울기는 t이므로 직선 l의 방정식은

$y=t(x-t)$ …… ㉠

ㄱ. $t=1$일 때, 직선 l의 기울기는 1이다.

ㄴ. $x=3$, $y=2$를 ㉠에 대입하면

$2=t(3-t)$, $t^2-3t+2=0$

$(t-1)(t-2)=0$

$\therefore t=1$ 또는 $t=2$

따라서 점 $(3, 2)$를 지나는 직선 l은 $y=x-1$, $y=2x-4$의 2개이다.

ㄷ. ㉠을 $y\le ax^2$에 대입하면 $t(x-t)\le ax^2$

$\therefore ax^2-tx+t^2\ge 0$

이 부등식이 모든 실수 x에 대하여 성립하려면

$a>0$ …… ㉡

또 이차방정식 $ax^2-tx+t^2=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(-t)^2-4at^2\le 0$, $t^2(1-4a)\le 0$

$1-4a\le 0$ ($\because t^2>0$)

$\therefore a\ge\frac{1}{4}$ …… ㉢

㉡, ㉢에서 $a\ge\frac{1}{4}$이므로 실수 a의 최솟값은 $\frac{1}{4}$이다.

이상에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

답 ⑤

1241 전략 직사각형의 두 대각선의 교점을 지나는 직선은 직사각형의 넓이를 이등분함을 이용한다.

풀이 직사각형 ABCD의 두 대각선의 교점의 좌표는

$\left(\frac{1+5}{2}, \frac{3+6}{2}\right)$, 즉 $\left(3, \frac{9}{2}\right)$

($\overline{AC}$의 중점)$=$($\overline{BD}$의 중점)

직선 $y=mx$가 직사각형 ABCD의 넓이를 이등분하려면 점 $\left(3, \frac{9}{2}\right)$를 지나야 하므로

$\frac{9}{2}=3m$ $\therefore m=\frac{3}{2}$ ··· ❶

따라서 직선 $y=ax+b$는 기울기가 $-\frac{2}{3}$이므로

$a=-\frac{2}{3}$

즉 직선 $y=-\frac{2}{3}x+b$가 점 $\left(3, \frac{9}{2}\right)$를 지나므로

$\frac{9}{2}=-\frac{2}{3}\cdot 3+b$ $\therefore b=\frac{13}{2}$ ··· ❷

$\therefore a+b+m=\frac{22}{3}$ ··· ❸

답 $\frac{22}{3}$

채점 기준	비율
❶ m의 값을 구할 수 있다.	30 %
❷ a, b의 값을 구할 수 있다.	50 %
❸ $a+b+m$의 값을 구할 수 있다.	20 %

1242 전략 □OACB가 정사각형임을 알고 정사각형의 두 대각선은 서로를 이등분함을 이용한다.

풀이 직선 OA의 기울기는 $\frac{3}{4}$이므로 직선 OB의 기울기는 $-\frac{4}{3}$이다.

따라서 직선 OB의 방정식은 $y=-\frac{4}{3}x$

점 B가 이 직선 위에 있으므로 $b=-\frac{4}{3}a$ …… ㉠

$\overline{OB}^2=\overline{OA}^2$이므로 $a^2+\left(-\frac{4}{3}a\right)^2=4^2+3^2$

$a^2=9$ $\therefore a=\pm 3$

이때 점 B가 제2사분면 위에 있으므로 $a=-3$

이것을 ㉠에 대입하면 $b=4$ ··· ❶

한편 □OACB는 정사각형이므로 두 대각선의 중점이 일치한다.

$\overline{AB}$의 중점의 좌표는 $\left(\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right)$이고 $\overline{OC}$의 중점의 좌표는 $\left(\frac{c}{2}, \frac{d}{2}\right)$이므로

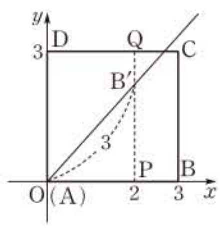
$\frac{1}{2}=\frac{c}{2}$, $\frac{7}{2}=\frac{d}{2}$ $\therefore c=1$, $d=7$ ··· ❷

$\therefore ab+cd=-5$ ··· ❸

답 -5

채점 기준	비율
❶ a, b의 값을 구할 수 있다.	40 %
❷ c, d의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $ab+cd$의 값을 구할 수 있다.	20 %

1243 전략 정사각형 모양의 종이를 좌표평면 위에 나타낸 후 $\overline{AB'}=\overline{AB}$임을 이용하여 직선 AB′의 방정식을 구한다.



풀이 오른쪽 그림과 같이 좌표평면 위에 □ABCD를 점 A가 원점, $\overline{AB}$가 x축, $\overline{AD}$가 y축에 오도록 놓으면

$\overline{AB'}=\overline{AB}=3$이므로 △APB′에서

$\overline{B'P}=\sqrt{3^2-2^2}=\sqrt{5}$

따라서 B′$(2, \sqrt{5})$이므로 직선 AB′의 방정식은

$\overline{AP}:\overline{PB}=2:1$이므로 P$(2, 0)$

$y=\frac{\sqrt{5}}{2}x$ $\therefore \sqrt{5}x-2y=0$

세 점 B$(3, 0)$, C$(3, 3)$, D$(0, 3)$과 직선 $\sqrt{5}x-2y=0$ 사이의 거리를 각각 d_1, d_2, d_3이라 하면

$$d_1=\frac{|3\sqrt{5}|}{\sqrt{(\sqrt{5})^2+(-2)^2}}=\sqrt{5}$$

$$d_2=\frac{|3\sqrt{5}-6|}{\sqrt{(\sqrt{5})^2+(-2)^2}}=\sqrt{5}-2$$

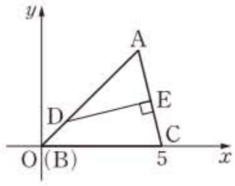
$$d_3=\frac{|-6|}{\sqrt{(\sqrt{5})^2+(-2)^2}}=2$$

$\therefore d_1+d_2+d_3=2\sqrt{5}$

답 $2\sqrt{5}$

1244 전략 삼각형을 좌표평면 위에 놓고 점과 직선 사이의 거리를 구하는 공식을 이용한다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 좌표평면 위에 △ABC를 점 B가 원점, $\overline{BC}$가 x축, 점 A가 제1사분면 위에 오도록 놓고 A$(a,\ b)$라 하면



$\overline{AB}^2=a^2+b^2=32$ ...... ㉠

$\overline{AC}^2=(a-5)^2+b^2=17$

$\therefore\ a^2+b^2-10a=-8$ ...... ㉡

㉠−㉡을 하면 $\quad 10a=40 \qquad \therefore\ a=4$

이것을 ㉠에 대입하면

$16+b^2=32 \qquad \therefore\ b=4\ (\because\ b>0)$

$\therefore$ A$(4,\ 4)$

점 D는 $\overline{AB}$를 $3:1$로 내분하는 점이므로

D$\left(\dfrac{3\cdot0+1\cdot4}{3+1},\ \dfrac{3\cdot0+1\cdot4}{3+1}\right)$, 즉 D$(1,\ 1)$

두 점 A$(4,\ 4)$, C$(5,\ 0)$을 지나는 직선의 방정식은

$y=\dfrac{0-4}{5-4}(x-5)$, 즉 $4x+y-20=0$

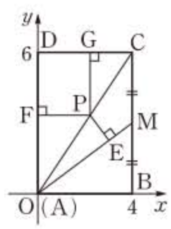
이므로 점 D$(1,\ 1)$과 직선 $4x+y-20=0$ 사이의 거리는

$\overline{DE}=\dfrac{|4+1-20|}{\sqrt{4^2+1^2}}=\dfrac{15}{\sqrt{17}}=\dfrac{15}{17}\sqrt{17}$

따라서 $p=17,\ q=15$이므로 $\qquad p+q=32$ 답 32

1245 전략 직사각형을 좌표평면 위에 놓고 점과 직선 사이의 거리를 구하는 공식을 이용한다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 좌표평면 위에 □ABCD를 점 A가 원점, $\overline{AB}$가 x축, $\overline{AD}$가 y축에 오도록 놓으면



B$(4,\ 0)$, C$(4,\ 6)$, D$(0,\ 6)$, M$(4,\ 3)$

따라서 직선 AC와 직선 AM의 방정식은 각각

$y=\dfrac{3}{2}x,\ y=\dfrac{3}{4}x$

점 P가 직선 AC 위에 있으므로 P$\left(a,\ \dfrac{3}{2}a\right)(a>0)$라 하면 점 P와 직선 $y=\dfrac{3}{4}x$, 즉 $3x-4y=0$ 사이의 거리는

$\overline{PE}=\dfrac{|3a-6a|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\dfrac{3}{5}a\ (\because\ a>0)$

이때 $\overline{PG}=2\overline{PE}$이므로 $\qquad 6-\dfrac{3}{2}a=2\cdot\dfrac{3}{5}a \qquad \therefore\ a=\dfrac{20}{9}$

$\therefore\ \overline{PF}=a=\dfrac{20}{9}$ 답 $\dfrac{20}{9}$

1246 전략 정삼각형의 무게중심의 성질을 이용한다.

풀이 원점을 O라 하면 정삼각형의 외심, 내심, 무게중심이 일치하므로 점 O는 정삼각형 ABC의 외심이다. 외심은 세 변의 수직이등분선의 교점이므로 직선 AO가 $\overline{BC}$와 만나는 점을 D라 하면

$\overline{AD}\perp\overline{BC}$

이때 직선 AD의 기울기가 2이므로 직선 BC의 기울기는 $-\dfrac{1}{2}$이다. ⋯ ❶

직선 AO의 기울기와 같다.

직선 BC의 방정식을

$y=-\dfrac{1}{2}x+k$, 즉 $x+2y-2k=0$ (k는 상수)

으로 놓으면 $\overline{OA}:\overline{OD}=2:1$에서

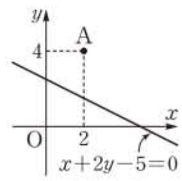
$\overline{OA}=\sqrt{2^2+4^2}=2\sqrt{5},\ \overline{OD}=\dfrac{|-2k|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\dfrac{|2k|}{\sqrt{5}}$

점 O와 직선 BC 사이의 거리

이므로 $\qquad 2\sqrt{5}:\dfrac{|2k|}{\sqrt{5}}=2:1$

$|2k|=5 \qquad \therefore\ k=\pm\dfrac{5}{2}$ ⋯ ❷

그런데 $k=\dfrac{5}{2}$이면 직선 BC의 방정식이 $x+2y-5=0$이므로 오른쪽 그림과 같이 원점이 △ABC의 외부에 존재한다.



따라서 $k=-\dfrac{5}{2}$이므로 구하는 직선의 방정식은

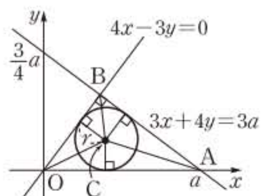
$x+2y+5=0$ ⋯ ❸

답 $x+2y+5=0$

채점 기준	비율
❶ 직선 BC의 기울기를 구할 수 있다.	30 %
❷ 직선 BC의 방정식을 $y=-\frac{1}{2}x+k$ (k는 상수)로 놓고 k의 값을 구할 수 있다.	40 %
❸ 직선 BC의 방정식을 구할 수 있다.	30 %

1247 전략 삼각형의 넓이를 a에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 직선 $3x+4y=3a$가 x축과 만나는 점을 A, 두 직선 $4x-3y=0$과 $3x+4y=3a$의 교점을 B라 하자.



두 직선 $4x-3y=0$과 $3x+4y=3a$는 수직이므로 원점과 직선 $3x+4y-3a=0$ 사이의 거리는

$4\cdot3+(-3)\cdot4=0$이므로 두 직선은 수직이다.

$\overline{OB}=\dfrac{|-3a|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\dfrac{3}{5}a\ (\because\ a>0)$

또 점 A$(a,\ 0)$과 직선 $4x-3y=0$ 사이의 거리는

$\overline{AB}=\dfrac{|4a|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=\dfrac{4}{5}a\ (\because\ a>0)$

△OAB에 내접하는 원의 반지름의 길이를 r라 하면 원의 넓이가 4π이므로

$\pi r^2=4\pi \qquad \therefore\ r=2\ (\because\ r>0)$

내접원의 중심을 C라 하면

△OAB=△OAC+△ABC+△BOC

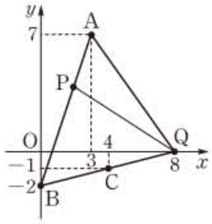
$\dfrac{1}{2}\cdot\overline{OB}\cdot\overline{AB}=\dfrac{1}{2}r(\overline{OA}+\overline{AB}+\overline{OB})$

$\dfrac{3}{5}a\cdot\dfrac{4}{5}a=2\left(a+\dfrac{4}{5}a+\dfrac{3}{5}a\right), \qquad a^2=10a$

$a(a-10)=0 \qquad \therefore\ a=10\ (\because\ a>0)$ 답 ③

1248 전략 $\overline{AP}=\dfrac{1}{3}\overline{AB}$임을 이용하여 $\overline{AP}$의 길이를 구하고, $\overline{BC}$를 $2:1$로 외분하는 점 Q의 좌표를 구한다.

풀이 (1) $\overline{AB}=\sqrt{(-3)^2+(-2-7)^2}$
$=3\sqrt{10}$
$\therefore \overline{AP}=\frac{1}{3}\overline{AB}=\sqrt{10}$ ⋯ ❶



(2) 점 Q의 좌표는
$\left(\frac{2\cdot4-1\cdot0}{2-1}, \frac{2\cdot(-1)-1\cdot(-2)}{2-1}\right)$,
즉 $(8, 0)$
직선 AB의 방정식은
$y-7=\frac{-2-7}{0-3}(x-3)$ $\therefore 3x-y-2=0$ ⋯ ❷
따라서 점 $Q(8, 0)$과 직선 $3x-y-2=0$ 사이의 거리는
$\frac{|24-2|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\frac{11\sqrt{10}}{5}$ ⋯ ❸
(3) $\triangle APQ=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{10}\cdot\frac{11\sqrt{10}}{5}=11$ ⋯ ❹

답 (1) $\sqrt{10}$ (2) $\frac{11\sqrt{10}}{5}$ (3) 11

채점 기준	비율
❶ $\overline{AP}$의 길이를 구할 수 있다.	20 %
❷ 점 Q의 좌표와 직선 AB의 방정식을 구할 수 있다.	30 %
❸ 점 Q와 직선 AB 사이의 거리를 구할 수 있다.	30 %
❹ △APQ의 넓이를 구할 수 있다.	20 %

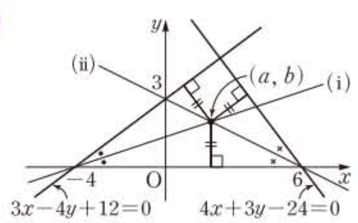
1249 전략 이차함수의 그래프에 접하고 주어진 직선과 평행한 직선의 방정식을 구한다.

풀이 이차함수 $y=x^2+2x+3$의 그래프에 접하고 직선 $y=2x+a$와 평행한 직선의 방정식을 $y=2x+k$ (k는 실수)라 하자. 이차방정식 $x^2+2x+3=2x+k$, 즉 $x^2+3-k=0$의 판별식을 D라 하면
$D=0^2-4(3-k)=0$ $\therefore k=3$
따라서 접선의 방정식은 $y=2x+3$
이 직선 위의 한 점 $(0, 3)$과 직선 $y=2x+a$, 즉 $2x-y+a=0$ 사이의 거리가 $\sqrt{5}$이므로
$\frac{|-3+a|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\sqrt{5}$, $|a-3|=5$
$a-3=-5$ 또는 $a-3=5$
$\therefore a=-2$ 또는 $a=8$
그런데 $a=8$이면 이차함수 $y=x^2+2x+3$의 그래프와 직선 $y=2x+a$가 서로 다른 두 점에서 만나므로 거리의 최솟값이 0이 된다.
$\therefore a=-2$

답 ①

1250 전략 삼각형의 세 내각의 이등분선은 한 점(내심)에서 만나므로 두 내각의 이등분선의 교점을 구한다.

풀이



(i) 두 직선 $y=0$, $3x-4y+12=0$이 이루는 각의 이등분선 위의 점을 $P(x, y)$라 하면 점 P에서 두 직선에 이르는 거리가 같으므로
$|y|=\frac{|3x-4y+12|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}$, $|3x-4y+12|=5|y|$
$3x-4y+12=\pm5y$
$\therefore 3x+y+12=0$ 또는 $x-3y+4=0$
이 중 내심 (a, b)를 지나는 직선의 기울기는 양수이므로
$x-3y+4=0$
(ii) 두 직선 $y=0$, $4x+3y-24=0$이 이루는 각의 이등분선 위의 점을 $Q(x, y)$라 하면 점 Q에서 두 직선에 이르는 거리가 같으므로
$|y|=\frac{|4x+3y-24|}{\sqrt{4^2+3^2}}$, $|4x+3y-24|=5|y|$
$4x+3y-24=\pm5y$
$\therefore x+2y-6=0$ 또는 $2x-y-12=0$
이 중 내심 (a, b)를 지나는 직선의 기울기는 음수이므로
$x+2y-6=0$
(i), (ii)에서 주어진 세 직선으로 둘러싸인 삼각형의 두 내각의 이등분선의 방정식은 $x-3y+4=0$, $x+2y-6=0$이므로 두 방정식을 연립하여 풀면
$x=2$, $y=2$
따라서 내심의 좌표가 $(2, 2)$이므로 $a=2$, $b=2$
$\therefore a+b=4$

답 4

SSEN 특강 삼각형의 내심

① 삼각형의 세 내각의 이등분선의 교점이다.
② 삼각형의 내심에서 세 변에 이르는 거리는 같다.

10 직선의 방정식

11 원의 방정식

1251 답 $x^2+y^2=9$

1252 답 $(x-2)^2+(y+1)^2=36$

1253 반지름의 길이는 $|(중심의\ y좌표)|=|2|=2$이므로 구하는 원의 방정식은

$(x+5)^2+(y-2)^2=4$　　답 $(x+5)^2+(y-2)^2=4$

1254 반지름의 길이는 $|(중심의\ x좌표)|=|4|=4$이므로 구하는 원의 방정식은

$(x-4)^2+(y-1)^2=16$　　답 $(x-4)^2+(y-1)^2=16$

1255 반지름의 길이는 $\underbrace{|(중심의\ x좌표)|=|7|=7}_{|(중심의\ y좌표)|=|-7|=7}$이므로 구하는 원의 방정식은

$(x-7)^2+(y+7)^2=49$　　답 $(x-7)^2+(y+7)^2=49$

1256 반지름의 길이를 r라 하면 원의 방정식은

$(x-3)^2+(y+4)^2=r^2$

이 원이 원점을 지나므로

$r^2=(-3)^2+4^2=25$

따라서 구하는 원의 방정식은

$(x-3)^2+(y+4)^2=25$　　답 $(x-3)^2+(y+4)^2=25$

1257 반지름의 길이를 r라 하면 원의 방정식은

$(x+3)^2+(y-2)^2=r^2$

이 원이 점 $(-2, 0)$을 지나므로

$r^2=1^2+(-2)^2=5$

따라서 구하는 원의 방정식은

$(x+3)^2+(y-2)^2=5$　　답 $(x+3)^2+(y-2)^2=5$

1258 $\overline{AB}$의 중점이 두 점 A, B를 지름의 양 끝 점으로 하는 원의 중심이므로 그 좌표는

$\left(\frac{5-1}{2}, \frac{-2+4}{2}\right)$, 즉 $(2, 1)$

또 $\overline{AB}$가 원의 지름이므로 원의 반지름의 길이는

$\frac{1}{2}\overline{AB}=\frac{1}{2}\sqrt{(-1-5)^2+(4+2)^2}=3\sqrt{2}$

따라서 구하는 원의 방정식은

$(x-2)^2+(y-1)^2=18$　　답 $(x-2)^2+(y-1)^2=18$

1259 원의 중심을 $P(a, b)$라 하면

$\overline{PA}=\overline{PB}=\overline{PC}$

$\overline{PA}=\overline{PB}$에서 $\overline{PA}^2=\overline{PB}^2$이므로

$a^2+b^2=(a+1)^2+(b-1)^2$

$\therefore a-b+1=0$　　…… ㉠

$\overline{PA}=\overline{PC}$에서 $\overline{PA}^2=\overline{PC}^2$이므로

$a^2+b^2=(a-4)^2+b^2$

$-8a+16=0$　　$\therefore a=2$

$a=2$를 ㉠에 대입하면　$b=3$

따라서 원의 중심은 $P(2, 3)$이고 반지름의 길이는

$\overline{PA}=\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13}$

이므로 구하는 원의 방정식은

$(x-2)^2+(y-3)^2=13$　　답 $(x-2)^2+(y-3)^2=13$

다른 풀이 구하는 원의 방정식을 $x^2+y^2+px+qy+r=0$ (p, q, r는 상수)이라 하면 이 원이 점 $A(0, 0)$을 지나므로

$r=0$

또 두 점 $B(-1, 1)$, $C(4, 0)$을 지나므로

$2-p+q=0$, $16+4p=0$

$\therefore p=-4$, $q=-6$

따라서 구하는 원의 방정식은

$x^2+y^2-4x-6y=0$

$\therefore (x-2)^2+(y-3)^2=13$

1260 원의 중심을 $P(a, b)$라 하면

$\overline{PA}=\overline{PB}=\overline{PC}$

$\overline{PA}=\overline{PB}$에서 $\overline{PA}^2=\overline{PB}^2$이므로

$(a-3)^2+b^2=(a+3)^2+(b-2)^2$

$\therefore 3a-b+1=0$　　…… ㉠

$\overline{PA}=\overline{PC}$에서 $\overline{PA}^2=\overline{PC}^2$이므로

$(a-3)^2+b^2=(a-1)^2+(b-4)^2$

$\therefore a-2b+2=0$　　…… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면　$a=0$, $b=1$

따라서 원의 중심은 $P(0, 1)$이고 반지름의 길이는

$\overline{PA}=\sqrt{(-3)^2+1^2}=\sqrt{10}$

이므로 구하는 원의 방정식은

$x^2+(y-1)^2=10$　　답 $x^2+(y-1)^2=10$

1261 $x^2+y^2-10y-11=0$에서

$x^2+(y-5)^2=36$

따라서 중심의 좌표는 $(0, 5)$, 반지름의 길이는 6이다.

답 $(0, 5)$, 6

1262 $x^2+y^2+6x-4y+12=0$에서

$(x+3)^2+(y-2)^2=1$

따라서 중심의 좌표는 $(-3, 2)$, 반지름의 길이는 1이다.

답 $(-3, 2)$, 1

1263 $2x^2+2y^2+6x-2y+1=0$에서

$2(x^2+3x)+2(y^2-y)+1=0$,　$2\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+2\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=4$

$\therefore \left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=2$

따라서 중심의 좌표는 $\left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$, 반지름의 길이는 $\sqrt{2}$이다.

답 $\left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $\sqrt{2}$

1264 $x^2+y^2+6x-2y+k=0$에서

$(x+3)^2+(y-1)^2=10-k$

이 방정식이 원을 나타내려면

$10-k>0 \quad \therefore k<10$ 　　답 $k<10$

1265 $x^2+y^2-4x+2ky+7=0$에서

$(x-2)^2+(y+k)^2=k^2-3$

이 방정식이 원을 나타내려면

$k^2-3>0 \quad \therefore k<-\sqrt{3}$ 또는 $k>\sqrt{3}$

답 $k<-\sqrt{3}$ 또는 $k>\sqrt{3}$

1266 구하는 직선의 방정식은

$x^2+y^2+4x-3-(x^2+y^2-2x+10y+10)=0$

$\therefore 6x-10y-13=0$ 　　답 $6x-10y-13=0$

1267 구하는 현의 방정식은

$x^2+y^2+8x-2y+14-(x^2+y^2+4x-6y+9)=0$

$\therefore 4x+4y+5=0$ 　　답 $4x+4y+5=0$

1268 두 원의 교점을 지나는 원의 방정식을

$x^2+y^2-8x+2y-5+k(x^2+y^2+2x-4y+2)=0 \ (k\neq-1)$

이라 하면 이 원이 점 $(1,\ 3)$을 지나므로

$3+2k=0 \quad \therefore k=-\frac{3}{2}$

따라서 구하는 원의 방정식은

$x^2+y^2-8x+2y-5-\frac{3}{2}(x^2+y^2+2x-4y+2)=0$

$-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}y^2-11x+8y-8=0$

$\therefore x^2+y^2+22x-16y+16=0$

답 $x^2+y^2+22x-16y+16=0$

1269 원의 중심 $(0,\ 0)$과 직선 $2x+y-5=0$ 사이의 거리는

$\frac{|-5|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\sqrt{5}$

원의 반지름의 길이가 $\sqrt{5}$이므로 원 O와 직선 l은 한 점에서 만난다.(접한다.) 　　답 한 점에서 만난다.(접한다.)

1270 원의 중심 $(3,\ -2)$와 직선 $3x-y-1=0$ 사이의 거리는

$\frac{|9+2-1|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\sqrt{10}$

원의 반지름의 길이가 $\sqrt{6}$이고 $\sqrt{10}>\sqrt{6}$이므로 원 O와 직선 l은 만나지 않는다. 　　답 만나지 않는다.

1271 $x^2+y^2+10x+2y+17=0$에서

$(x+5)^2+(y+1)^2=9$

원의 중심 $(-5,\ -1)$과 직선 $x+2y+3=0$ 사이의 거리는

$\frac{|-5-2+3|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{4\sqrt{5}}{5}$

원의 반지름의 길이가 3이고 $\frac{4\sqrt{5}}{5}<3$이므로 원 O와 직선 l은 서로 다른 두 점에서 만난다. 　　답 서로 다른 두 점에서 만난다.

1272 $x-2y+1=0$에서 　$x=2y-1$

이것을 $x^2+y^2+4x-3y-6=0$에 대입하면

$(2y-1)^2+y^2+4(2y-1)-3y-6=0$

$\therefore 5y^2+y-9=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=1^2-4\cdot5\cdot(-9)=181>0$

따라서 교점의 개수는 2이다. 　　답 2

1273 $x-y-3=0$에서 　$y=x-3$

이것을 $x^2+y^2+2x-4y-13=0$에 대입하면

$x^2+(x-3)^2+2x-4(x-3)-13=0$

$2x^2-8x+8=0 \quad \therefore x^2-4x+4=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-2)^2-1\cdot4=0$

따라서 교점의 개수는 1이다. 　　답 1

1274 원의 중심 $(0,\ 0)$과 직선 $x-y+k=0$ 사이의 거리는

$\frac{|k|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{|k|}{\sqrt{2}}$

(1) 서로 다른 두 점에서 만나려면

$\frac{|k|}{\sqrt{2}}<\underbrace{3}_{\text{원의 반지름의 길이}}, \quad |k|<3\sqrt{2}$

$\therefore -3\sqrt{2}<k<3\sqrt{2}$

(2) 한 점에서 만나려면

$\frac{|k|}{\sqrt{2}}=3, \quad |k|=3\sqrt{2}$

$\therefore k=\pm3\sqrt{2}$

(3) 만나지 않으려면

$\frac{|k|}{\sqrt{2}}>3, \quad |k|>3\sqrt{2}$

$\therefore k<-3\sqrt{2}$ 또는 $k>3\sqrt{2}$

답 풀이 참조

1275 $y=x\pm\sqrt{2}\cdot\sqrt{1^2+1}$에서

$y=x\pm2$ 　　답 $y=x\pm2$

1276 $y=-3x\pm\sqrt{10}\cdot\sqrt{(-3)^2+1}$에서

$y=-3x\pm10$ 　　답 $y=-3x\pm10$

1277 접선의 방정식을 $y=-x+k$(k는 상수)라 하면 원의 중심 $(0,\ 1)$과 직선 $y=-x+k$, 즉 $x+y-k=0$ 사이의 거리는

$\frac{|1-k|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{|1-k|}{\sqrt{2}}$

원의 반지름의 길이가 $2\sqrt{2}$이므로 원과 직선이 접하려면

$\frac{|1-k|}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}, \quad |1-k|=4$

$1-k=\pm 4 \qquad \therefore k=-3$ 또는 $k=5$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$y=-x-3,\ y=-x+5$

답 $y=-x-3,\ y=-x+5$

1278 답 $2x-y=5$

1279 $-2x+4y=20$에서

$x-2y=-10$ 답 $x-2y=-10$

1280 원의 중심 $(-1,\ 0)$과 점 $(0,\ \sqrt{3})$을 지나는 직선의 기울기는

$$\frac{\sqrt{3}-0}{0-(-1)}=\sqrt{3}$$

점 $(0,\ \sqrt{3})$에서의 접선은 원의 중심 $(-1,\ 0)$과 점 $(0,\ \sqrt{3})$을 지나는 직선과 수직이므로 접선의 기울기는 $-\frac{\sqrt{3}}{3}$이다.

따라서 구하는 접선의 방정식은

$y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x+\sqrt{3}$ 답 $y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x+\sqrt{3}$

1281 (1) $x_1x+y_1y=2$

(2) 직선 $x_1x+y_1y=2$가 점 $(0,\ 2)$를 지나므로

$2y_1=2 \qquad \therefore y_1=1$

또 점 $(x_1,\ 1)$이 원 $x^2+y^2=2$ 위의 점이므로

$x_1^2+1^2=2, \qquad x_1^2=1 \qquad \therefore x_1=\pm 1$

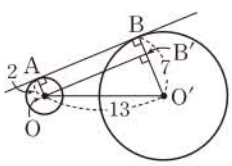
$\therefore x_1=1,\ y_1=1$ 또는 $x_1=-1,\ y_1=1$

(3) $x_1=1,\ y_1=1$일 때, $\qquad x+y=2$

$x_1=-1,\ y_1=1$일 때, $\qquad -x+y=2$

답 풀이 참조

1282 오른쪽 그림과 같이 점 O에서 $\overline{BO'}$에 내린 수선의 발을 B′이라 하면



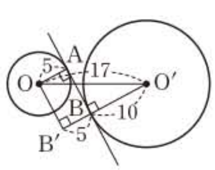
$\overline{AB}=\overline{OB'}$

$=\sqrt{13^2-(7-2)^2}$

$=12$

답 12

1283 오른쪽 그림과 같이 점 O에서 $\overline{O'B}$의 연장선에 내린 수선의 발을 B′이라 하면



$\overline{AB}=\overline{OB'}$

$=\sqrt{17^2-(10+5)^2}$

$=8$ 답 8

유형 01 중심의 좌표가 주어진 원의 방정식

본책 186쪽

중심이 점 $(a,\ b)$이고 점 $(x_1,\ y_1)$을 지나는 원의 방정식은 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$으로 놓고 $x=x_1,\ y=y_1$을 대입하여 r^2의 값을 구한다.

1284 $\overline{AB}$를 $2:1$로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\frac{2\cdot 4+1\cdot 1}{2+1},\ \frac{2\cdot 5+1\cdot(-4)}{2+1}\right)$, 즉 $(3,\ 2)$

이므로 원의 반지름의 길이를 r라 하면 원의 방정식은

$(x-3)^2+(y-2)^2=r^2$

이 원이 점 $A(1,\ -4)$를 지나므로

$r^2=4+36=40$

따라서 구하는 원의 방정식은

$(x-3)^2+(y-2)^2=40$

답 $(x-3)^2+(y-2)^2=40$

1285 원 $(x-1)^2+(y+3)^2=4$의 중심의 좌표는 $(1,\ -3)$, 원 $(x+5)^2+(y-2)^2=9$의 반지름의 길이는 3이므로 주어진 조건을 만족시키는 원의 방정식은

$(x-1)^2+(y+3)^2=9$

이 원이 점 $(4,\ k)$를 지나므로

$9+(k+3)^2=9$

$(k+3)^2=0 \qquad \therefore k=-3$ 답 -3

1286 원 $(x-5)^2+(y+2)^2=1$의 중심의 좌표는

$(5,\ -2)$

이므로 이 원과 중심이 같은 원의 반지름의 길이를 r라 하면 원의 방정식은

$(x-5)^2+(y+2)^2=r^2$

이 원이 점 $(7,\ 2)$를 지나므로

$r^2=4+16=20$

$\therefore (x-5)^2+(y+2)^2=20$ ··· ❶

이 원이 점 $(a,\ 0)$을 지나므로

$(a-5)^2+4=20, \qquad (a-5)^2=16$

$a-5=\pm 4 \qquad \therefore a=1$ 또는 $a=9$ ··· ❷

따라서 모든 a의 값의 합은

$1+9=10$ ··· ❸

답 10

채점 기준	비율
❶ 원의 방정식을 구할 수 있다.	60 %
❷ a의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ 모든 a의 값의 합을 구할 수 있다.	10 %

1287 원의 반지름의 길이를 r라 하면 원의 방정식은

$(x-2)^2+(y+3)^2=r^2$

$\therefore x^2+y^2-4x+6y+13-r^2=0$

이 식이 $x^2+y^2-4x-ay+2a=0$과 일치하므로

$6=-a,\ 13-r^2=2a$

$\therefore a=-6,\ r^2=25$

따라서 주어진 원의 방정식은

$(x-2)^2+(y+3)^2=25$

⑤ $x=5,\ y=1$을 $(x-2)^2+(y+3)^2=25$에 대입하면

$(5-2)^2+(1+3)^2=25$

이므로 점 $(5,\ 1)$은 원 위의 점이다. 답 ⑤

1288 $\overline{AB}$의 중점의 좌표는

$\left(\frac{-1+3}{2}, \frac{-2+6}{2}\right)$, 즉 $(1, 2)$

직선 AB의 기울기는 $\frac{6-(-2)}{3-(-1)}=2$

따라서 $\overline{AB}$의 수직이등분선의 기울기는 $-\frac{1}{2}$이고 점 $(1, 2)$를 지나므로 그 방정식은

$y-2=-\frac{1}{2}(x-1) \quad \therefore y=-\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$

이 식에 $y=0$을 대입하면

$-\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}=0 \quad \therefore x=5$

즉 $\overline{AB}$의 수직이등분선과 x축의 교점의 좌표가 $(5, 0)$이므로 이 점을 중심으로 하는 원의 반지름의 길이를 r라 하면

$(x-5)^2+y^2=r^2$

이 원이 원점을 지나므로

$r^2=5^2=25$

따라서 구하는 원의 넓이는 $\pi r^2=25\pi$ 답 25π

유형 02 중심이 직선 위에 있는 원의 방정식 본책 186쪽

① 중심이 x축 위에 있는 원의 방정식 ➡ $(x-a)^2+y^2=r^2$
② 중심이 y축 위에 있는 원의 방정식 ➡ $x^2+(y-b)^2=r^2$
③ 중심이 $y=f(x)$의 그래프 위에 있는 원의 방정식
➡ $(x-a)^2+\{y-f(a)\}^2=r^2$

1289 원의 중심의 좌표를 $(a, 0)$, 반지름의 길이를 r라 하면 원의 방정식은

$(x-a)^2+y^2=r^2$

이 원이 점 $(-1, 2)$를 지나므로

$(-1-a)^2+4=r^2$

$\therefore a^2+2a+5=r^2$ …… ㉠

또 점 $(0, 1)$을 지나므로

$(-a)^2+1=r^2$

$\therefore a^2+1=r^2$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-2$, $r^2=5$

따라서 구하는 원의 방정식은

$(x+2)^2+y^2=5$ 답 $(x+2)^2+y^2=5$

다른 풀이 원의 중심을 $A(a, 0)$이라 하고 $B(-1, 2)$, $C(0, 1)$이라 하면 $\overline{AB}=\overline{AC}$이므로

$\sqrt{(-1-a)^2+2^2}=\sqrt{(-a)^2+1^2}$

양변을 제곱하여 정리하면

$2a+4=0 \quad \therefore a=-2$

따라서 원의 중심은 $A(-2, 0)$이고 반지름의 길이는

$\overline{AB}=\sqrt{(-1+2)^2+2^2}=\sqrt{5}$

이므로 구하는 원의 방정식은 $(x+2)^2+y^2=5$

1290 원의 중심의 좌표를 $(0, a)$, 반지름의 길이를 r라 하면 원의 방정식은

$x^2+(y-a)^2=r^2$

이 원이 점 $(-4, 1)$을 지나므로

$16+(1-a)^2=r^2$

$\therefore a^2-2a+17=r^2$ …… ㉠

또 점 $(3, 0)$을 지나므로

$9+(-a)^2=r^2$

$\therefore a^2+9=r^2$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=4$, $r^2=25$

따라서 주어진 원의 방정식은

$x^2+(y-4)^2=25$

ㄱ. $4^2+(7-4)^2=25$이므로 주어진 원은 점 $(4, 7)$을 지난다.

ㄷ. 원의 반지름의 길이가 5이므로 둘레의 길이는 10π이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다. 답 ③

1291 원의 중심의 좌표를 $(a, a-2)$, 반지름의 길이를 r라 하면 원의 방정식은

$(x-a)^2+(y-a+2)^2=r^2$

이 원이 점 $(0, -4)$를 지나므로

$(-a)^2+(-a-2)^2=r^2$

$\therefore 2a^2+4a+4=r^2$ …… ㉠

또 점 $(4, 0)$을 지나므로

$(4-a)^2+(-a+2)^2=r^2$

$\therefore 2a^2-12a+20=r^2$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=1$, $r^2=10$

따라서 구하는 원의 반지름의 길이는 $\sqrt{10}$이다. 답 ③

1292 원의 중심의 좌표를 (a, a), 반지름의 길이를 r라 하면 원의 방정식은

$(x-a)^2+(y-a)^2=r^2$

이 원이 점 $(2, 10)$을 지나므로

$(2-a)^2+(10-a)^2=r^2$

$\therefore 2a^2-24a+104=r^2$ …… ㉠

또 점 $(8, -2)$를 지나므로

$(8-a)^2+(-2-a)^2=r^2$

$\therefore 2a^2-12a+68=r^2$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=3$, $r^2=50$

따라서 주어진 원의 방정식은

$(x-3)^2+(y-3)^2=50$ ⋯ ❶

$x=4$를 원의 방정식에 대입하면

$(y-3)^2=49, \quad y-3=\pm 7$

$\therefore y=-4$ 또는 $y=10$

따라서 $A(4, -4)$, $B(4, 10)$ 또는 $A(4, 10)$, $B(4, -4)$이므로 ⋯ ❷

$\overline{AB}=|10-(-4)|=14$ ⋯ ❸

답 14

채점 기준	비율
❶ 원의 방정식을 구할 수 있다.	70 %
❷ 두 점 A, B의 좌표를 구할 수 있다.	20 %
❸ $\overline{AB}$의 길이를 구할 수 있다.	10 %

유형 03 지름의 양 끝 점이 주어진 원의 방정식 본책 187쪽

두 점 A, B를 지름의 양 끝 점으로 하는 원
➡ (원의 중심)$=$($\overline{AB}$의 중점), (반지름의 길이)$=\frac{1}{2}\overline{AB}$

1293 $\overline{AB}$의 중점이 두 점 A, B를 지름의 양 끝 점으로 하는 원의 중심이므로

$a=\frac{-1+5}{2}=2$, $b=\frac{-7+1}{2}=-3$

또 $\overline{AB}$가 원의 지름이므로 원의 반지름의 길이는

$\frac{1}{2}\overline{AB}=\frac{1}{2}\sqrt{(5+1)^2+(1+7)^2}=5$ $\therefore r=5$

$\therefore a+b+r=4$

답 ②

1294 $x^2+y^2+4x-12y+11=0$에서

$(x+2)^2+(y-6)^2=29$

따라서 $\overline{AB}$의 중점의 좌표가 $(-2, 6)$이므로

$\frac{a-7}{2}=-2$, $\frac{b+4}{2}=6$ $\therefore a=3, b=8$

$\therefore ab=24$

답 24

1295 P(8, 0), Q(0, 8)이고 $\overline{PQ}$의 중점이 두 점 P, Q를 지름의 양 끝 점으로 하는 원의 중심이므로 그 좌표는

$\left(\frac{8}{2}, \frac{8}{2}\right)$, 즉 $(4, 4)$ ⋯ ❶

또 $\overline{PQ}$가 원의 지름이므로 원의 반지름의 길이는

$\frac{1}{2}\overline{PQ}=\frac{1}{2}\sqrt{(-8)^2+8^2}=4\sqrt{2}$ ⋯ ❷

따라서 구하는 원의 방정식은

$(x-4)^2+(y-4)^2=32$ ⋯ ❸

답 $(x-4)^2+(y-4)^2=32$

채점 기준	비율
❶ 원의 중심의 좌표를 구할 수 있다.	40 %
❷ 원의 반지름의 길이를 구할 수 있다.	40 %
❸ 원의 방정식을 구할 수 있다.	20 %

유형 04 세 점을 지나는 원의 방정식 본책 187쪽

세 점 A, B, C를 지나는 원의 방정식은 다음과 같은 순서로 구한다.
(i) 원의 중심을 $P(a, b)$로 놓는다.
(ii) $\overline{PA}=\overline{PB}=\overline{PC}$임을 이용하여 a, b에 대한 방정식을 세운다.
(iii) (ii)의 방정식을 연립하여 a, b의 값을 구한다.
(iv) 반지름의 길이는 $\overline{PA}$의 길이와 같음을 이용하여 반지름의 길이를 구한다.

1296 원의 중심을 $P(a, b)$라 하면

$\overline{PA}=\overline{PB}=\overline{PC}$

$\overline{PA}=\overline{PC}$에서 $\overline{PA}^2=\overline{PC}^2$이므로

$(a+3)^2+(b+2)^2=(a-1)^2+b^2$

$\therefore 2a+b+3=0$ ⋯⋯ ㉠

$\overline{PB}=\overline{PC}$에서 $\overline{PB}^2=\overline{PC}^2$이므로

$(a+2)^2+(b-1)^2=(a-1)^2+b^2$

$\therefore 3a-b+2=0$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-1, b=-1$

따라서 원의 중심은 $P(-1, -1)$이고 반지름의 길이는

$\overline{PA}=\sqrt{(-1+3)^2+(-1+2)^2}=\sqrt{5}$

이므로 구하는 원의 넓이는 5π이다.

답 ④

1297 원의 중심을 $P(a, b)$라 하면

$\overline{PA}=\overline{PB}=\overline{PC}$

$\overline{PA}=\overline{PB}$에서 $\overline{PA}^2=\overline{PB}^2$이므로

$(a+4)^2+b^2=(a+2)^2+(b+4)^2$

$\therefore a-2b-1=0$ ⋯⋯ ㉠

$\overline{PA}=\overline{PC}$에서 $\overline{PA}^2=\overline{PC}^2$이므로

$(a+4)^2+b^2=(a-5)^2+(b-3)^2$

$\therefore 3a+b-3=0$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=1, b=0$

따라서 원의 중심은 $P(1, 0)$이고 반지름의 길이는

$\overline{PA}=|1-(-4)|=5$

이므로 원의 방정식은 $(x-1)^2+y^2=25$

이 원이 점 $(1, k)$를 지나므로

$k^2=25$ $\therefore k=\pm5$

따라서 모든 k의 값의 곱은 -25이다.

답 ①

1298 $x+3y-10=0$ ⋯⋯ ㉠

$7x+y-30=0$ ⋯⋯ ㉡

$2x+y-5=0$ ⋯⋯ ㉢

두 직선 ㉠, ㉡의 교점을 A, 두 직선 ㉡, ㉢의 교점을 B, 두 직선 ㉠, ㉢의 교점을 C라 하면

$A(4, 2)$, $B(5, -5)$, $C(1, 3)$

외접원의 중심을 $P(a, b)$라 하면

$\overline{PA}=\overline{PB}=\overline{PC}$

$\overline{PA}=\overline{PB}$에서 $\overline{PA}^2=\overline{PB}^2$이므로

$(a-4)^2+(b-2)^2=(a-5)^2+(b+5)^2$

$\therefore a-7b-15=0$ ⋯⋯ ㉣

$\overline{PB}=\overline{PC}$에서 $\overline{PB}^2=\overline{PC}^2$이므로

$(a-5)^2+(b+5)^2=(a-1)^2+(b-3)^2$

$\therefore a-2b-5=0$ ⋯⋯ ㉤

㉣, ㉤을 연립하여 풀면 $a=1, b=-2$

따라서 외접원의 중심은 $P(1, -2)$이고 반지름의 길이는

$\overline{PA}=\sqrt{(1-4)^2+(-2-2)^2}=5$

이므로 구하는 외접원의 방정식은

$(x-1)^2+(y+2)^2=25$

답 $(x-1)^2+(y+2)^2=25$

유형 05 원의 방정식이 되기 위한 조건 본책 188쪽

방정식 $x^2+y^2+Ax+By+C=0$이 원을 나타낸다.
➡ 주어진 방정식을 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 꼴로 변형하면 $r^2>0$이다.

1299 $x^2+y^2-2ax+4ay+5=0$에서

$(x-a)^2+(y+2a)^2=5(a^2-1)$

이 방정식이 원을 나타내려면 $a^2-1>0$

$(a+1)(a-1)>0$ $\quad\therefore a<-1$ 또는 $a>1$ 답 ④

1300 ① $x^2+y^2+x+y-1=0$에서

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{2}$$

② $x^2+y^2+2x+y+1=0$에서 $\quad (x+1)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$

③ $x^2+y^2+2x+2y+1=0$에서 $\quad (x+1)^2+(y+1)^2=1$

④ $x^2+y^2+4x-2y+5=0$에서 $\quad (x+2)^2+(y-1)^2=0$

⑤ $x^2+y^2+4x+4y+4=0$에서 $\quad (x+2)^2+(y+2)^2=4$

따라서 원의 방정식이 아닌 것은 ④이다. 답 ④

참고 ④ 방정식 $(x+2)^2+(y-1)^2=0$은 점 $(-2, 1)$을 나타낸다.

1301 $x^2+y^2+2(k-1)x-5k^2+3k+1=0$에서

$\{x+(k-1)\}^2+y^2=6k^2-5k$

이 방정식이 반지름의 길이가 1 이하인 원을 나타내려면

$0<\sqrt{6k^2-5k}\le 1$ $\quad\therefore 0<6k^2-5k\le 1$

$6k^2-5k>0$에서 $\quad k(6k-5)>0$

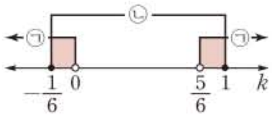
$\therefore k<0$ 또는 $k>\frac{5}{6}$ …… ㉠

$6k^2-5k\le 1$에서 $\quad 6k^2-5k-1\le 0$

$(6k+1)(k-1)\le 0$ $\quad\therefore -\frac{1}{6}\le k\le 1$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 공통부분을 구하면

$-\frac{1}{6}\le k<0$ 또는 $\frac{5}{6}<k\le 1$



따라서 실수 k의 값이 될 수 있는 것은 ②이다. 답 ②

1302 $x^2+y^2-2y+k^2-8k+13=0$에서

$x^2+(y-1)^2=-k^2+8k-12$ ··· ❶

이 방정식이 원을 나타내려면

$-k^2+8k-12>0,\quad k^2-8k+12<0$

$(k-2)(k-6)<0$ $\quad\therefore 2<k<6$ ··· ❷

원의 넓이가 최대이려면 반지름의 길이가 최대이어야 하고

$\sqrt{-k^2+8k-12}=\sqrt{-(k-4)^2+4}$

이므로 $2<k<6$에서 $k=4$일 때 반지름의 길이가 최대이다.

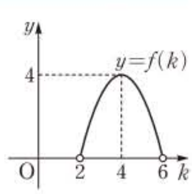
따라서 구하는 원의 반지름의 길이는 2이다. ··· ❸

답 2

채점 기준	비율
❶ 주어진 방정식을 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 꼴로 변형할 수 있다.	20 %
❷ 원의 방정식이 되기 위한 k의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %
❸ 넓이가 최대인 원의 반지름의 길이를 구할 수 있다.	40 %

참고 원의 반지름의 길이를 $r=\sqrt{-k^2+8k-12}$, $f(k)=-k^2+8k-12$라 하면 $2<k<6$에서 함수 $y=f(k)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 원의 반지름의 길이의 범위는

$0<r\le\sqrt{4}$, 즉 $0<r\le 2$



유형 06 x축 또는 y축에 접하는 원의 방정식 본책 188쪽

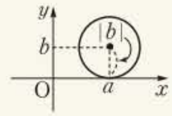
원 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$이

① x축에 접할 때

➡ (반지름의 길이)$=|$(중심의 y좌표)$|$

$=|b|$

➡ $(x-a)^2+(y-b)^2=b^2$

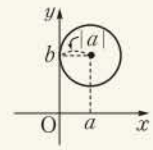


② y축에 접할 때

➡ (반지름의 길이)$=|$(중심의 x좌표)$|$

$=|a|$

➡ $(x-a)^2+(y-b)^2=a^2$



1303 $x^2+y^2+4x+ky+9=0$에서

$$(x+2)^2+\left(y+\frac{k}{2}\right)^2=\frac{k^2}{4}-5$$

원의 중심 $\left(-2, -\frac{k}{2}\right)$가 제 2 사분면 위에 있으므로

$-\frac{k}{2}>0$ $\quad\therefore k<0$

또 원이 y축에 접하므로 (반지름의 길이)$=|$(중심의 x좌표)$|$

$\sqrt{\frac{k^2}{4}-5}=|-2|$

양변을 제곱하면 $\quad \frac{k^2}{4}-5=4,\quad k^2=36\quad\therefore k=\pm 6$

그런데 $k<0$이므로 $\quad k=-6$ 답 ①

1304 원의 반지름의 길이를 r라 하면 원의 넓이가 16π이므로

$\pi r^2=16\pi$ $\quad\therefore r=4$ ($\because r>0$)

이 원이 점 $(-5, 0)$에서 x축에 접하고, 중심이 제 3 사분면 위에 있으므로 원의 중심의 좌표는 $(-5, -4)$이다.

따라서 구하는 원의 방정식은

$(x+5)^2+(y+4)^2=16$ 답 $(x+5)^2+(y+4)^2=16$

1305 원 $x^2+y^2+2ax-2y+b=0$이 점 $(3, -2)$를 지나므로

$9+4+6a+4+b=0$

$\therefore 6a+b=-17$ …… ㉠ ··· ❶

$x^2+y^2+2ax-2y+b=0$에서

$(x+a)^2+(y-1)^2=a^2-b+1$ ··· ❷

이 원이 y축에 접하므로

$\sqrt{a^2-b+1}=|-a|$

양변을 제곱하면 $\quad a^2-b+1=a^2$ $\quad\therefore b=1$

$b=1$을 ㉠에 대입하면

$6a+1=-17$ $\quad\therefore a=-3$ ··· ❸

$\therefore a+b=-2$ ··· ❹

답 -2

채점 기준	비율
❶ a, b에 대한 방정식을 세울 수 있다.	30 %
❷ 주어진 원의 방정식을 $(x-p)^2+(y-q)^2=r^2$ 꼴로 변형할 수 있다.	20 %
❸ a, b의 값을 구할 수 있다.	40 %
❹ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	10 %

11 원의 방정식

1306 원의 방정식을 $(x-a)^2+(y-b)^2=a^2$이라 하면 이 원이
y축에 접하는 원의 방정식
점 $(4, 2)$를 지나므로

$$(4-a)^2+(2-b)^2=a^2$$

$$\therefore b^2-8a-4b+20=0 \quad \cdots\cdots ㉠$$

또 점 $(2, 0)$을 지나므로

$$(2-a)^2+(-b)^2=a^2$$

$$b^2-4a+4=0 \qquad \therefore a=\frac{1}{4}b^2+1 \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉡을 ㉠에 대입하여 정리하면

$$b^2+4b-12=0, \qquad (b+6)(b-2)=0$$

$$\therefore b=-6 \text{ 또는 } b=2$$

이것을 ㉡에 대입하면

$$a=10 \text{ 또는 } a=2$$

따라서 두 원의 반지름의 길이의 합은
$|a|$

$$10+2=12$$

답 ④

1307 원의 중심이 직선 $2x-y-1=0$, 즉 $y=2x-1$ 위에 있으므로 원의 중심의 좌표를 $(a, 2a-1)$이라 하면 원의 방정식은

$$(x-a)^2+\{y-(2a-1)\}^2=(2a-1)^2$$

이 원이 점 $(2, -2)$를 지나므로

$$(2-a)^2+(-1-2a)^2=(2a-1)^2$$

$$a^2+4a+4=0, \qquad (a+2)^2=0$$

$$\therefore a=-2$$

따라서 원의 반지름의 길이는 $|2\cdot(-2)-1|=5$이므로 구하는 원의 넓이는

$$\pi\cdot 5^2=25\pi$$

답 25π

1308 $\triangle$ABC에서

$$\overline{AB}=|1-(-1)|=2,$$

$$\overline{BC}=\sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2}=2,$$

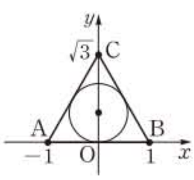
$$\overline{CA}=\sqrt{(-1)^2+(-\sqrt{3})^2}=2$$

이므로 $\triangle$ABC는 정삼각형이다. ⋯ ❶

정삼각형의 내심은 무게중심과 일치하므로 $\triangle$ABC의 내심의 좌표는

$$\left(\frac{-1+1+0}{3}, \frac{0+0+\sqrt{3}}{3}\right), \text{ 즉 } \left(0, \frac{\sqrt{3}}{3}\right) \quad \cdots ❷$$

따라서 오른쪽 그림과 같이 내접원이 x축에 접하므로 구하는 내접원의 방정식은



$$x^2+\left(y-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2$$

$$\therefore x^2+\left(y-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2=\frac{1}{3} \quad \cdots ❸$$

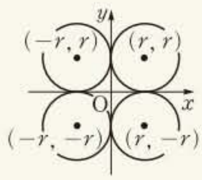
답 $x^2+\left(y-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2=\frac{1}{3}$

채점 기준	비율
❶ △ABC가 정삼각형임을 알 수 있다.	30 %
❷ △ABC의 내심의 좌표를 구할 수 있다.	30 %
❸ 내접원의 방정식을 구할 수 있다.	40 %

유형 07 x축, y축에 동시에 접하는 원의 방정식

본책 189쪽

x축, y축에 동시에 접하고 반지름의 길이가 r인 원의 방정식



① 중심이 제1사분면 위에 있으면
➡ $(x-r)^2+(y-r)^2=r^2$

② 중심이 제2사분면 위에 있으면
➡ $(x+r)^2+(y-r)^2=r^2$

③ 중심이 제3사분면 위에 있으면 ➡ $(x+r)^2+(y+r)^2=r^2$

④ 중심이 제4사분면 위에 있으면 ➡ $(x-r)^2+(y+r)^2=r^2$

1309 원의 방정식을 $(x-a)^2+(y-a)^2=a^2\,(a>0)$이라 하면
이 원이 점 $(4, 2)$를 지나므로
두 원의 중심은 모두 제1사분면 위에 있다.

$$(4-a)^2+(2-a)^2=a^2, \qquad a^2-12a+20=0$$

$$(a-2)(a-10)=0 \qquad \therefore a=2 \text{ 또는 } a=10$$

따라서 두 원의 중심의 좌표는 $(2, 2)$, $(10, 10)$이므로 중심 사이의 거리는

$$\sqrt{(10-2)^2+(10-2)^2}=8\sqrt{2}$$

답 $8\sqrt{2}$

1310 $x^2+y^2-6x+2ay-2+b=0$에서

$$(x-3)^2+(y+a)^2=a^2-b+11$$

이 원이 x축, y축에 동시에 접하므로

$$3=|-a|=\sqrt{a^2-b+11}$$

$3=|-a|$에서 $\quad a=3\ (\because a>0)$

$\sqrt{a^2-b+11}=3$에서

$$9-b+11=9 \qquad \therefore b=11$$

$$\therefore b-a=8$$

답 8

1311 원의 중심이 제1사분면 위에 있으므로 반지름의 길이를 r라 하면 중심의 좌표는 (r, r)이다.

이때 원의 중심 (r, r)가 직선 $3x+2y=10$ 위에 있으므로

$$3r+2r=10 \qquad \therefore r=2$$

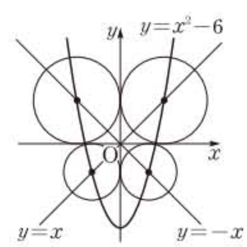
따라서 구하는 원의 방정식은

$$(x-2)^2+(y-2)^2=4$$

답 $(x-2)^2+(y-2)^2=4$

1312 x축과 y축에 동시에 접하는 원의 중심은 직선 $y=x$ 또는 직선 $y=-x$ 위에 있다.

따라서 주어진 원의 중심은 곡선 $y=x^2-6$과 직선 $y=x$ 또는 $y=-x$의 교점이다.



(i) $x^2-6=x$에서 $\quad x^2-x-6=0$

$$(x+2)(x-3)=0 \qquad \therefore x=-2 \text{ 또는 } x=3$$

(ii) $x^2-6=-x$에서 $\quad x^2+x-6=0$

$$(x+3)(x-2)=0 \qquad \therefore x=-3 \text{ 또는 } x=2$$

(i), (ii)에서 $\quad m=4$

또 네 원의 중심의 좌표는 각각 $(-3, 3)$, $(-2, -2)$, $(2, -2)$, $(3, 3)$이고, 반지름의 길이는 각각 3, 2, 2, 3이다.

따라서 네 원의 넓이의 합은

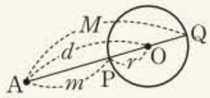
$$\pi\cdot 3^2+\pi\cdot 2^2+\pi\cdot 2^2+\pi\cdot 3^2=26\pi$$

이므로 $\quad n=26$

$\therefore m+n=30$ 답 ③

유형 08 원 밖의 한 점과 원 위의 점 사이의 거리 본책 189쪽

원 밖의 한 점 A와 원 위의 점 사이의 거리의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하면



① $M=\overline{AO}+\overline{OQ}=d+r$
② $m=\overline{AO}-\overline{OP}=d-r$

1313 $x^2+y^2+2x-2y-7=0$에서

$(x+1)^2+(y-1)^2=9$

이므로 원의 중심의 좌표는 $(-1, 1)$이다.

점 $A(-3, -5)$와 원의 중심 $(-1, 1)$ 사이의 거리는

$\sqrt{(-1+3)^2+(1+5)^2}=2\sqrt{10}$

이때 원의 반지름의 길이가 3이므로

$M=2\sqrt{10}+3, m=2\sqrt{10}-3$

$\therefore Mm=(2\sqrt{10}+3)(2\sqrt{10}-3)=31$ 답 31

1314 $x^2+y^2-8x-14y+49=0$에서

$(x-4)^2+(y-7)^2=16$

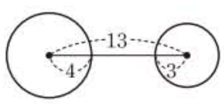
$x^2+y^2+2x+10y+17=0$에서

$(x+1)^2+(y+5)^2=9$

두 원의 중심의 좌표가 각각 $(4, 7)$, $(-1, -5)$이므로 중심 사이의 거리는

$\sqrt{(-1-4)^2+(-5-7)^2}=13$

이때 두 원의 반지름의 길이가 각각 4, 3이므로 주어진 두 원 위의 점 사이의 거리의 최댓값은



$13+4+3=20$

이고, 최솟값은

$13-4-3=6$

따라서 구하는 곱은 $\quad 20\cdot 6=120$ 답 ⑤

1315 점 $A(3, 4)$와 원 $x^2+y^2=r^2$의 중심 $(0, 0)$ 사이의 거리는

$\sqrt{3^2+4^2}=5$

이때 원의 반지름의 길이는 r이고 $\overline{AP}$의 길이의 최댓값이 $4+\sqrt{5}$이므로

$5+r=4+\sqrt{5} \quad \therefore r=\sqrt{5}-1$ 답 $\sqrt{5}-1$

1316 (1) 점 M의 좌표는

$\left(\frac{0+4}{2}, \frac{3+0}{2}\right)$, 즉 $\left(2, \frac{3}{2}\right)$ ··· ❶

(2) 평행사변형의 두 대각선은 서로를 이등분하므로 $\overline{PQ}$의 중점이 M이다.

$\therefore \overline{PQ}=2\overline{MP}$ ··· ❷

이때 점 $M\left(2, \frac{3}{2}\right)$과 원의 중심 $O(0, 0)$ 사이의 거리는

$\overline{OM}=\sqrt{2^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2}=\frac{5}{2}$

이고 원의 반지름의 길이가 1이므로 $\overline{MP}$의 길이의 최댓값은 $\frac{5}{2}+1=\frac{7}{2}$, 최솟값은 $\frac{5}{2}-1=\frac{3}{2}$이다.

따라서 $\overline{PQ}$의 길이의 최댓값은 $2\cdot\frac{7}{2}=7$, 최솟값은 $2\cdot\frac{3}{2}=3$이다. ··· ❸

답 (1) $\left(2, \frac{3}{2}\right)$ (2) 최댓값: 7, 최솟값: 3

채점 기준	비율
❶ 점 M의 좌표를 구할 수 있다.	20 %
❷ $\overline{PQ}=2\overline{MP}$임을 알 수 있다.	20 %
❸ $\overline{PQ}$의 길이의 최댓값과 최솟값을 구할 수 있다.	60 %

유형 09~10 자취의 방정식 본책 190쪽

조건을 만족시키는 점의 좌표를 (x, y)로 놓고 주어진 조건을 이용하여 x, y 사이의 관계식을 구한다.

1317 $P(a, b)$라 하고, $\overline{AP}$의 중점을 $Q(x, y)$라 하면

$x=\frac{2+a}{2}, y=\frac{4+b}{2}$

$\therefore a=2(x-1), b=2(y-2)$ ······ ㉠

점 $P(a, b)$가 원 $x^2+y^2-4x-2y+1=0$ 위의 점이므로

$a^2+b^2-4a-2b+1=0$ ······ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$4(x-1)^2+4(y-2)^2-8(x-1)-4(y-2)+1=0$

$x^2+y^2-4x-5y+\frac{37}{4}=0$

$\therefore (x-2)^2+\left(y-\frac{5}{2}\right)^2=1$

따라서 점 Q의 자취는 중심이 점 $\left(2, \frac{5}{2}\right)$이고 반지름의 길이가 1인 원이므로 구하는 자취의 길이는

$2\pi\cdot 1=2\pi$ 답 ④

1318 $P(x, y)$라 하면 $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2+\overline{CP}^2$에서

$x^2+(y-1)^2=(x-1)^2+(y-1)^2+(x-1)^2+(y-2)^2$

$x^2+y^2-4x-4y+6=0$

$\therefore (x-2)^2+(y-2)^2=2$

따라서 점 P가 나타내는 도형은 중심이 점 $(2, 2)$이고 반지름의 길이가 $\sqrt{2}$인 원이므로 구하는 넓이는

$\pi\cdot(\sqrt{2})^2=2\pi$ 답 2π

1319 $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2=10$에서

$(a+2)^2+b^2+(a-2)^2+b^2=10$

$2a^2+2b^2=2 \quad \therefore a^2+b^2=1$

따라서 점 P가 나타내는 도형은 중심이 원점이고 반지름의 길이가 1인 원이다.

이때 $(a-6)^2+(b+8)^2$은 두 점 $P(a, b)$, $(6, -8)$ 사이의 거리의 제곱과 같으므로 구하는 최댓값은 원 $x^2+y^2=1$ 위의 점과

점 $(6,\ -8)$ 사이의 거리의 최댓값의 제곱과 같다.
점 $(6,\ -8)$과 원의 중심 $(0,\ 0)$ 사이의 거리는

$\sqrt{6^2+(-8)^2}=10$

이고 원의 반지름의 길이가 1이므로 구하는 최댓값은

$(10+1)^2=11^2=121$ 답 121

1320 $P(\alpha,\ \beta)$, $G(x,\ y)$라 하면

$x=\dfrac{10+8+\alpha}{3}$, $y=\dfrac{0+9+\beta}{3}$

$\therefore\ \alpha=3(x-6),\ \beta=3(y-3)$ …… ㉠

점 $P(\alpha,\ \beta)$가 원 $x^2+y^2=36$ 위의 점이므로

$\alpha^2+\beta^2=36$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$9(x-6)^2+9(y-3)^2=36$

$\therefore\ (x-6)^2+(y-3)^2=4$

따라서 무게중심 G의 자취는 중심이 점 $(6,\ 3)$이고 반지름의 길이가 2인 원이므로 $a=6,\ b=3,\ r=2$

$\therefore\ a+b+r=11$ 답 11

1321 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{OA}^2=\overline{OP}^2+\overline{AP}^2$

$P(x,\ y)$라 하면

$4^2=x^2+y^2+(x-4)^2+y^2,\qquad x^2+y^2-4x=0$

$\therefore\ (x-2)^2+y^2=4$

이때 세 점 O, A, P가 삼각형을 이루려면 세 점이 한 직선 위에 있지 않아야 한다.
따라서 $y\neq0$이어야 하므로 구하는 자취의 방정식은

$(x-2)^2+y^2=4\ (y\neq0)$ 답 ③

다른 풀이 $\angle OPA=90°$이므로 점 $P(x,\ y)$는 $\overline{OA}$를 지름으로 하는 원 위의 점이다.
$\overline{OA}$의 중점의 좌표는 $(2,\ 0)$이고 $\dfrac{1}{2}\overline{OA}=2$이므로 점 P의 자취의 방정식은

$(x-2)^2+y^2=4\ (y\neq0)$

1322 주어진 조건을 만족시키는 점을 $P(x,\ y)$라 하면
$\overline{AP}:\overline{BP}=1:2$이므로

$2\overline{AP}=\overline{BP},\qquad 4\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$

$4\{(x-3)^2+(y+1)^2\}=(x+3)^2+(y-5)^2$

$x^2+y^2-10x+6y+2=0$

$\therefore\ (x-5)^2+(y+3)^2=32$

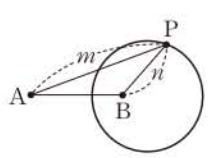
따라서 구하는 원의 반지름의 길이는 $4\sqrt{2}$이다. 답 ④

SSEN 특강 아폴로니오스의 원

평면 위의 두 점 A, B에 대하여

$\overline{AP}:\overline{BP}=m:n$
$(m>0,\ n>0,\ m\neq n)$

인 점 P의 자취는 $\overline{AB}$를 $m:n$으로 내분하는 점과 $m:n$으로 외분하는 점을 지름의 양 끝 점으로 하는 원이다.
이 원을 아폴로니오스(Apollonios)의 원이라 한다.



1323 주어진 조건을 만족시키는 점을 $P(x,\ y)$라 하면
$\overline{AP}:\overline{BP}=3:2$이므로

$2\overline{AP}=3\overline{BP},\qquad 4\overline{AP}^2=9\overline{BP}^2$

$4\{(x+2)^2+(y-2)^2\}=9\{(x-3)^2+(y-2)^2\}$

$x^2+y^2-14x-4y+17=0$

$\therefore\ (x-7)^2+(y-2)^2=36$

따라서 구하는 원의 중심의 좌표는 $(7,\ 2)$이다. 답 $(7,\ 2)$

1324 $P(x,\ y)$라 하면 $\overline{AP}:\overline{BP}=2:1$이므로

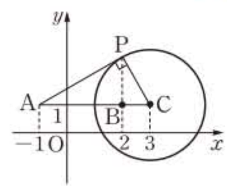
$\overline{AP}=2\overline{BP},\qquad \overline{AP}^2=4\overline{BP}^2$

$(x+1)^2+(y-1)^2=4\{(x-2)^2+(y-1)^2\}$

$x^2+y^2-6x-2y+6=0$

$\therefore\ (x-3)^2+(y-1)^2=4$ ⋯ ❶

따라서 점 P는 중심이 점 $(3,\ 1)$이고 반지름의 길이가 2인 원 위를 움직인다.



$\angle PAB$의 크기가 최대가 되는 것은 오른쪽 그림과 같이 직선 AP가 원에 접할 때이므로 원의 중심을 C라 하면 직각삼각형 PAC에서

$\overline{AP}=\sqrt{\overline{AC}^2-\overline{PC}^2}=\sqrt{4^2-2^2}=2\sqrt{3}$ ⋯ ❷

답 $2\sqrt{3}$

채점 기준	비율
❶ 점 P의 자취의 방정식을 구할 수 있다.	50 %
❷ $\angle PAB$의 크기가 최대일 때 $\overline{AP}$의 길이를 구할 수 있다.	50 %

유형 11 두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식

본책 191쪽

두 점에서 만나는 두 원 $x^2+y^2+ax+by+c=0$,
$x^2+y^2+a'x+b'y+c'=0$의 교점을 지나는 직선의 방정식은
$(a-a')x+(b-b')y+c-c'=0$

1325 $x^2+(y+a)^2=4$에서 $\qquad x^2+y^2+2ay+a^2-4=0$
$(x+1)^2+y^2=9$에서 $\qquad x^2+y^2+2x-8=0$
따라서 두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$x^2+y^2+2ay+a^2-4-(x^2+y^2+2x-8)=0$

$-2x+2ay+a^2+4=0$

$\therefore\ 2x-2ay-a^2-4=0$

이 직선이 직선 $2x+y=1$과 수직이므로

$2\cdot2+(-2a)\cdot1=0\qquad \therefore\ a=2$ 답 ④

SSEN 특강 두 직선이 수직일 조건

두 직선 $ax+by+c=0$, $a'x+b'y+c'=0$이 수직이면
$aa'+bb'=0$

1326 두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$x^2+y^2+ax+y-1-(x^2+y^2-x+ay+1)=0$

$\therefore\ (a+1)x+(1-a)y-2=0$

이 직선이 점 (2, 3)을 지나므로

$2(a+1)+3(1-a)-2=0$

$-a+3=0 \qquad \therefore a=3$

답 3

1327 원 $x^2+y^2+3ax+2y+a=0$이 원 $x^2+y^2+6x-2y+6=0$의 둘레를 이등분하려면 두 원의 공통인 현이 원 $x^2+y^2+6x-2y+6=0$의 지름이어야 한다.

두 원의 공통인 현의 방정식은

$x^2+y^2+3ax+2y+a-(x^2+y^2+6x-2y+6)=0$

$\therefore (3a-6)x+4y+a-6=0 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

$x^2+y^2+6x-2y+6=0$에서

$(x+3)^2+(y-1)^2=4 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

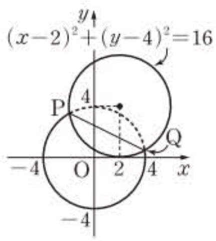
직선 ㉠이 원 ㉡의 중심 $(-3, 1)$을 지나야 하므로

$-3(3a-6)+4+a-6=0$

$-8a+16=0 \qquad \therefore a=2$

답 2

1328 $\overset{\frown}{PQ}$는 오른쪽 그림과 같이 점 (2, 0)에서 x축에 접하고 반지름의 길이가 4인 원의 일부이므로 그 원의 방정식은



$(x-2)^2+(y-4)^2=16$

이때 $\overline{PQ}$는 두 원 $x^2+y^2=16$, $(x-2)^2+(y-4)^2=16$의 공통인 현이므로 직선 PQ의 방정식은

$x^2+y^2-16-\{(x-2)^2+(y-4)^2-16\}=0$

$\therefore x+2y-5=0$

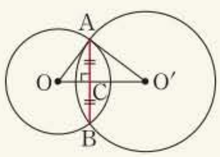
따라서 두 점 P, Q를 지나는 직선의 x절편은 5이다.

답 5

유형 12 공통인 현의 길이

본책 192쪽

두 원 O, O'의 교점을 A, B, $\overline{OO'}$과 $\overline{AB}$의 교점을 C라 할 때, $\overline{AB}$의 길이는 다음과 같은 순서로 구한다.



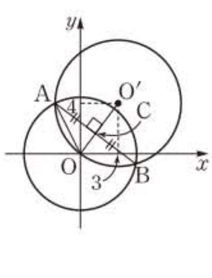
(i) 직선 AB의 방정식을 구한다.

(ii) 점과 직선 사이의 거리를 구하는 공식을 이용하여 $\overline{OC}$ 또는 $\overline{O'C}$의 길이를 구한다.

(iii) △OAC 또는 △O′AC에서 피타고라스 정리를 이용하여 $\overline{AC}$의 길이를 구한다.

(iv) $\overline{AB}=2\overline{AC}$임을 이용하여 $\overline{AB}$의 길이를 구한다.

1329 오른쪽 그림과 같이 두 원 $x^2+y^2=20$, $(x-3)^2+(y-4)^2=25$의 중심을 각각 O, O′이라 하고, 두 원의 교점을 A, B, $\overline{OO'}$과 $\overline{AB}$의 교점을 C라 하자.



$(x-3)^2+(y-4)^2=25$에서

$x^2+y^2-6x-8y=0$

이므로 두 원의 공통인 현의 방정식은

$x^2+y^2-20-(x^2+y^2-6x-8y)=0$

$6x+8y-20=0 \qquad \therefore 3x+4y-10=0$

$\therefore \overline{OC}=\dfrac{|-10|}{\sqrt{3^2+4^2}}=2$

직각삼각형 OAC에서

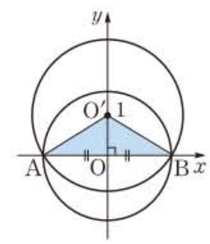
$\overline{AC}=\sqrt{(2\sqrt{5})^2-2^2}=4$ — 원 $x^2+y^2=20$의 반지름의 길이

따라서 공통인 현의 길이는

$\overline{AB}=2\overline{AC}=8$

답 ④

1330 $x^2+(y-1)^2=4$에서



$x^2+y^2-2y-3=0$

이므로 두 원의 공통인 현의 방정식은

$x^2+y^2-3-(x^2+y^2-2y-3)=0$

$2y=0 \qquad \therefore y=0$

원 O의 반지름의 길이가 $\sqrt{3}$이므로

$\overline{AO}=\sqrt{3}$

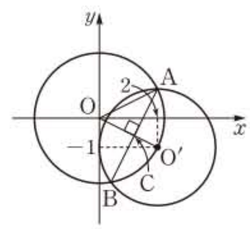
$\therefore \overline{AB}=2\overline{AO}=2\sqrt{3}$

$\therefore \triangle O'AB=\dfrac{1}{2}\cdot\overline{AB}\cdot\overline{OO'}=\dfrac{1}{2}\cdot2\sqrt{3}\cdot1=\sqrt{3}$

답 $\sqrt{3}$

1331 두 원의 교점을 지나는 원의 넓이가 최소가 되려면 공통인 현이 그 원의 지름이어야 한다.

오른쪽 그림과 같이 두 원 $x^2+y^2=5$, $(x-2)^2+(y+1)^2=4$의 중심을 각각 O, O′이라 하고, 두 원의 교점을 A, B, $\overline{OO'}$과 $\overline{AB}$의 교점을 C라 하자.



$(x-2)^2+(y+1)^2=4$에서

$x^2+y^2-4x+2y+1=0$

이므로 두 원의 공통인 현의 방정식은

$x^2+y^2-5-(x^2+y^2-4x+2y+1)=0$

$4x-2y-6=0 \qquad \therefore 2x-y-3=0$

$\therefore \overline{OC}=\dfrac{|-3|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$

직각삼각형 OAC에서

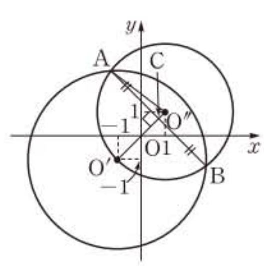
$\overline{AC}=\sqrt{(\sqrt{5})^2-\left(\dfrac{3\sqrt{5}}{5}\right)^2}=\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$

즉 넓이가 최소인 원의 반지름의 길이가 $\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$이므로 구하는 넓이는

$\pi\cdot\left(\dfrac{4\sqrt{5}}{5}\right)^2=\dfrac{16}{5}\pi$

답 $\dfrac{16}{5}\pi$

1332 오른쪽 그림과 같이 두 원 $x^2+y^2+2x+2y+k=0$, $x^2+y^2-2x-2y-6=0$의 중심을 각각 O′, O″이라 하고, 두 원의 교점을 A, B, $\overline{O'O''}$과 $\overline{AB}$의 교점을 C라 하자.



$x^2+y^2-2x-2y-6=0$에서

$(x-1)^2+(y-1)^2=8$

11 원의 방정식

$\therefore O''(1, 1)$, $\overline{O''A}=2\sqrt{2}$

$\overline{AB}=2\sqrt{6}$이므로

$$\overline{AC}=\frac{1}{2}\overline{AB}=\sqrt{6}$$

직각삼각형 O″AC에서

$$\overline{O''C}=\sqrt{(2\sqrt{2})^2-(\sqrt{6})^2}=\sqrt{2} \quad \cdots\cdots \text{㉠}$$

한편 두 원의 공통인 현의 방정식은

$$x^2+y^2+2x+2y+k-(x^2+y^2-2x-2y-6)=0$$

$$\therefore 4x+4y+k+6=0$$

$$\therefore \overline{O''C}=\frac{|4+4+k+6|}{\sqrt{4^2+4^2}}=\frac{|14+k|}{4\sqrt{2}} \quad \cdots\cdots \text{㉡}$$

㉠, ㉡에서 $\dfrac{|14+k|}{4\sqrt{2}}=\sqrt{2}$

$|14+k|=8$, $\quad 14+k=\pm 8$

$\therefore k=-22$ 또는 $k=-6$

따라서 모든 상수 k의 값의 합은 -28이다. 답 ④

유형 13 두 원의 교점을 지나는 원의 방정식 본책 192쪽

두 원 $x^2+y^2+Ax+By+C=0$, $x^2+y^2+A'x+B'y+C'=0$의 교점을 지나는 원의 방정식을

$$x^2+y^2+Ax+By+C+k(x^2+y^2+A'x+B'y+C')=0 \quad (k\neq-1)$$

으로 놓고 원이 지나는 점의 좌표를 대입하여 k의 값을 구한다.

1333 두 원의 교점을 지나는 원의 방정식을

$$x^2+y^2-4x-6y+8+k(x^2+y^2-2x)=0\ (k\neq-1) \quad \cdots\cdots \text{㉠}$$

이라 하면 이 원이 점 $(0, 1)$을 지나므로

$3+k=0 \quad \therefore k=-3$

$k=-3$을 ㉠에 대입하여 정리하면

$$x^2+y^2-x+3y-4=0$$

$$\therefore \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{3}{2}\right)^2=\frac{13}{2}$$

따라서 구하는 원의 넓이는 $\frac{13}{2}\pi$이다. 답 $\frac{13}{2}\pi$

1334 두 원의 교점을 지나는 원의 방정식을

$$x^2+y^2+2x-4+k(x^2+y^2+ax-4y+4)=0\ (k\neq-1) \quad \cdots\cdots \text{㉠}$$

이라 하면 이 원이 원점을 지나므로

$-4+4k=0 \quad \therefore k=1$

$k=1$을 ㉠에 대입하여 정리하면

$$2x^2+2y^2+(2+a)x-4y=0$$

$$\therefore \left(x+\frac{2+a}{4}\right)^2+(y-1)^2=\frac{a^2+4a+20}{16} \quad \cdots ❶$$

원의 넓이가 5π이므로

$$\frac{a^2+4a+20}{16}=5, \quad a^2+4a-60=0$$

$$(a+10)(a-6)=0 \quad \therefore a=6\ (\because a>0) \quad \cdots ❷$$

답 6

채점 기준	비율
❶ 주어진 두 원의 교점과 원점을 지나는 원의 방정식을 구할 수 있다.	60 %
❷ 양수 a의 값을 구할 수 있다.	40 %

1335 두 원의 교점을 지나는 원의 방정식을

$$x^2+y^2-4x+ay+2a+k(x^2+y^2-2x)=0\ (k\neq-1) \quad \cdots\cdots \text{㉠}$$

이라 하면 이 원이 두 점 $(0, 2)$, $(2, 1)$을 지나므로

$4+4a+4k=0 \quad \therefore a+k=-1 \quad \cdots\cdots$ ㉡

$-3+3a+k=0 \quad \therefore 3a+k=3 \quad \cdots\cdots$ ㉢

㉡, ㉢을 연립하여 풀면

$a=2$, $k=-3$

$a=2$, $k=-3$을 ㉠에 대입하여 정리하면

$$x^2+y^2-x-y-2=0$$

따라서 $A=-1$, $B=-1$, $C=-2$이므로

$$A+B-C=0$$

답 ①

1336 두 원의 교점을 지나는 원의 방정식을

$$x^2+y^2-8x+k(x^2+y^2+4x+2y-4)=0\ (k\neq-1)$$

이라 하면

$$(k+1)x^2+(k+1)y^2+(4k-8)x+2ky-4k=0$$

이때 $k\neq-1$이므로

$$x^2+y^2+\frac{4k-8}{k+1}x+\frac{2k}{k+1}y-\frac{4k}{k+1}=0 \quad \cdots\cdots \text{㉠}$$

이 원의 중심이 y축 위에 있으므로 원의 중심의 x좌표는 0이다.

즉 ㉠의 x의 계수가 0이어야 하므로

$$\frac{4k-8}{k+1}=0, \quad 4k-8=0$$

$$\therefore k=2$$

$k=2$를 ㉠에 대입하면

$$x^2+y^2+\frac{4}{3}y-\frac{8}{3}=0$$

$$\therefore x^2+\left(y+\frac{2}{3}\right)^2=\frac{28}{9}$$

따라서 구하는 원의 넓이는 $\frac{28}{9}\pi$이다. 답 $\frac{28}{9}\pi$

유형 14 원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만날 때 본책 193쪽

원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나려면

① 원의 중심과 직선 사이의 거리를 d, 원의 반지름의 길이를 r라 할 때 ➡ $d<r$

② 원의 방정식과 직선의 방정식에서 한 문자를 소거하여 얻은 이차방정식의 판별식을 D라 할 때 ➡ $D>0$

1337 원의 중심 $(3, 0)$과 직선 $y=-2x+k$, 즉 $2x+y-k=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|6-k|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{|6-k|}{\sqrt{5}}$$

원의 반지름의 길이가 $\sqrt{5}$이므로 원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나려면

$$\frac{|6-k|}{\sqrt{5}}<\sqrt{5}, \qquad |6-k|<5$$

$$-5<6-k<5, \qquad -11<-k<-1$$

$$\therefore 1<k<11$$

따라서 정수 k는 2, 3, 4, …, 10의 9개이다. 답 9

다른 풀이 $y=-2x+k$를 $(x-3)^2+y^2=5$에 대입하면

$$(x-3)^2+(-2x+k)^2=5$$

$$\therefore 5x^2-2(2k+3)x+k^2+4=0$$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면 원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나므로

$$\frac{D}{4}=\{-(2k+3)\}^2-5(k^2+4)>0, \qquad k^2-12k+11<0$$

$$(k-1)(k-11)<0 \qquad \therefore 1<k<11$$

1338 원의 중심 (3, 2)와 직선 $3x+4y+5=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|9+8+5|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{22}{5}$$

원의 반지름의 길이가 r이므로 원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나려면

$$r>\frac{22}{5}$$

따라서 자연수 r의 최솟값은 5이다. 답 ③

1339 원의 중심 (0, 0)과 직선 $y=mx-4$, 즉 $mx-y-4=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|-4|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\frac{4}{\sqrt{m^2+1}}$$

원의 반지름의 길이가 2이므로 원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나려면

$$\frac{4}{\sqrt{m^2+1}}<2, \qquad \sqrt{m^2+1}>2, \qquad m^2>3$$

$\therefore m<-\sqrt{3}$ 또는 $m>\sqrt{3}$ 답 $m<-\sqrt{3}$ 또는 $m>\sqrt{3}$

다른 풀이 $y=mx-4$를 $x^2+y^2=4$에 대입하면

$$x^2+(mx-4)^2=4$$

$$\therefore (1+m^2)x^2-8mx+12=0$$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면 원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나므로

$$\frac{D}{4}=(-4m)^2-12(1+m^2)>0$$

$m^2>3 \qquad \therefore m<-\sqrt{3}$ 또는 $m>\sqrt{3}$

1340 원의 중심 $(a, 1)$과 직선 $3x-4y-a=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|3a-4-a|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{|2a-4|}{5}$$

원의 반지름의 길이가 2이므로 원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나려면

$$\frac{|2a-4|}{5}<2, \qquad |2a-4|<10$$

$$-10<2a-4<10 \qquad \therefore -3<a<7$$

따라서 모든 정수 a의 값의 합은

$$-2+(-1)+0+\cdots+5+6=18$$

답 18

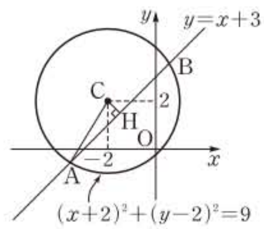
유형 15 현의 길이

본책 193쪽

반지름의 길이가 r인 원의 중심에서 d만큼 떨어진 현의 길이를 l이라 하면

$$l=2\sqrt{r^2-d^2}$$

1341 오른쪽 그림과 같이 주어진 원의 중심을 C(−2, 2)라 하고, 점 C에서 직선 $y=x+3$, 즉 $x-y+3=0$에 내린 수선의 발을 H라 하면



$$\overline{CH}=\frac{|-2-2+3|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

직각삼각형 CAH에서

$$\overline{AH}=\sqrt{\underbrace{3^2}_{\text{원의 반지름의 길이}}-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{34}}{2}$$

$\therefore \overline{AB}=2\overline{AH}=\sqrt{34}$ 답 ②

SSEN 특강 현의 성질

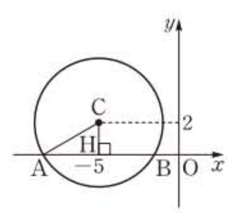
① 원의 중심에서 현에 내린 수선은 그 현을 이등분한다.
또 원에서 현의 수직이등분선은 그 원의 중심을 지난다.

② 한 원 또는 합동인 두 원에서 중심으로부터 같은 거리에 있는 두 현의 길이는 같다.
또 한 원 또는 합동인 두 원에서 길이가 같은 두 현은 원의 중심으로부터 같은 거리에 있다.

1342 $x^2+y^2+10x-4y+9=0$에서

$$(x+5)^2+(y-2)^2=20$$

오른쪽 그림과 같이 이 원의 중심을 C(−5, 2)라 하고 원과 x축의 교점을 A, B라 하자.



점 C에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\overline{CH}=2$$

직각삼각형 CAH에서

$$\overline{AH}=\sqrt{20-2^2}=4$$

따라서 구하는 현의 길이는

$$\overline{AB}=2\overline{AH}=8$$

답 8

다른 풀이 $y=0$을 $x^2+y^2+10x-4y+9=0$에 대입하면

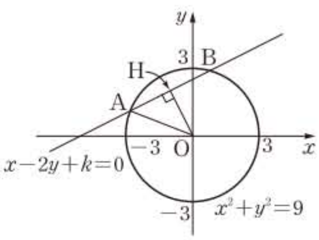
$$x^2+10x+9=0, \qquad (x+9)(x+1)=0$$

$\therefore x=-9$ 또는 $x=-1$

따라서 주어진 원이 x축과 두 점 (−9, 0), (−1, 0)에서 만나므로 구하는 현의 길이는

$$|-1-(-9)|=8$$

1343 오른쪽 그림과 같이 주어진 원과 직선의 두 교점을 A, B라 하고, 원의 중심 O에서 직선 $x-2y+k=0$에 내린 수선의 발을 H라 하면



$\overline{AH}=\frac{1}{2}\overline{AB}=\frac{1}{2}\cdot 4=2$

직각삼각형 OAH에서

$\overline{OH}=\sqrt{3^2-2^2}=\sqrt{5}$ ······ ㉠

또 점 O(0, 0)과 직선 $x-2y+k=0$ 사이의 거리는

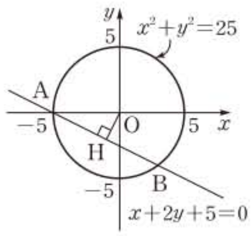
$\overline{OH}=\frac{|k|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\frac{|k|}{\sqrt{5}}$ ······ ㉡

㉠, ㉡에서 $\frac{|k|}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$, $|k|=5$

$\therefore k=5$ ($\because k>0$)

답 ⑤

1344 오른쪽 그림과 같이 주어진 원과 직선의 두 교점을 A, B라 하면 두 점 A, B를 지나는 원 중에서 넓이가 최소인 것은 $\overline{AB}$를 지름으로 하는 원이다. ··· ❶



원의 중심 O에서 직선 $x+2y+5=0$에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{OH}=\frac{|5|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\sqrt{5}$ ··· ❷

직각삼각형 OAH에서

$\overline{AH}=\sqrt{5^2-(\sqrt{5})^2}=2\sqrt{5}$ ··· ❸

따라서 구하는 원의 넓이는 (중심이 점 H이고, 반지름이 $\overline{AH}$인 원)

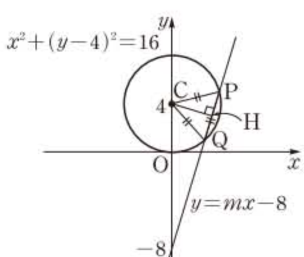
$\pi\cdot(2\sqrt{5})^2=20\pi$ ··· ❹

답 20π

채점 기준	비율
❶ $\overline{AB}$를 지름으로 하는 원이 넓이가 최소인 원임을 알 수 있다.	30 %
❷ $\overline{OH}$의 길이를 구할 수 있다.	30 %
❸ $\overline{AH}$의 길이를 구할 수 있다.	30 %
❹ 넓이가 최소인 원의 넓이를 구할 수 있다.	10 %

1345 $x^2+y^2-8y=0$에서

$x^2+(y-4)^2=16$



이므로 이 원과 직선 $y=mx-8$을 좌표평면 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.

이때 $\overline{CP}$, $\overline{CQ}$는 원의 반지름이므로

$\overline{CP}=\overline{CQ}=4$

따라서 △CPQ가 정삼각형이려면 $\overline{PQ}=4$이어야 한다.

원의 중심 C에서 $\overline{PQ}$에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{PH}=\frac{1}{2}\overline{PQ}=2$

직각삼각형 CPH에서

$\overline{CH}=\sqrt{4^2-2^2}=2\sqrt{3}$ ······ ㉠

또 점 C(0, 4)와 직선 $y=mx-8$, 즉 $mx-y-8=0$ 사이의 거리는

$\overline{CH}=\frac{|-4-8|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\frac{12}{\sqrt{m^2+1}}$ ······ ㉡

㉠, ㉡에서 $\frac{12}{\sqrt{m^2+1}}=2\sqrt{3}$, $6=\sqrt{3m^2+3}$

양변을 제곱하면

$36=3m^2+3$, $m^2=11$

$\therefore m=\sqrt{11}$ ($\because m>0$)

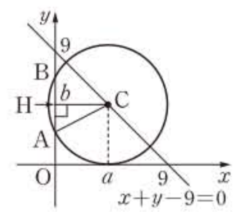
답 $\sqrt{11}$

1346 원 C가 x축에 접하므로 원의 방정식을

$(x-a)^2+(y-b)^2=b^2$ ($a>0$, $b>0$) (원 C의 중심이 제1사분면 위에 있다.)

이라 하자.

오른쪽 그림과 같이 원 C와 y축의 두 교점을 A, B라 하고, 원의 중심 C에서 y축에 내린 수선의 발을 H라 하면



$\overline{AH}=\frac{1}{2}\overline{AB}=\frac{1}{2}\cdot 6=3$

직각삼각형 ACH에서

$b^2=a^2+9$ ······ ㉠

또 점 C(a, b)가 직선 $x+y-9=0$ 위에 있으므로

$a+b-9=0$ ······ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=4$, $b=5$

따라서 구하는 원의 반지름의 길이는 5이다.

답 ①

유형 **16** **원과 직선이 접할 때** 본책 194쪽

원과 직선이 접하려면
① 원의 중심과 직선 사이의 거리를 d, 원의 반지름의 길이를 r라 할 때 ➡ $d=r$
② 원의 방정식과 직선의 방정식에서 한 문자를 소거하여 얻은 이차방정식의 판별식을 D라 할 때 ➡ $D=0$

1347 원의 중심 $(1, -3)$과 직선 $x+3y+k=0$ 사이의 거리는

$\frac{|1-9+k|}{\sqrt{1^2+3^2}}=\frac{|-8+k|}{\sqrt{10}}$

원의 반지름의 길이가 $\sqrt{10}$이므로 원과 직선이 접하려면

$\frac{|-8+k|}{\sqrt{10}}=\sqrt{10}$, $|-8+k|=10$

$-8+k=\pm 10$ $\therefore k=18$ ($\because k>0$)

답 ⑤

다른 풀이 $x=-3y-k$를 $(x-1)^2+(y+3)^2=10$에 대입하면

$(-3y-k-1)^2+(y+3)^2=10$

$\therefore 10y^2+6(k+2)y+k^2+2k=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면 원과 직선이 접하므로

$\frac{D}{4}=9(k+2)^2-10(k^2+2k)=0$

$k^2-16k-36=0$, $(k+2)(k-18)=0$

$\therefore k=18$ ($\because k>0$)

1348 원의 중심 $(0,\ 0)$과 직선 $y=x+2\sqrt{2}$, 즉 $x-y+2\sqrt{2}=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|2\sqrt{2}|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=2$$

원의 반지름의 길이가 r이므로 원과 직선이 접하려면

$r=2$ 답 2

1349 원의 반지름의 길이를 r라 하면

$\pi r^2=12\pi \qquad \therefore r=2\sqrt{3}\ (\because r>0)$

원의 중심 $(1,\ -3)$과 직선 $x+y+k=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|1-3+k|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{|-2+k|}{\sqrt{2}}$$

이므로 원과 직선이 접하려면

$$\frac{|-2+k|}{\sqrt{2}}=2\sqrt{3}, \qquad |-2+k|=2\sqrt{6}$$

$-2+k=\pm 2\sqrt{6} \qquad \therefore k=2\pm 2\sqrt{6}$

따라서 모든 실수 k의 값의 합은

$(2+2\sqrt{6})+(2-2\sqrt{6})=4$ 답 ⑤

1350 원의 중심의 좌표를 $(a,\ 2a)$라 하면 원의 중심과 두 직선 $x-2y+1=0$, $x-2y-6=0$ 사이의 거리는 모두 원의 반지름의 길이와 같으므로

$$\frac{|a-4a+1|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\frac{|a-4a-6|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}$$

$|-3a+1|=|-3a-6|$

$-3a+1=-3a-6$을 만족시키는 a의 값은 존재하지 않으므로

$-3a+1=-(-3a-6), \qquad -6a=5$

$\therefore a=-\frac{5}{6}$ ··· ❶

원의 중심의 좌표가 $\left(-\frac{5}{6},\ -\frac{5}{3}\right)$이므로 원의 반지름의 길이는

$$\frac{\left|-\frac{5}{6}+\frac{10}{3}+1\right|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\frac{7\sqrt{5}}{10}$$ ··· ❷

따라서 원의 방정식은 $\left(x+\frac{5}{6}\right)^2+\left(y+\frac{5}{3}\right)^2=\frac{49}{20}$ ··· ❸

답 $\left(x+\frac{5}{6}\right)^2+\left(y+\frac{5}{3}\right)^2=\frac{49}{20}$

채점 기준	비율
❶ 원의 중심의 x좌표를 구할 수 있다.	50 %
❷ 원의 반지름의 길이를 구할 수 있다.	30 %
❸ 원의 방정식을 구할 수 있다.	20 %

1351 원의 중심이 제4사분면 위에 있고 x축, y축에 동시에 접하므로 원의 반지름의 길이를 r라 하면 원의 중심의 좌표는 $(r,\ -r)$이다.

원의 중심 $(r,\ -r)$와 직선 $3x-4y-6=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|3r+4r-6|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{|7r-6|}{5}$$

이므로 원과 직선이 접하려면

$$\frac{|7r-6|}{5}=r, \qquad |7r-6|=5r$$

$7r-6=\pm 5r, \qquad 12r=6$ 또는 $2r=6$

$\therefore r=\frac{1}{2}$ 또는 $r=3$

따라서 두 원의 반지름의 길이의 합은

$\frac{1}{2}+3=\frac{7}{2}$ 답 $\frac{7}{2}$

1352 a, b는 0 또는 1 또는 2이므로 $a+b=3$이려면

$a=1,\ b=2$ 또는 $a=2,\ b=1$ 원과 직선이 세 점에서 만나는 경우는 존재하지 않는다.

이어야 한다.

(i) $a=1,\ b=2$일 때,

직선 $y=-x+k$, 즉 $x+y-k=0$이 원 $(x-1)^2+y^2=1$에 접해야 하므로

중심: $(1,\ 0)$
반지름의 길이: 1

$$\frac{|1-k|}{\sqrt{1^2+1^2}}=1, \qquad |1-k|=\sqrt{2}$$

$1-k=\pm\sqrt{2} \qquad \therefore k=1\pm\sqrt{2}$ ······ ㉠

또 직선 $x+y-k=0$이 원 $(x+1)^2+(y-1)^2=1$과 서로 다른 두 점에서 만나야 하므로

중심: $(-1,\ 1)$
반지름의 길이: 1

$$\frac{|-1+1-k|}{\sqrt{1^2+1^2}}<1, \qquad |k|<\sqrt{2}$$

$\therefore -\sqrt{2}<k<\sqrt{2}$ ······ ㉡

㉠, ㉡에서 $k=1-\sqrt{2}$

(ii) $a=2,\ b=1$일 때,

직선 $x+y-k=0$이 원 $(x-1)^2+y^2=1$과 서로 다른 두 점에서 만나야 하므로

$$\frac{|1-k|}{\sqrt{1^2+1^2}}<1, \qquad |1-k|<\sqrt{2}$$

$\therefore 1-\sqrt{2}<k<1+\sqrt{2}$ ······ ㉢

또 직선 $x+y-k=0$이 원 $(x+1)^2+(y-1)^2=1$에 접해야 하므로

$$\frac{|-1+1-k|}{\sqrt{1^2+1^2}}=1, \qquad |k|=\sqrt{2}$$

$\therefore k=\pm\sqrt{2}$ ······ ㉣

㉢, ㉣에서 $k=\sqrt{2}$

(i), (ii)에서 구하는 모든 실수 k의 값의 합은

$(1-\sqrt{2})+\sqrt{2}=1$ 답 1

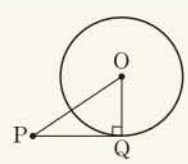
유형 17 접선의 길이

본책 195쪽

원 밖의 한 점 P에서 원에 그은 접선의 접점을 Q라 하면

➡ 직각삼각형 OPQ에서

$\overline{PQ}=\sqrt{\overline{OP}^2-\overline{OQ}^2}$



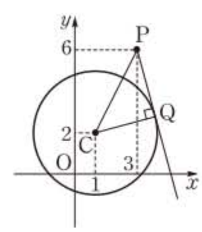
1353 원의 중심을 C라 하면 C(1, 2)이므로

$\overline{CP}=\sqrt{(3-1)^2+(6-2)^2}=2\sqrt{5}$

직각삼각형 CQP에서

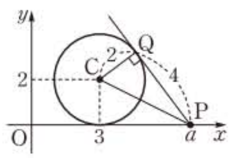
$\overline{PQ}=\sqrt{\overline{CP}^2-\overline{CQ}^2}$

$=\sqrt{(2\sqrt{5})^2-3^2}=\sqrt{11}$ 답 ②



1354 $x^2+y^2-6x-4y+9=0$에서

$(x-3)^2+(y-2)^2=4$



원의 중심을 C라 하면 C(3, 2)이므로

$\overline{CP}=\sqrt{(a-3)^2+(-2)^2}$

$=\sqrt{a^2-6a+13}$

접점을 Q라 하면 직각삼각형 CPQ에서 $\overline{CP}^2=\overline{CQ}^2+\overline{PQ}^2$이므로

$a^2-6a+13=2^2+4^2, \qquad a^2-6a-7=0$

$(a+1)(a-7)=0 \qquad \therefore a=7\ (\because a>0)$

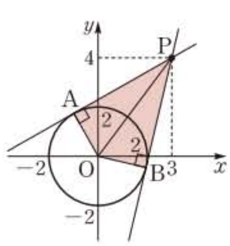
답 7

다른 풀이 R(3, 0)이라 하면 $\overline{PR}=4$이므로

$|a-3|=4, \qquad a-3=\pm4 \qquad \therefore a=7\ (\because a>0)$

1355 원의 중심이 O(0, 0)이므로

$\overline{OP}=\sqrt{3^2+4^2}=5$



직각삼각형 OPA에서

$\overline{AP}=\sqrt{\overline{OP}^2-\overline{OA}^2}$

$=\sqrt{5^2-2^2}=\sqrt{21}$

이때 △OPA≡△OPB (RHS 합동)

이므로

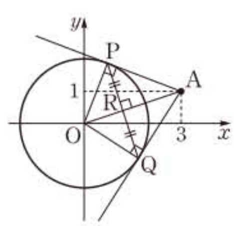
□AOBP=2△OPA

$=2\cdot\frac{1}{2}\cdot2\cdot\sqrt{21}=2\sqrt{21}$

답 ②

1356 원의 중심이 O(0, 0)이고 반지름의 길이가 2이므로

$\overline{OP}=2,\ \overline{OA}=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$



직각삼각형 OAP에서

$\overline{AP}=\sqrt{\overline{OA}^2-\overline{OP}^2}$

$=\sqrt{(\sqrt{10})^2-2^2}=\sqrt{6}$ ··· ❶

$\overline{OA}$와 $\overline{PQ}$의 교점을 R라 하면 $\overline{OA}\perp\overline{PQ}$이므로 △OAP의 넓이에서

$\frac{1}{2}\cdot\overline{AP}\cdot\overline{OP}=\frac{1}{2}\cdot\overline{OA}\cdot\overline{PR}$

$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{6}\cdot2=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{10}\cdot\overline{PR} \qquad \therefore \overline{PR}=\frac{2\sqrt{15}}{5}$

$\therefore \overline{PQ}=2\overline{PR}=\frac{4\sqrt{15}}{5}$ ··· ❷

답 $\frac{4\sqrt{15}}{5}$

채점 기준	비율
❶ $\overline{AP}$의 길이를 구할 수 있다.	40 %
❷ $\overline{PQ}$의 길이를 구할 수 있다.	60 %

유형 18 원과 직선이 만나지 않을 때

본책 195쪽

원과 직선이 만나지 않으려면

① 원의 중심과 직선 사이의 거리를 d, 원의 반지름의 길이를 r라 할 때 ➡ $d>r$

② 원의 방정식과 직선의 방정식에서 한 문자를 소거하여 얻은 이차방정식의 판별식을 D라 할 때 ➡ $D<0$

1357 원의 중심 (0, 0)과 직선 $y=k(x-3)$, 즉 $kx-y-3k=0$ 사이의 거리는

$\frac{|-3k|}{\sqrt{k^2+(-1)^2}}=\frac{|3k|}{\sqrt{k^2+1}}$

원의 반지름의 길이가 1이므로 원과 직선이 만나지 않으려면

$\frac{|3k|}{\sqrt{k^2+1}}>1, \qquad |3k|>\sqrt{k^2+1}$

양변을 제곱하면

$9k^2>k^2+1, \qquad k^2>\frac{1}{8}$

$\therefore k<-\frac{\sqrt{2}}{4}$ 또는 $k>\frac{\sqrt{2}}{4}$

답 $k<-\frac{\sqrt{2}}{4}$ 또는 $k>\frac{\sqrt{2}}{4}$

다른 풀이 $y=k(x-3)$을 $x^2+y^2=1$에 대입하면

$x^2+k^2(x-3)^2=1$

$\therefore (1+k^2)x^2-6k^2x+9k^2-1=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면 원과 직선이 만나지 않으므로

$\frac{D}{4}=(-3k^2)^2-(1+k^2)(9k^2-1)<0$

$-8k^2+1<0, \qquad k^2>\frac{1}{8}$

$\therefore k<-\frac{\sqrt{2}}{4}$ 또는 $k>\frac{\sqrt{2}}{4}$

1358 원의 중심 $(0, k)$와 직선 $x-y-1=0$ 사이의 거리는

$\frac{|-k-1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{|k+1|}{\sqrt{2}}$

원의 반지름의 길이가 $3\sqrt{2}$이므로 원과 직선이 만나지 않으려면

$\frac{|k+1|}{\sqrt{2}}>3\sqrt{2}, \qquad |k+1|>6$

$k+1<-6$ 또는 $k+1>6$

$\therefore k<-7$ 또는 $k>5$

따라서 $\alpha=-7,\ \beta=5$이므로

$\alpha^2+\beta^2=74$

답 ④

1359 두 점 (0, −3), (4, 1)을 지름의 양 끝 점으로 하는 원의 중심의 좌표는

$\left(\frac{4}{2}, \frac{-3+1}{2}\right)$, 즉 $(2, -1)$

이고 반지름의 길이는

$\frac{1}{2}\sqrt{4^2+(1+3)^2}=2\sqrt{2}$ ··· ❶

원의 중심 $(2, -1)$과 직선 $y=x+k$, 즉 $x-y+k=0$ 사이의 거리는

$\frac{|2+1+k|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{|3+k|}{\sqrt{2}}$ ··· ❷

이므로 원과 직선이 만나지 않으려면

$\frac{|3+k|}{\sqrt{2}}>2\sqrt{2}, \qquad |3+k|>4$

$3+k<-4$ 또는 $3+k>4$

$\therefore k<-7$ 또는 $k>1$

따라서 자연수 k의 최솟값은 2이다. ···➌

답 2

채점 기준	비율
➊ 원의 중심의 좌표와 반지름의 길이를 구할 수 있다.	40 %
➋ 원의 중심과 직선 사이의 거리를 식으로 나타낼 수 있다.	20 %
➌ 자연수 k의 최솟값을 구할 수 있다.	40 %

1360 원 $(x+2)^2+(y-3)^2=1$의 중심 $(-2,\ 3)$과 직선 $3x+4y-a=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|-6+12-a|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{|6-a|}{5}$$

이고 원의 반지름의 길이가 1이므로 원과 직선이 만나려면

서로 다른 두 점에서 만나거나 접한다.

$$\frac{|6-a|}{5}\le 1,\quad |6-a|\le 5$$

$-5\le 6-a\le 5$

$\therefore 1\le a\le 11$ ······ ㉠

원 $(x-2)^2+(y+1)^2=1$의 중심 $(2,\ -1)$과 직선 $3x+4y-a=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|6-4-a|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{|2-a|}{5}$$

이고 원의 반지름의 길이가 1이므로 원과 직선이 만나지 않으려면

$$\frac{|2-a|}{5}>1,\quad |2-a|>5$$

$2-a<-5$ 또는 $2-a>5$

$\therefore a<-3$ 또는 $a>7$ ······ ㉡

㉠, ㉡에서 $7<a\le 11$

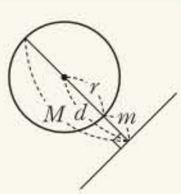
따라서 정수 a는 8, 9, 10, 11의 4개이다. 답 4

유형 19 원 위의 점과 직선 사이의 거리

본책 196쪽

원의 중심과 직선 사이의 거리를 d, 원의 반지름의 길이를 r라 할 때, 원 위의 점과 직선 사이의 거리의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하면

$M=d+r,\ m=d-r$



1361 $x^2+y^2-2x+4y-11=0$에서

$(x-1)^2+(y+2)^2=16$

원의 중심 $(1,\ -2)$와 직선 $3x-4y+14=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|3+8+14|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=5$$

원의 반지름의 길이가 4이므로

$M=5+4=9,\ m=5-4=1$

$\therefore Mm=9$ 답 ③

1362 원의 중심 $(0,\ 0)$과 직선 $4x-3y+k=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|k|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=\frac{|k|}{5}$$

원의 반지름의 길이가 5이므로 원 위의 점 P와 직선 $4x-3y+k=0$ 사이의 거리의 최댓값이 11이려면

$$\frac{|k|}{5}+5=11$$

$|k|=30\quad \therefore k=30\ (\because k>0)$ 답 30

1363 $x^2+y^2-6x+4y=0$에서

$(x-3)^2+(y+2)^2=13$

원의 중심 $(3,\ -2)$와 직선 $2x-3y+14=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|6+6+14|}{\sqrt{2^2+(-3)^2}}=2\sqrt{13}$$ ···➊

원의 반지름의 길이가 $\sqrt{13}$이므로 원 위의 점 P와 직선 $2x-3y+14=0$ 사이의 거리를 d라 하면

$2\sqrt{13}-\sqrt{13}\le d\le 2\sqrt{13}+\sqrt{13}$

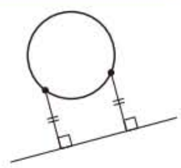
$\therefore \sqrt{13}\le d\le 3\sqrt{13}$ ···➋

따라서 정수 d는 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10이고 각각의 거리에 해당하는 점 P가 2개씩 있으므로 구하는 점 P의 개수는 14이다. ···➌

답 14

채점 기준	비율
➊ 원의 중심과 직선 사이의 거리를 구할 수 있다.	30 %
➋ d의 값의 범위를 구할 수 있다.	40 %
➌ 점 P의 개수를 구할 수 있다.	30 %

참고 오른쪽 그림과 같이 원 위의 점과 직선 사이의 거리가 최대일 때와 최소일 때를 제외하면 직선에서 같은 거리에 있는 원 위의 점이 2개씩 존재한다.



1364 원의 중심 $O(0,\ 0)$과 직선 $y=-x-4$, 즉 $x+y+4=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|4|}{\sqrt{1^2+1^2}}=2\sqrt{2}$$

원의 반지름의 길이가 $\sqrt{2}$이므로 정삼각형 ABC의 넓이가

최소일 때의 높이는 $2\sqrt{2}-\sqrt{2}=\sqrt{2}$

최대일 때의 높이는 $2\sqrt{2}+\sqrt{2}=3\sqrt{2}$

따라서 정삼각형 ABC의 넓이의 최솟값과 최댓값의 비는

$(\sqrt{2})^2:(3\sqrt{2})^2=1:9$

닮은 두 도형의 닮음비가 $m:n$이면 넓이의 비는 $m^2:n^2$이다. 답 ②

다른 풀이 높이가 $\sqrt{2}$인 정삼각형의 한 변의 길이를 a라 하면

$$\frac{\sqrt{3}}{2}a=\sqrt{2}\quad \therefore a=\frac{2\sqrt{6}}{3}$$

이 정삼각형의 넓이는

$$\frac{\sqrt{3}}{4}a^2=\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\left(\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)^2=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

같은 방법으로 하면 높이가 $3\sqrt{2}$인 정삼각형의 넓이는

$6\sqrt{3}$

따라서 정삼각형 ABC의 넓이의 최솟값과 최댓값의 비는

$$\frac{2\sqrt{3}}{3}:6\sqrt{3}=1:9$$

유형 20 기울기가 주어진 원의 접선의 방정식 본책 196쪽

① 원 $x^2+y^2=r^2$ $(r>0)$에 접하고 기울기가 m인 직선의 방정식
➡ $y=mx\pm r\sqrt{m^2+1}$

② 원 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ $(r>0)$에 접하고 기울기가 m인 직선의 방정식
➡ 접선의 방정식을 $y=mx+k$ (k는 상수)로 놓고 이 직선과 원의 중심 $(a,\ b)$ 사이의 거리가 반지름의 길이 r와 같음을 이용한다.

1365 직선 $x+2y+1=0$, 즉 $y=-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$에 수직인 직선의 기울기는 2이고, 원 $x^2+y^2=5$의 반지름의 길이는 $\sqrt{5}$이므로 구하는 접선의 방정식은

$y=2x\pm\sqrt{5}\cdot\sqrt{2^2+1}$

$\therefore y=2x\pm5$ 　　답 $y=2x\pm5$

1366 직선 $y=3x-2$에 평행한 직선의 기울기는 3이고, 원 $x^2+y^2=10$의 반지름의 길이는 $\sqrt{10}$이므로 접선의 방정식은

$y=3x\pm\sqrt{10}\cdot\sqrt{3^2+1}$　　$\therefore y=3x\pm10$

따라서 두 직선이 y축과 만나는 점의 좌표는 각각 $(0,\ 10)$, $(0,\ -10)$이므로

$\overline{PQ}=20$ 　　답 20

1367 접선의 방정식을 $y=2x+k$ (k는 상수)라 하면 원의 중심 $(-1,\ 4)$와 직선 $y=2x+k$, 즉 $2x-y+k=0$ 사이의 거리는

$\frac{|-2-4+k|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{|k-6|}{\sqrt{5}}$

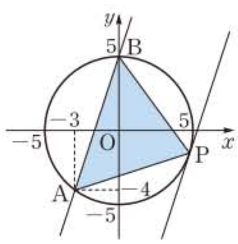
원의 반지름의 길이가 3이므로 원과 직선이 접하려면

$\frac{|k-6|}{\sqrt{5}}=3$,　　$|k-6|=3\sqrt{5}$

$k-6=\pm3\sqrt{5}$　　$\therefore k=6\pm3\sqrt{5}$

따라서 두 직선의 y절편은 각각 $6+3\sqrt{5}$, $6-3\sqrt{5}$이므로 구하는 곱은　　$(6+3\sqrt{5})(6-3\sqrt{5})=-9$ 　　답 ③

1368 △ABP의 넓이가 최대일 때는 오른쪽 그림과 같이 점 P에서의 접선이 직선 AB와 평행할 때이다.



직선 AB의 기울기는

$\frac{5-(-4)}{0-(-3)}=3$

이므로 기울기가 3인 접선의 방정식은

$y=3x\pm5\sqrt{3^2+1}$　　$\therefore y=3x\pm5\sqrt{10}$

위의 그림에서 점 P를 지나는 접선의 방정식은 $y=3x-5\sqrt{10}$이고 점 $B(0,\ 5)$와 직선 $3x-y-5\sqrt{10}=0$ 사이의 거리는

$\frac{|-5-5\sqrt{10}|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\frac{5+5\sqrt{10}}{\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{10}}{2}+5$

이때 $\overline{AB}=\sqrt{3^2+(5+4)^2}=3\sqrt{10}$이므로 △ABP의 넓이의 최댓값은

$\frac{1}{2}\cdot3\sqrt{10}\cdot\left(\frac{\sqrt{10}}{2}+5\right)=\frac{15}{2}+\frac{15}{2}\sqrt{10}$

따라서 $a=\frac{15}{2}$, $b=\frac{15}{2}$이므로　　$a+b=15$ 　　답 15

유형 21 원 위의 점에서의 접선의 방정식 본책 197쪽

① 원 $x^2+y^2=r^2$ 위의 점 $(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식
➡ $x_1x+y_1y=r^2$

② 원 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 위의 점 $(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식
➡ 원의 접선이 두 점 $(a,\ b)$, $(x_1,\ y_1)$을 지나는 직선과 수직임을 이용한다.

1369 원 $x^2+y^2=20$ 위의 점 $(a,\ b)$에서의 접선의 방정식은

$ax+by=20$

$\therefore y=-\frac{a}{b}x+\frac{20}{b}$

이 접선의 기울기가 2이므로

$-\frac{a}{b}=2$　　$\therefore a=-2b$ 　　…… ㉠

한편 점 $(a,\ b)$는 원 $x^2+y^2=20$ 위에 있으므로

$a^2+b^2=20$ 　　…… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=4$, $b=-2$ 또는 $a=-4$, $b=2$

$\therefore ab=-8$ 　　답 -8

1370 원 $x^2+y^2=34$ 위의 점 $(3,\ 5)$에서의 접선의 방정식은

$3x+5y=34$

$\therefore y=-\frac{3}{5}x+\frac{34}{5}$

이 직선과 수직인 직선의 기울기는 $\frac{5}{3}$이므로 기울기가 $\frac{5}{3}$이고 원 $x^2+y^2=34$에 접하는 직선의 방정식은

$y=\frac{5}{3}x\pm\sqrt{34}\cdot\sqrt{\left(\frac{5}{3}\right)^2+1}$

$\therefore y=\frac{5}{3}x\pm\frac{34}{3}$

따라서 y절편이 양수인 것은 $y=\frac{5}{3}x+\frac{34}{3}$이다.

답 $y=\frac{5}{3}x+\frac{34}{3}$

1371 원 $x^2+y^2=5$ 위의 점 $(1,\ 2)$에서의 접선의 방정식은

$x+2y=5$

$\therefore x+2y-5=0$ 　　…… ㉠ 　　⋯ ❶

$x^2+y^2+2x+4y+k=0$에서

$(x+1)^2+(y+2)^2=5-k$ 　　…… ㉡

원 ㉡의 중심 $(-1,\ -2)$와 직선 ㉠ 사이의 거리는

$\frac{|-1-4-5|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{10}{\sqrt{5}}=2\sqrt{5}$ 　　⋯ ❷

이때 직선 ㉠과 원 ㉡이 접하므로

$5-k=(2\sqrt{5})^2$　　$\therefore k=-15$ 　　⋯ ❸

답 -15

채점 기준	비율
❶ 원 위의 점에서의 접선의 방정식을 구할 수 있다.	30 %
❷ 원의 중심과 직선 사이의 거리를 구할 수 있다.	50 %
❸ k의 값을 구할 수 있다.	20 %

1372 원 $x^2+y^2=10$ 위의 점 $\mathrm{P}(3,\ 1)$에서의 접선의 방정식은

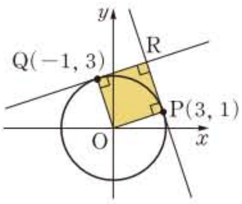
$$3x+y=10 \quad \cdots\cdots ㉠$$

원 $x^2+y^2=10$ 위의 점 $\mathrm{Q}(-1,\ 3)$에서의 접선의 방정식은

$$-x+3y=10 \quad \cdots\cdots ㉡$$

$3\cdot(-1)+1\cdot3=0$이므로 두 직선 ㉠, ㉡은 서로 수직이다.

따라서 오른쪽 그림과 같이 □OPRQ는 원의 반지름의 길이 $\sqrt{10}$을 한 변의 길이로 하는 정사각형이므로 구하는 넓이는



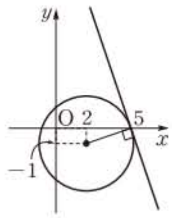
$$\sqrt{10}\cdot\sqrt{10}=10$$

답 ⑤

1373 $x^2+y^2-4x+2y-5=0$에서

$$(x-2)^2+(y+1)^2=10$$

원의 중심 $(2,\ -1)$과 점 $(5,\ 0)$을 지나는 직선의 기울기는



$$\frac{0-(-1)}{5-2}=\frac{1}{3}$$

따라서 점 $(5,\ 0)$에서의 접선의 기울기는 -3이므로 접선의 방정식은

$$y=-3(x-5) \qquad \therefore y=-3x+15$$

이 직선이 점 $(a,\ 9)$를 지나므로

$$9=-3a+15 \qquad \therefore a=2$$

답 ②

1374 원 $x^2+y^2=4$ 위의 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$에서의 접선의 방정식은

$$ax+by=4$$

$$\therefore \mathrm{Q}\left(\frac{4}{a},\ 0\right),\ \mathrm{R}\left(0,\ \frac{4}{b}\right)$$

$\overline{\mathrm{QR}}=8$, 즉 $\overline{\mathrm{QR}}^2=64$이므로 $\quad \dfrac{16}{a^2}+\dfrac{16}{b^2}=64$

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=4 \qquad \therefore a^2+b^2=4a^2b^2 \quad \cdots\cdots ㉠$$

점 $\mathrm{P}(a,\ b)$는 원 $x^2+y^2=4$ 위의 점이므로

$$a^2+b^2=4 \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉡을 ㉠에 대입하여 정리하면 $\quad a^2b^2=1$

$$\therefore ab=1\ (\because a>0,\ b>0)$$

답 ③

유형 22 원 밖의 한 점에서 원에 그은 접선의 방정식

본책 197쪽

원 밖의 점 $(a,\ b)$에서 원에 그은 접선의 기울기를 m이라 하면 접선의 방정식은

$$y-b=m(x-a),\ 즉\ mx-y-ma+b=0 \quad \cdots\cdots ㉠$$

이므로 원의 중심과 직선 ㉠ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이와 같음을 이용하여 m의 값을 구한다.

1375 접선의 기울기를 m이라 하면 기울기가 m이고 점 $(2,\ 5)$를 지나는 직선의 방정식은

$$y-5=m(x-2) \qquad \therefore mx-y-2m+5=0$$

원의 중심의 좌표가 $(-1,\ 4)$, 반지름의 길이가 $\sqrt{5}$이므로 원과 직선이 접하려면

$$\frac{|-m-4-2m+5|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\sqrt{5}$$

$$\frac{|-3m+1|}{\sqrt{m^2+1}}=\sqrt{5}, \qquad |-3m+1|=\sqrt{5m^2+5}$$

양변을 제곱하면 $\quad 9m^2-6m+1=5m^2+5$

$$2m^2-3m-2=0, \qquad (2m+1)(m-2)=0$$

$$\therefore m=-\frac{1}{2}\ 또는\ m=2$$

따라서 두 접선의 기울기의 곱은

$$-\frac{1}{2}\cdot2=-1$$

답 ②

1376 접선의 기울기를 m이라 하면 기울기가 m이고 점 $(2,\ -4)$를 지나는 직선의 방정식은

$$y+4=m(x-2)$$

$$\therefore mx-y-2m-4=0$$

원의 중심의 좌표가 $(0,\ 0)$, 반지름의 길이가 $\sqrt{2}$이므로 원과 직선이 접하려면

$$\frac{|-2m-4|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\sqrt{2}, \qquad |2m+4|=\sqrt{2m^2+2}$$

양변을 제곱하면 $\quad 4m^2+16m+16=2m^2+2$

$$m^2+8m+7=0, \qquad (m+7)(m+1)=0$$

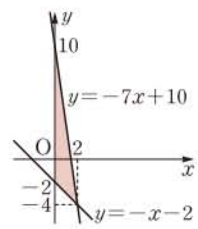
$$\therefore m=-7\ 또는\ m=-1$$

따라서 두 접선의 방정식은

$$-7x-y+10=0,\ -x-y-2=0$$

$$\therefore y=-7x+10,\ y=-x-2$$

두 직선의 y절편은 각각 10, -2이므로 구하는 넓이는



$$\frac{1}{2}\cdot\{10-(-2)\}\cdot2=12$$

답 12

1377 직선 l이 원 O'의 넓이를 이등분하므로 직선 l은 원 O'의 중심 $(-2,\ 0)$을 지난다.

직선 l의 기울기를 m이라 하면 직선 l의 방정식은

$$y=m(x+2) \qquad \therefore mx-y+2m=0$$

원 O의 중심의 좌표가 $(0,\ 0)$, 반지름의 길이가 1이므로 원 O와 직선 l이 접하려면

$$\frac{|2m|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=1, \qquad |2m|=\sqrt{m^2+1}$$

양변을 제곱하면 $\quad 4m^2=m^2+1$

$$3m^2=1 \qquad \therefore m=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$$

따라서 직선 l의 방정식은

$$y=\frac{\sqrt{3}}{3}x+\frac{2\sqrt{3}}{3},\ y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x-\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

답 $y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}x+\dfrac{2\sqrt{3}}{3},\ y=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}x-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

1378 (1) 접선의 기울기를 m이라 하면 기울기가 m이고 점 $\mathrm{P}(3,\ 2)$를 지나는 직선의 방정식은

$$y-2=m(x-3)$$

$\therefore mx-y-3m+2=0$

원의 중심의 좌표가 $(0,\ 0)$, 반지름의 길이가 2이므로 원과 직선이 접하려면

$$\frac{|-3m+2|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=2$$

$$|-3m+2|=2\sqrt{m^2+1}$$

양변을 제곱하면 $\quad 9m^2-12m+4=4m^2+4$

$$5m^2-12m=0,\qquad m(5m-12)=0$$

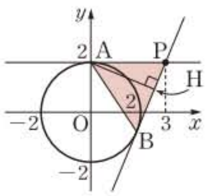
$$\therefore m=0 \text{ 또는 } m=\frac{12}{5}$$

따라서 접선의 방정식은

$$-y+2=0,\ \frac{12}{5}x-y-\frac{26}{5}=0$$

$\therefore y=2,\ 12x-5y-26=0$ ⋯ ❶

(2) 점 $A(0,\ 2)$에서 직선 $12x-5y-26=0$에 내린 수선의 발을 H라 하면



$$\overline{AH}=\frac{|-10-26|}{\sqrt{12^2+(-5)^2}}=\frac{36}{13}$$ ⋯ ❷

(3) $\overline{BP}=\overline{AP}=3$이므로

$$\triangle ABP=\frac{1}{2}\cdot\overline{BP}\cdot\overline{AH}=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot\frac{36}{13}=\frac{54}{13}$$ ⋯ ❸

답 (1) $y=2,\ 12x-5y-26=0$ (2) $\frac{36}{13}$ (3) $\frac{54}{13}$

채점 기준	비율
❶ 접선의 방정식을 구할 수 있다.	50 %
❷ 점 A와 직선 BP 사이의 거리를 구할 수 있다.	20 %
❸ △ABP의 넓이를 구할 수 있다.	30 %

1379 접선의 기울기를 m이라 하면 기울기가 m이고 점 $(0,\ a)$를 지나는 직선의 방정식은

$$y=mx+a \qquad \therefore mx-y+a=0$$

원의 중심의 좌표가 $(0,\ 1)$, 반지름의 길이가 3이므로 원과 직선이 접하려면

$$\frac{|-1+a|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=3,\qquad |-1+a|=3\sqrt{m^2+1}$$

양변을 제곱하면 $\quad a^2-2a+1=9m^2+9$

$\therefore 9m^2-(a^2-2a-8)=0$ ⋯⋯ ㉠

m에 대한 이차방정식 ㉠의 두 근을 m_1, m_2라 하면 두 접선이 서로 수직이므로

$$m_1m_2=-1$$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$-\frac{a^2-2a-8}{9}=-1$$

$$a^2-2a-8=9,\qquad a^2-2a-17=0$$

$$\therefore a=1\pm3\sqrt{2}$$

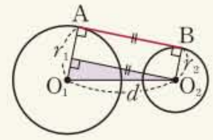
따라서 모든 a의 값의 합은

$(1+3\sqrt{2})+(1-3\sqrt{2})=2$ 답 2

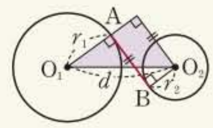
유형 23 두 원에 동시에 접하는 접선의 길이

본책 198쪽

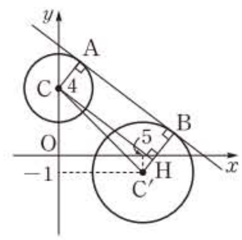
① 두 원 O_1, O_2의 반지름의 길이가 각각 r_1, r_2 $(r_1>r_2)$이고, $\overline{O_1O_2}=d$일 때,
$\overline{AB}=\sqrt{d^2-(r_1-r_2)^2}$



② 두 원 O_1, O_2의 반지름의 길이가 각각 r_1, r_2이고, $\overline{O_1O_2}=d$일 때,
$\overline{AB}=\sqrt{d^2-(r_1+r_2)^2}$



1380 두 원 $x^2+(y-4)^2=4$, $(x-5)^2+(y+1)^2=9$의 중심을 각각 C, C′이라 하면



$$C(0,\ 4),\ C'(5,\ -1)$$

$$\therefore \overline{CC'}=\sqrt{5^2+(-1-4)^2}=5\sqrt{2}$$

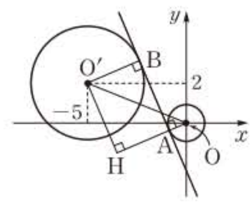
점 C에서 $\overline{C'B}$에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\overline{C'H}=3-2=1$$

직각삼각형 CC′H에서

$\overline{AB}=\overline{CH}=\sqrt{(5\sqrt{2})^2-1^2}=7$ 답 ①

1381 두 원 O, O'의 중심 O, O′의 좌표는



$$O(0,\ 0),\ O'(-5,\ 2)$$

$$\therefore \overline{OO'}=\sqrt{(-5)^2+2^2}=\sqrt{29}$$

점 O′에서 $\overline{OA}$의 연장선에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\overline{OH}=r+1\ (\because r>0)$$

$\overline{O'H}=\overline{BA}=\sqrt{13}$이므로 직각삼각형 OO′H에서

$$\overline{OH}=\sqrt{(\sqrt{29})^2-(\sqrt{13})^2}=4$$

즉 $r+1=4$이므로 $\qquad r=3$ 답 3

1382 $x^2+y^2-8x+10y+32=0$에서

$$(x-4)^2+(y+5)^2=9$$

$x^2+y^2+2x+4y+1=0$에서

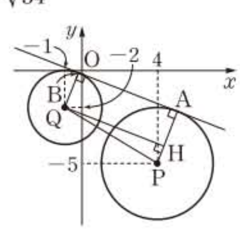
$$(x+1)^2+(y+2)^2=4$$

두 원의 중심을 각각 P, Q라 하면

$$P(4,\ -5),\ Q(-1,\ -2)$$

$$\therefore \overline{PQ}=\sqrt{(-1-4)^2+(-2+5)^2}=\sqrt{34}$$

점 Q에서 $\overline{PA}$에 내린 수선의 발을 H라 하면



$$\overline{PH}=3-2=1$$

직각삼각형 QPH에서

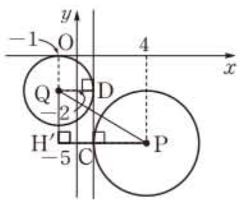
$$\overline{AB}=\overline{QH}=\sqrt{(\sqrt{34})^2-1^2}=\sqrt{33}$$

점 Q에서 $\overline{\mathrm{PC}}$의 연장선에 내린 수선의 발을 H′이라 하면

$\overline{\mathrm{PH'}}=3+2=5$

직각삼각형 QH′P에서

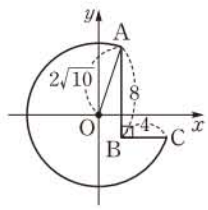
$\overline{\mathrm{CD}}=\overline{\mathrm{QH'}}=\sqrt{(\sqrt{34})^2-5^2}=3$



답 $\sqrt{33}$, 3

1383 전략 원 O의 중심이 원점에 오도록 좌표평면 위에 놓는다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 원 O의 중심이 원점, 직선 AB가 y축과 평행하면서 점 A가 제1사분면 위에 오도록 주어진 도형을 좌표평면 위에 놓으면 원의 방정식은



$x^2+y^2=(2\sqrt{10})^2$, 즉 $x^2+y^2=40$

점 A의 좌표를 (a, b) $(a>0, b>0)$라 하면 점 A는 원 O 위에 있으므로

$a^2+b^2=40$ …… ㉠

한편 $\overline{\mathrm{AB}}=8$이므로 $\mathrm{B}(a, b-8)$이고, $\overline{\mathrm{BC}}=4$이므로 $\mathrm{C}(a+4, b-8)$이다.

이때 점 C가 원 O 위에 있으므로

$(a+4)^2+(b-8)^2=40$

$a^2+b^2+8a-16b+80=40$

$8a-16b+80=0$ ($\because$ ㉠)

$\therefore a=2b-10$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$(2b-10)^2+b^2=40,\quad b^2-8b+12=0$

$(b-2)(b-6)=0\quad \therefore b=2$ 또는 $b=6$

$b=2$를 ㉡에 대입하면 $a=-6$

$b=6$을 ㉡에 대입하면 $a=2$

그런데 $a>0$, $b>0$이므로 $a=2$, $b=6$

따라서 $\mathrm{B}(2, -2)$이므로

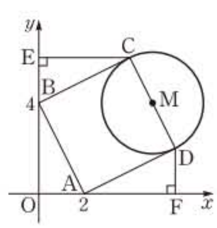
$l^2=\overline{\mathrm{OB}}^2=2^2+(-2)^2=8$

$\therefore 3l^2=24$

답 24

1384 전략 삼각형 OAB와 합동인 삼각형을 찾아 두 점 C, D의 좌표를 구한다.

풀이 점 C에서 y축에 내린 수선의 발을 E, 점 D에서 x축에 내린 수선의 발을 F라 하면



$\triangle\mathrm{OAB}\equiv\triangle\mathrm{EBC}\equiv\triangle\mathrm{FDA}$ (RHA 합동)

이므로

$\overline{\mathrm{EB}}=\overline{\mathrm{FD}}=\overline{\mathrm{OA}}=2$, $\overline{\mathrm{EC}}=\overline{\mathrm{FA}}=\overline{\mathrm{OB}}=4$

$\therefore \mathrm{C}(4, 6)$, $\mathrm{D}(6, 2)$ ··· ❶

$\overline{\mathrm{CD}}$의 중점을 M이라 하면

$\mathrm{M}\left(\frac{4+6}{2}, \frac{6+2}{2}\right)$, 즉 $\mathrm{M}(5, 4)$

$\therefore \overline{\mathrm{CM}}=\sqrt{(5-4)^2+(4-6)^2}=\sqrt{5}$ ··· ❷

따라서 $\overline{\mathrm{CD}}$를 지름으로 하는 원의 방정식은

$(x-5)^2+(y-4)^2=(\sqrt{5})^2$

$\therefore x^2+y^2-10x-8y+36=0$

즉 $a=-10$, $b=-8$, $c=36$이므로 ··· ❸

$a+b+c=18$ ··· ❹

답 18

채점 기준	비율
❶ 두 점 C, D의 좌표를 구할 수 있다.	40 %
❷ 원의 중심의 좌표와 반지름의 길이를 구할 수 있다.	30 %
❸ a, b, c의 값을 구할 수 있다.	20 %
❹ $a+b+c$의 값을 구할 수 있다.	10 %

1385 전략 주어진 조건을 만족시키는 원의 중심은 제4사분면 위에 있어야 한다.

풀이 점 P가 제4사분면 위의 점이므로 반지름의 길이가 r이고, x축, y축에 동시에 접하는 원의 중심은 제4사분면 위에 있어야 한다.

따라서 원의 방정식은

$(x-r)^2+(y+r)^2=r^2$

이고, 점 $\mathrm{P}(3, -5)$가 이 원의 내부에 있으려면 원의 중심 $(r, -r)$와 점 P 사이의 거리가 원의 반지름의 길이보다 작아야 하므로

$\sqrt{(3-r)^2+(-5+r)^2}<r$

양변을 제곱하면

$(3-r)^2+(-5+r)^2<r^2,\qquad r^2-16r+34<0$

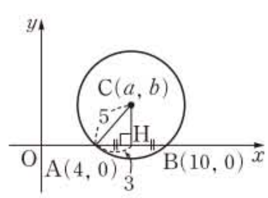
$\therefore 8-\sqrt{30}<r<8+\sqrt{30}$

이때 $5<\sqrt{30}<6$이므로 자연수 r는 3, 4, 5, …, 13의 11개이다.

답 ④

1386 전략 원점과 원 위의 점 사이의 거리의 최댓값과 최솟값을 구한다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 원의 중심을 $\mathrm{C}(a, b)$라 하고 점 C에서 현 AB에 내린 수선의 발을 H라 하면 점 H는 $\overline{\mathrm{AB}}$의 중점이므로



$\mathrm{H}\left(\frac{4+10}{2}, 0\right)$, 즉 $\mathrm{H}(7, 0)$

$\therefore a=7$

한편 $\overline{\mathrm{AB}}=6$이므로 $\overline{\mathrm{AH}}=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{AB}}=3$

직각삼각형 CAH에서

$\overline{\mathrm{CH}}=\sqrt{5^2-3^2}=4\qquad \therefore b=4$

즉 $\mathrm{C}(7, 4)$이므로

$\overline{\mathrm{OC}}=\sqrt{7^2+4^2}=\sqrt{65}$

따라서 $\overline{\mathrm{OP}}$의 길이의 최댓값은 $\sqrt{65}+5$, 최솟값은 $\sqrt{65}-5$이므로

$\sqrt{65}-5\le\overline{\mathrm{OP}}\le\sqrt{65}+5$

이때 $8<\sqrt{65}<9$이므로 $\overline{\mathrm{OP}}$의 길이가 될 수 있는 정수는 4, 5, …, 13이고 각각의 길이에 해당하는 점 P는 2개씩 있으므로 구하는 점 P의 개수는 20이다.

답 20

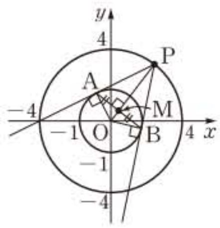
1387 전략 $M(x, y)$라 하고 x, y 사이의 관계를 식으로 나타낸다.

풀이 오른쪽 그림에서 $\overline{OP}\perp\overline{AB}$

$\triangle OAM \backsim \triangle OPA$ (AA 닮음)이므로

$\overline{OA}:\overline{OP}=\overline{OM}:\overline{OA}$

$1:4=\overline{OM}:1 \quad \therefore \overline{OM}=\frac{1}{4}$



이때 $M(x, y)$라 하면

$\overline{OM}=\sqrt{x^2+y^2}$

이므로 $\sqrt{x^2+y^2}=\frac{1}{4}$

$\therefore x^2+y^2=\left(\frac{1}{4}\right)^2$

따라서 점 M은 중심이 원점이고 반지름의 길이가 $\frac{1}{4}$인 원 위를 움직이므로 구하는 넓이는

$\pi\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{\pi}{16}$

답 $\frac{\pi}{16}$

1388 전략 $C(x, y)(x>0, y>0)$라 하고 각의 이등분선의 성질을 이용하여 x, y 사이의 관계를 식으로 나타낸다.

풀이 $\overline{AO}=3$, $\overline{BO}=2$이고, $\overline{OC}$는 $\angle C$의 이등분선이므로

$\overline{CA}:\overline{CB}=\overline{AO}:\overline{BO}=3:2$

$2\overline{CA}=3\overline{CB} \quad \therefore 4\overline{CA}^2=9\overline{CB}^2$

점 C의 좌표를 $(x, y)(x>0, y>0)$라 하면

$4\{(x+3)^2+y^2\}=9\{(x-2)^2+y^2\}$

$x^2+y^2-12x=0$

$\therefore (x-6)^2+y^2=36$

따라서 점 C가 나타내는 도형은 중심이 점 $(6, 0)$이고 반지름의 길이가 6인 원에서 $x>0$, $y>0$인 부분이므로 구하는 길이는

└ 점 C는 제1사분면 위에 있다.

$\frac{1}{2}\cdot 2\pi\cdot 6=6\pi$

답 ②

1389 전략 주어진 조건을 이용하여 점 P가 나타내는 도형의 방정식을 구한다.

풀이 $\overline{AP}:\overline{BP}=1:2$에서 $2\overline{AP}=\overline{BP}$이므로

$4\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$

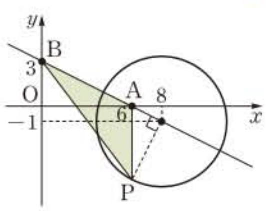
$P(x, y)$라 하면

$4\{(x-6)^2+y^2\}=x^2+(y-3)^2$

$x^2+y^2-16x+2y+45=0$

$\therefore (x-8)^2+(y+1)^2=20$ …… ㉠ ⋯ ❶

따라서 점 P는 중심이 점 $(8, -1)$이고 반지름의 길이가 $2\sqrt{5}$인 원 위를 움직인다.



이때 직선 AB의 방정식은

$\frac{x}{6}+\frac{y}{3}=1$이고 원 ㉠의 중심 $(8, -1)$이 이 직선 위의 점이므로 직선 AB와 점 P 사이의 거리의 최댓값은 원 ㉠의 반지름의 길이와 같다. ⋯ ❷

$\overline{AB}=\sqrt{(-6)^2+3^2}=3\sqrt{5}$이므로 $\triangle ABP$의 넓이의 최댓값은

$\frac{1}{2}\cdot 3\sqrt{5}\cdot 2\sqrt{5}=15$ ⋯ ❸

답 15

채점 기준	비율
❶ 점 P의 자취의 방정식을 구할 수 있다.	30 %
❷ $\triangle ABP$의 넓이가 최대일 때를 알 수 있다.	30 %
❸ $\triangle ABP$의 넓이의 최댓값을 구할 수 있다.	40 %

1390 전략 두 원의 중심을 지나는 직선이 두 원의 공통인 현을 수직이등분함을 이용한다.

풀이 $x+2y=10$에서 $y=-\frac{1}{2}x+5$

이 직선이 $\overline{AB}$를 수직이등분하므로 직선 AB의 기울기는 2이다.

즉 $\frac{b-a}{3-1}=2$이므로 $b-a=4$

$\therefore \overline{C_1B}=\frac{1}{2}\overline{AB}$

$=\frac{1}{2}\sqrt{(3-1)^2+(b-a)^2}$

$=\frac{1}{2}\sqrt{2^2+4^2}=\sqrt{5}$

따라서 원 C_1의 넓이는 5π이다. ⋯ ❶

$\overline{AC_1}=\overline{BC_1}=\overline{C_1C_2}=\sqrt{5}$이므로 직각삼각형 BC_1C_2에서

$\overline{BC_2}=\sqrt{(\sqrt{5})^2+(\sqrt{5})^2}=\sqrt{10}$

따라서 원 C_2의 넓이는 10π이다. ⋯ ❷

두 원 C_1, C_2의 넓이의 합은

$5\pi+10\pi=15\pi$ ⋯ ❸

답 15π

채점 기준	비율
❶ 원 C_1의 넓이를 구할 수 있다.	50 %
❷ 원 C_2의 넓이를 구할 수 있다.	40 %
❸ 두 원 C_1, C_2의 넓이의 합을 구할 수 있다.	10 %

1391 전략 직선의 방정식을 원의 방정식에 대입하여 얻은 x에 대한 이차방정식의 두 근이 원과 직선의 교점의 x좌표임을 이용한다.

풀이 $y=mx$를 $x^2+y^2+2ax+2by-16=0$에 대입하여 정리하면

$(1+m^2)x^2+2(a+bm)x-16=0$ …… ㉠

$P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$라 하면 x_1, x_2는 이차방정식 ㉠의 근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$x_1x_2=-\frac{16}{1+m^2}$ …… ㉡

한편 두 점 P, Q는 직선 $y=mx$ 위에 있으므로

$y_1=mx_1$, $y_2=mx_2$

$\therefore \overline{OP}=\sqrt{x_1^2+y_1^2}=\sqrt{x_1^2+m^2x_1^2}=\sqrt{1+m^2}\,|x_1|$,

$\overline{OQ}=\sqrt{x_2^2+y_2^2}=\sqrt{x_2^2+m^2x_2^2}=\sqrt{1+m^2}\,|x_2|$

$\therefore \overline{OP}\cdot\overline{OQ}=(1+m^2)|x_1x_2|$

$=(1+m^2)\cdot\left|-\frac{16}{1+m^2}\right|$ ($\because$ ㉡)

$=(1+m^2)\cdot\frac{16}{1+m^2}=16$

답 ③

1392 전략 두 점 P, Q는 직선 $y=x-2$와 $\overline{AB}$를 지름으로 하는 원의 교점임을 이용한다.

풀이 $\angle APB=\angle AQB=90°$이므로 두 점 P, Q는 $\overline{AB}$를 지름

으로 하는 원 위에 있다.

$\overline{AB}$의 중점은 $\overline{AB}$를 지름으로 하는 원의 중심이므로 그 좌표는

$$\left(\frac{-\sqrt{5}+\sqrt{5}}{2},\ \frac{-1+3}{2}\right),\text{ 즉 }(0,\ 1)$$

또 $\overline{AB}$가 원의 지름이므로 원의 반지름의 길이는

$$\frac{1}{2}\overline{AB}=\frac{1}{2}\sqrt{(\sqrt{5}+\sqrt{5})^2+(3+1)^2}=3$$

따라서 원의 방정식은 $x^2+(y-1)^2=9$이므로 $y=x-2$를 $x^2+(y-1)^2=9$에 대입하여 정리하면

$$x^2-3x=0, \qquad x(x-3)=0$$

$\therefore x=0$ 또는 $x=3$

이것을 $y=x-2$에 대입하면 $\qquad y=-2$ 또는 $y=1$

즉 두 점 P, Q의 좌표는 $(0,\ -2)$, $(3,\ 1)$이므로

$$l=\sqrt{3^2+(1+2)^2}=3\sqrt{2}$$

$\therefore l^2=18$ 답 18

1393 전략 먼저 $\overline{PQ}$의 길이가 최대, 최소가 되는 경우를 생각해 본다.

풀이 $x^2+y^2-4x-6y-17=0$에서

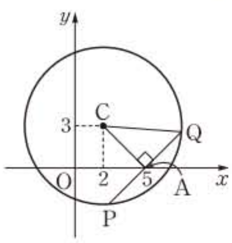
$$(x-2)^2+(y-3)^2=30$$

원의 중심을 C라 하면 $\qquad$ C$(2,\ 3)$

$\overline{PQ}$가 원의 지름일 때 $\overline{PQ}$의 길이는 최대이므로 $\overline{PQ}$의 길이의 최댓값은 $\qquad 2\sqrt{30}$ ⋯ ❶

또 오른쪽 그림과 같이 $\overline{CA}\perp\overline{PQ}$일 때 $\overline{PQ}$의 길이는 최소이고

$$\overline{CA}=\sqrt{(5-2)^2+(-3)^2}=3\sqrt{2},$$
$$\overline{CQ}=\sqrt{30}$$



이므로 직각삼각형 CAQ에서

$$\overline{AQ}=\sqrt{(\sqrt{30})^2-(3\sqrt{2})^2}=2\sqrt{3}$$

따라서 $\overline{PQ}$의 길이의 최솟값은

$$\overline{PQ}=2\overline{AQ}=4\sqrt{3}$$ ⋯ ❷

$$\therefore 4\sqrt{3}\le\overline{PQ}\le2\sqrt{30}$$ ⋯ ❸

이때 $6<4\sqrt{3}<7$, $10<2\sqrt{30}<11$이므로

$M=10$, $m=7$

$\therefore M+m=17$ ⋯ ❹

답 17

채점 기준	비율
❶ $\overline{PQ}$의 길이의 최댓값을 구할 수 있다.	40 %
❷ $\overline{PQ}$의 길이의 최솟값을 구할 수 있다.	40 %
❸ $\overline{PQ}$의 길이의 범위를 구할 수 있다.	10 %
❹ $M+m$의 값을 구할 수 있다.	10 %

1394 전략 원의 중심과 접선 사이의 거리가 원의 반지름의 길이와 같음을 이용한다.

풀이 원 C_1의 중심 $(0,\ 0)$과 직선 $l: ax+by+1=0$ 사이의 거리는 원 C_1의 반지름의 길이인 1과 같으므로

$$\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}=1, \qquad \sqrt{a^2+b^2}=1$$

$\therefore a^2+b^2=1$ ⋯⋯ ㉠

두 직선 l_1, l_2가 모두 직선 l에 평행하므로

$$l_1: ax+by+m_1=0,\ l_2: ax+by+m_2=0$$
$$(m_1\ne1,\ m_2\ne1,\ m_2>m_1)$$

이라 하면 원 C_2의 중심 $(0,\ 0)$과 두 직선 l_1, l_2 사이의 거리는 모두 원 C_2의 반지름의 길이인 $2\sqrt{2}$와 같다. 즉

$$\frac{|m_1|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|m_2|}{\sqrt{a^2+b^2}}=2\sqrt{2}$$

$|m_1|=|m_2|=2\sqrt{2}$ ($\because$ ㉠)

$\therefore m_1=-2\sqrt{2},\ m_2=2\sqrt{2}$ ($\because m_2>m_1$)

이때 점 $P_1(x_1,\ y_1)$, $P_2(x_2,\ y_2)$는 각각 두 직선 $l_1: ax+by-2\sqrt{2}=0$, $l_2: ax+by+2\sqrt{2}=0$ 위에 있으므로

$$ax_1+by_1-2\sqrt{2}=0,\ ax_2+by_2+2\sqrt{2}=0$$

$$\therefore (ax_1+by_1+1)(ax_2+by_2+1)$$
$$=(2\sqrt{2}+1)(-2\sqrt{2}+1)=-7$$

답 ①

1395 전략 원의 중심의 좌표를 $(n,\ n^2)$으로 놓고 원과 직선이 접함을 이용한다.

풀이 원의 중심이 $y=x^2$의 그래프 위에 있으므로 원의 중심의 좌표를 $(n,\ n^2)$이라 하면 이 원이 y축에 접하므로 반지름의 길이는 $|n|$이다.

원의 중심 $(n,\ n^2)$과 직선 $y=\sqrt{3}x-2$, 즉 $\sqrt{3}x-y-2=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|\sqrt{3}n-n^2-2|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+(-1)^2}}=\frac{|\sqrt{3}n-n^2-2|}{2}$$

이므로 원과 직선이 접하려면

$$\frac{|\sqrt{3}n-n^2-2|}{2}=|n|, \qquad |\sqrt{3}n-n^2-2|=2|n|$$

$$\sqrt{3}n-n^2-2=\pm2n \qquad \therefore n^2\pm2n-\sqrt{3}n+2=0$$

(i) $n^2+2n-\sqrt{3}n+2=0$, 즉 $n^2+(2-\sqrt{3})n+2=0$일 때,

이 이차방정식의 판별식을 D_1이라 하면

$$D_1=(2-\sqrt{3})^2-4\cdot2=-1-4\sqrt{3}<0$$

이므로 실근을 갖지 않는다. 직선 $y=\sqrt{3}x-2$와 접하는 원이 존재하지 않는다.

(ii) $n^2-2n-\sqrt{3}n+2=0$, 즉 $n^2-(2+\sqrt{3})n+2=0$일 때,

이 이차방정식의 판별식을 D_2라 하면

$$D_2=\{-(2+\sqrt{3})\}^2-4\cdot2=-1+4\sqrt{3}>0$$

이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다.

(i), (ii)에서 실근을 갖는 이차방정식은

$$n^2-(2+\sqrt{3})n+2=0$$

이 이차방정식의 두 근이 a, b이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $\qquad ab=2$

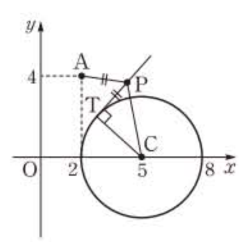
$\therefore 100ab=200$ 답 200

1396 전략 $P(x,\ y)$로 놓고 접선의 길이를 이용하여 x, y 사이의 관계를 식으로 나타낸다.

풀이 $x^2+y^2-10x+16=0$에서

$$(x-5)^2+y^2=9$$

원의 중심을 C$(5,\ 0)$이라 하고 $P(x,\ y)$라 하면



$$\overline{PT}^2=\overline{PC}^2-\overline{CT}^2$$
$$=\{(x-5)^2+y^2\}-3^2$$
$$=x^2+y^2-10x+16$$

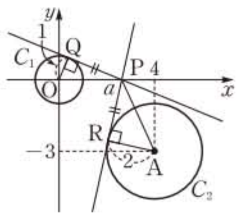
$\overline{PT}=\overline{PA}$에서 $\overline{PT}^2=\overline{PA}^2$이므로

$$x^2+y^2-10x+16=(x-2)^2+(y-4)^2$$

$\therefore\ 3x-4y+2=0$ 답 $3x-4y+2=0$

1397 전략 점 P의 좌표를 $(a,\ 0)$으로 놓고, 원의 중심과 접선 사이의 거리가 원의 반지름의 길이와 같음을 이용한다.

풀이 점 P의 좌표를 $(a,\ 0)$이라 하면 $\overline{OQ}\perp\overline{PQ}$이므로 직각삼각형 OPQ에서



$$\overline{PQ}^2=\overline{OP}^2-\overline{OQ}^2=a^2-1$$

$x^2+y^2-8x+6y+21=0$에서

$$(x-4)^2+(y+3)^2=4$$

따라서 원 C_2의 중심을 A$(4,\ -3)$이라 하면 $\overline{AR}\perp\overline{PR}$이므로 직각삼각형 APR에서

$$\begin{aligned}\overline{PR}^2&=\overline{AP}^2-\overline{AR}^2\\&=\{(a-4)^2+3^2\}-2^2\\&=a^2-8a+21\end{aligned}$$

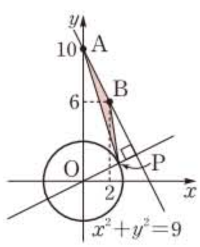
이때 $\overline{PQ}=\overline{PR}$에서 $\overline{PQ}^2=\overline{PR}^2$이므로

$$a^2-1=a^2-8a+21,\qquad 8a=22$$

$\therefore\ a=\dfrac{11}{4}$ 답 ④

1398 전략 점 P와 직선 AB 사이의 거리가 최소일 때 삼각형 PAB의 넓이가 최소이다.

풀이 $\triangle$PAB의 밑변을 $\overline{AB}$라 하면



$$\overline{AB}=\sqrt{2^2+(6-10)^2}=2\sqrt5$$

이고, 높이는 점 P와 직선 AB 사이의 거리와 같으므로 $\triangle$PAB의 넓이가 최소이려면 점 P와 직선 AB 사이의 거리가 최소이어야 한다.

직선 AB의 방정식은

$$y-10=\frac{6-10}{2-0}(x-0)\qquad \therefore\ 2x+y-10=0$$

원의 중심 $(0,\ 0)$과 직선 $2x+y-10=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|-10|}{\sqrt{2^2+1^2}}=2\sqrt5$$

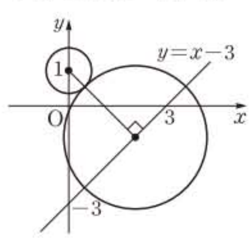
원의 반지름의 길이가 3이므로 점 P와 직선 AB 사이의 거리의 최솟값은 $2\sqrt5-3$

따라서 $\triangle$PAB의 넓이의 최솟값은

$\dfrac12\cdot2\sqrt5\cdot(2\sqrt5-3)=10-3\sqrt5$ 답 $10-3\sqrt5$

1399 전략 점 $(a,\ a-3)$은 직선 $y=x-3$ 위의 점임을 이용한다.

풀이 두 원이 바깥쪽에서 서로 접하려면 두 원의 중심 사이의 거리와 두 원의 반지름의 길이의 합이 같아야 한다. 이때 조건을 만족시키는 원의 넓이가 최소이려면 반지름의 길이가 최소이어야 하므로 두 원의 중심 사이의 거리도 최소이어야 한다.



점 $(a,\ a-3)$은 직선 $y=x-3$ 위의 점이고 원 $x^2+(y-1)^2=\dfrac12$의 중심 $(0,\ 1)$과 직선 $y=x-3$, 즉 $x-y-3=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|-1-3|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=2\sqrt2$$

따라서 조건을 만족시키는 원의 반지름의 길이의 최솟값은

$$2\sqrt2-\frac{\sqrt2}{2}=\frac{3\sqrt2}{2}$$

이므로 넓이의 최솟값은 $\pi\cdot\left(\dfrac{3\sqrt2}{2}\right)^2=\dfrac92\pi$ 답 ③

1400 전략 직선 l은 원점과 점 $(3,\ 4)$를 지나는 직선과 수직임을 이용한다.

풀이 원점과의 거리가 최대인 직선 l은 원점과 점 $(3,\ 4)$를 지나는 직선과 수직이다.

원점과 점 $(3,\ 4)$를 지나는 직선의 기울기는 $\dfrac43$이므로 직선 l의 기울기는 $-\dfrac34$이다.

따라서 직선 l의 방정식은 $y-4=-\dfrac34(x-3)$

$\therefore\ 3x+4y-25=0$

원의 중심 $(7,\ 5)$와 직선 $3x+4y-25=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|21+20-25|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{16}{5}$$

원의 반지름의 길이가 1이므로 점 P와 직선 l 사이의 거리의 최솟값은

$$m=\frac{16}{5}-1=\frac{11}{5}$$

$\therefore\ 10m=22$ 답 22

1401 전략 $a^2+b^2+2b+1=a^2+(b+1)^2=k$로 놓으면 $\sqrt k$는 두 점 $(a,\ b)$와 $(0,\ -1)$ 사이의 거리임을 이용한다.

풀이 직선 OP의 기울기는 $\tan45°=1$이므로 직선 OP의 방정식은 $y=x$

P$(p,\ p)\ (p>0)$라 하면 점 P는 원 $x^2+y^2=1$ 위의 점이므로

$$p^2+p^2=1,\qquad p^2=\frac12\qquad \therefore\ p=\frac{\sqrt2}{2}\ (\because\ p>0)$$

$$\therefore\ \mathrm{P}\left(\frac{\sqrt2}{2},\ \frac{\sqrt2}{2}\right)$$

점 P$\left(\dfrac{\sqrt2}{2},\ \dfrac{\sqrt2}{2}\right)$에서의 접선의 방정식은

$$\frac{\sqrt2}{2}x+\frac{\sqrt2}{2}y=1\qquad \therefore\ x+y=\sqrt2$$

$\therefore\ \mathrm{A}(\sqrt2,\ 0),\ \mathrm{B}(0,\ \sqrt2)$

$a^2+b^2+2b+1=k$라 하면

$$a^2+(b+1)^2=k$$

따라서 $\sqrt k$는 $\overline{AB}$ 위의 점 $(a,\ b)$와 점 $(0,\ -1)$ 사이의 거리와 같다.

k의 최솟값은 점 $(0,\ -1)$과 직선 $x+y=\sqrt2$, 즉 $x+y-\sqrt2=0$ 사이의 거리의 제곱과 같으므로

$$m=\left(\frac{|-1-\sqrt{2}|}{\sqrt{1^2+1^2}}\right)^2=\frac{3+2\sqrt{2}}{2}$$

또 k의 최댓값은 점 $(0,\ -1)$과 점 B 사이의 거리의 제곱과 같으므로

$$M=(\sqrt{2}+1)^2=3+2\sqrt{2}$$

$$\therefore\ \frac{m}{M}=\frac{3+2\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{3+2\sqrt{2}}=\frac{1}{2}$$

답 ②

1402 전략 원의 중심에서 현에 그은 수선은 그 현을 이등분함을 이용한다.

풀이 원 $x^2+y^2=25$ 위의 점 $\mathrm{P}(4,\ 3)$에서의 접선의 방정식은

$4x+3y=25$ ⋯ ❶

이 식에 $y=0$을 대입하면

$4x=25 \quad \therefore\ x=\frac{25}{4}$

즉 $\mathrm{Q}\left(\frac{25}{4},\ 0\right)$이므로

$\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{\left(\frac{25}{4}-4\right)^2+(-3)^2}=\frac{15}{4}$ ⋯ ❷

이때 $\overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{QR}}$이므로 점 R의 좌표는

$\left(\frac{25}{4}-\frac{15}{4},\ 0\right)$, 즉 $\left(\frac{5}{2},\ 0\right)$ ⋯ ❸

$\overline{\mathrm{QH}}$는 $\overline{\mathrm{PR}}$를 수직이등분하므로

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{PH}}&=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{PR}}\\&=\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{5}{2}-4\right)^2+(-3)^2}\\&=\frac{3\sqrt{5}}{4}\end{aligned}$$ ⋯ ❹

답 $\frac{3\sqrt{5}}{4}$

채점 기준	비율
❶ 점 P에서의 접선의 방정식을 구할 수 있다.	20 %
❷ $\overline{\mathrm{PQ}}$의 길이를 구할 수 있다.	30 %
❸ 점 R의 좌표를 구할 수 있다.	30 %
❹ $\overline{\mathrm{PH}}$의 길이를 구할 수 있다.	20 %

1403 전략 직선 $\mathrm{OO_1}$과 직선 l이 평행함을 이용하여 직선 $\mathrm{OO_1}$의 방정식을 구한다.

풀이 원 O 위의 점 $\mathrm{P}(3,\ -4)$에서의 접선 l의 방정식은

$3x-4y=25 \quad \therefore\ y=\frac{3}{4}x-\frac{25}{4}$

직선 $\mathrm{OO_1}$과 직선 l이 평행하므로 직선 $\mathrm{OO_1}$의 방정식은

$y=\frac{3}{4}x \quad \therefore\ 3x-4y=0$

이때 원 O_2는 y축에 접하므로 반지름의 길이가 $|(\text{중심의 } x\text{좌표})|$와 같다.

따라서 $\mathrm{O_2}(6,\ a)$라 하면 원 O_2와 직선 $3x-4y=0$이 접하므로

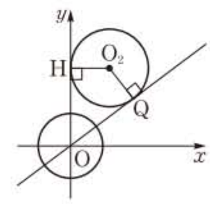
$\frac{|18-4a|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=6, \qquad |18-4a|=30$

$18-4a=\pm30 \qquad \therefore\ a=12\ (\because\ a>0)$

오른쪽 그림과 같이 점 $\mathrm{O_2}$에서 y축에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\overline{\mathrm{OH}}=12$이므로

$\overline{\mathrm{OQ}}=\overline{\mathrm{OH}}=12$

답 ④



1404 전략 원의 중심에서 접선에 이르는 거리는 원의 반지름의 길이와 같음을 이용하여 직선 l의 방정식을 구한다.

풀이 직선 l의 기울기를 m이라 하면 직선 l의 방정식은

$y=mx+2$

원 $(x-1)^2+y^2=1$과 직선 $y=mx+2$, 즉 $mx-y+2=0$이 접하므로

$\frac{|m+2|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=1, \qquad |m+2|=\sqrt{m^2+1}$

양변을 제곱하면 $\quad m^2+4m+4=m^2+1$

$4m+3=0 \qquad \therefore\ m=-\frac{3}{4}$

따라서 직선 l의 방정식은

$-\frac{3}{4}x-y+2=0 \qquad \therefore\ 3x+4y-8=0$ ⋯ ❶

x축과 y축에 동시에 접하면서 중심이 제1사분면 위에 있는 원의 중심의 좌표를 $(r,\ r)(r>0)$라 하면 이 원과 직선 l이 접하므로

$\frac{|3r+4r-8|}{\sqrt{3^2+4^2}}=r, \qquad |7r-8|=5r$

$7r-8=\pm5r \qquad \therefore\ r=4$ 또는 $r=\frac{2}{3}$ ⋯ ❷

따라서 두 원의 중심의 좌표는 각각 $(4,\ 4)$, $\left(\frac{2}{3},\ \frac{2}{3}\right)$이므로 두 원의 중심 사이의 거리는

$\sqrt{\left(\frac{2}{3}-4\right)^2+\left(\frac{2}{3}-4\right)^2}=\frac{10\sqrt{2}}{3}$ ⋯ ❸

답 $\frac{10\sqrt{2}}{3}$

채점 기준	비율
❶ 직선 l의 방정식을 구할 수 있다.	40 %
❷ 두 원의 반지름의 길이를 구할 수 있다.	40 %
❸ 두 원의 중심 사이의 거리를 구할 수 있다.	20 %

12 도형의 이동

1405 답 $(-3,\ 4)$

1406 답 $(2,\ -14)$

1407 답 $(4,\ -6)$

1408 답 $(6,\ 0)$

1409 $x-5=-5$, $y+5=8$이므로
$x=0$, $y=3$ $\therefore (0,\ 3)$ 답 $(0,\ 3)$

1410 $x-5=2$, $y+5=-11$이므로
$x=7$, $y=-16$ $\therefore (7,\ -16)$ 답 $(7,\ -16)$

1411 $-2+m=3$, $5+n=8$이므로
$m=5$, $n=3$ 답 $m=5$, $n=3$

1412 $(x-3)-5(y+1)+1=0$
$\therefore x-5y-7=0$ 답 $x-5y-7=0$

1413 $(x-5)^2+\{(y+4)-5\}^2=9$
$\therefore (x-5)^2+(y-1)^2=9$ 답 $(x-5)^2+(y-1)^2=9$

1414 $5(x+1)-2(y-3)+1=0$
$\therefore 5x-2y+12=0$ 답 $5x-2y+12=0$

1415 $y-3=-(x+1)^2+6(x+1)+7$
$\therefore y=-x^2+4x+15$ 답 $y=-x^2+4x+15$

1416 구하는 직선은 주어진 직선을 x축의 방향으로 -6만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로
$3(x+6)-2(y-2)-4=0$ $\therefore 3x-2y+18=0$
답 $3x-2y+18=0$

1417 주어진 평행이동은 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 5만큼 평행이동하는 것이다.
따라서 구하는 원은 주어진 원을 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 -5만큼 평행이동한 것이므로
$\{(x-3)+4\}^2+\{(y+5)-3\}^2=4$
$\therefore (x+1)^2+(y+2)^2=4$ 답 $(x+1)^2+(y+2)^2=4$

1418 답 $(2,\ 3)$

1419 답 $(-2,\ -3)$

1420 답 $(-2,\ 3)$

1421 답 $(-3,\ 2)$

1422 답 $(3,\ -2)$

1423 $-y=-4x+5$
$\therefore y=4x-5$ 답 $y=4x-5$

1424 $-y=2x^2-7x+3$
$\therefore y=-2x^2+7x-3$ 답 $y=-2x^2+7x-3$

1425 $(x+4)^2+(-y-2)^2=9$
$\therefore (x+4)^2+(y+2)^2=9$ 답 $(x+4)^2+(y+2)^2=9$

1426 $3\cdot(-x)-2y+4=0$
$\therefore 3x+2y-4=0$ 답 $3x+2y-4=0$

1427 $y=-(-x)^2+7$
$\therefore y=-x^2+7$ 답 $y=-x^2+7$

1428 $(-x)^2+y^2-4\cdot(-x)+4y-12=0$
$\therefore x^2+y^2+4x+4y-12=0$
답 $x^2+y^2+4x+4y-12=0$

1429 $-x-4\cdot(-y)-5=0$
$\therefore x-4y+5=0$ 답 $x-4y+5=0$

1430 $-y=(-x)^2-(-x)+2$
$\therefore y=-x^2-x-2$ 답 $y=-x^2-x-2$

1431 $(-x+3)^2+(-y-1)^2=5$
$\therefore (x-3)^2+(y+1)^2=5$ 답 $(x-3)^2+(y+1)^2=5$

1432 $x=-2y+3$
$\therefore y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$ 답 $y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$

1433 답 $(x-2)^2+(y+3)^2=9$

1434 $-x=\frac{4}{3}\cdot(-y)+2$
$\therefore y=\frac{3}{4}x+\frac{3}{2}$ 답 $y=\frac{3}{4}x+\frac{3}{2}$

1435 $(-y)^2+(-x)^2-2\cdot(-y)-4\cdot(-x)+4=0$
$\therefore x^2+y^2+4x+2y+4=0$ 답 $x^2+y^2+4x+2y+4=0$

1436 $\mathrm{P}\left(\frac{4-6}{2},\ \frac{3+9}{2}\right)$
$\therefore \mathrm{P}(-1,\ 6)$ 답 $(-1,\ 6)$

1437 구하는 점의 좌표를 $(p,\ q)$라 하면
$\frac{-2+p}{2}=1$, $\frac{-5+q}{2}=-1$
$\therefore p=4$, $q=3$
따라서 구하는 점의 좌표는 $(4,\ 3)$이다. 답 $(4,\ 3)$

1438 (1) 두 점 $(a,\ b)$, $(p,\ q)$를 이은 선분의 중점의 좌표가 $(3,\ -7)$이므로

$$\frac{a+p}{2}=3,\ \frac{b+q}{2}=-7$$

$$\therefore\ a=6-p,\ b=-14-q \quad \cdots\cdots\ ㉠$$

(2) 점 $(a,\ b)$가 직선 $3x+4y+5=0$ 위의 점이므로

$$3a+4b+5=0$$

위의 식에 ㉠을 대입하면

$$3(6-p)+4(-14-q)+5=0$$

$$\therefore\ 3p+4q+33=0$$

따라서 점 $(p,\ q)$는 직선 $3x+4y+33=0$ 위의 점이므로 구하는 도형의 방정식은

$$3x+4y+33=0$$

답 (1) $a=6-p,\ b=-14-q$ (2) $3x+4y+33=0$

1439 (1) $\left(\frac{-4+p}{2},\ \frac{3+q}{2}\right)$

(2) 직선 AB는 직선 $3x+y+4=0$과 수직이고 직선 $3x+y+4=0$의 기울기가 -3이므로 직선 AB의 기울기는 $\frac{1}{3}$이다.

(3) $\overline{\mathrm{AB}}$의 중점 $\left(\frac{-4+p}{2},\ \frac{3+q}{2}\right)$가 직선 $3x+y+4=0$ 위의 점이므로

$$3\cdot\frac{-4+p}{2}+\frac{3+q}{2}+4=0$$

$$\therefore\ 3p+q-1=0 \quad \cdots\cdots\ ㉠$$

또 직선 AB의 기울기가 $\frac{1}{3}$이므로

$$\frac{q-3}{p+4}=\frac{1}{3} \qquad \therefore\ p-3q+13=0 \quad \cdots\cdots\ ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $p=-1,\ q=4$

$$\therefore\ \mathrm{B}(-1,\ 4)$$

답 (1) $\left(\frac{-4+p}{2},\ \frac{3+q}{2}\right)$ (2) $\frac{1}{3}$ (3) $(-1,\ 4)$

유형 01 점의 평행이동 본책 208쪽

점 $(x,\ y)$를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 점의 좌표

➡ $(x+m,\ y+n)$

1440 점 $(a,\ b)$를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 -5만큼 평행이동한 점의 좌표는

$$(a+3,\ b-5)$$

따라서 $a+3=4,\ b-5=2$이므로

$$a=1,\ b=7 \qquad \therefore\ a-b=-6$$

답 -6

1441 $3+a=1,\ 5-2=b$이므로

$$a=-2,\ b=3 \qquad \therefore\ ab=-6$$

답 -6

1442 $\mathrm{P}(a,\ b)$라 하면 $\mathrm{P}'(a-2,\ b+3)$

$$\therefore\ \overline{\mathrm{PP}'}=\sqrt{(a-2-a)^2+(b+3-b)^2}$$
$$=\sqrt{(-2)^2+3^2}=\sqrt{13}$$

답 ④

1443 점 $(-2,\ 4)$를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 점의 좌표가 $(3,\ 1)$이라 하면

$$-2+a=3,\ 4+b=1 \qquad \therefore\ a=5,\ b=-3$$

점 $(m,\ n)$을 x축의 방향으로 5만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 점의 좌표가 $(2,\ 5)$라 하면

$$m+5=2,\ n-3=5 \qquad \therefore\ m=-3,\ n=8$$

따라서 구하는 점의 좌표는 $(-3,\ 8)$

답 ④

1444 주어진 평행이동을 $(x,\ y) \longrightarrow (x+m,\ y+n)$이라 하면

$$a+m=4,\ 2+n=5,\ -3+m=-7,\ b+n=1$$

$$\therefore\ a=8,\ b=-2,\ m=-4,\ n=3$$

따라서 점 $(-2,\ 8)$이 주어진 평행이동에 의하여 옮겨지는 점의 좌표는

$$(-2-4,\ 8+3),\ 즉\ (-6,\ 11)$$

답 $(-6,\ 11)$

유형 02 점의 평행이동의 활용 본책 208쪽

평행이동한 점의 좌표를 구한 후 다음을 이용한다.

① 점이 직선 또는 원 위에 있다.
➡ 점의 좌표를 직선 또는 원의 방정식에 대입한다.

② 두 점 사이의 거리 ➡ 공식을 이용한다.

1445 점 $(3,\ a)$가 주어진 평행이동에 의하여 옮겨지는 점의 좌표는

$$(3-4,\ a+5),\ 즉\ (-1,\ a+5)$$

이 점이 직선 $y=3x+10$ 위의 점이므로

$$a+5=3\cdot(-1)+10 \qquad \therefore\ a=2$$

답 ②

1446 점 $(2,\ -7)$을 x축의 방향으로 -6만큼, y축의 방향으로 4만큼 평행이동한 점의 좌표는

$$(2-6,\ -7+4),\ 즉\ (-4,\ -3)$$

이 점이 중심이 원점인 원 위의 점이므로 구하는 원의 반지름의 길이는 $\sqrt{(-4)^2+(-3)^2}=5$

답 ④

1447 점 $(a,\ -1)$을 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 점의 좌표는

$$(a+2,\ -2) \quad \cdots\ ❶$$

한편 $x^2+y^2-2x+by+b^2-15=0$에서

$$(x-1)^2+\left(y+\frac{b}{2}\right)^2=16-\frac{3}{4}b^2$$

이므로 원의 중심의 좌표는 $\left(1,\ -\frac{b}{2}\right)$ $\cdots$ ❷

따라서 $a+2=1,\ -2=-\frac{b}{2}$이므로

$$a=-1,\ b=4 \quad \cdots\ ❸$$

$$\therefore\ a+b=3 \quad \cdots\ ❹$$

답 3

12 도형의 이동

채점 기준	비율
❶ 평행이동한 점의 좌표를 구할 수 있다.	30 %
❷ 원의 중심의 좌표를 구할 수 있다.	30 %
❸ a, b의 값을 구할 수 있다.	30 %
❹ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	10 %

1448 점 A(4, 2)를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 -6만큼 평행이동한 점을 A′이라 하면

$A'(4+a,\ 2-6)$, 즉 $A'(4+a,\ -4)$

이때 $\overline{OA'}=2\overline{OA}$에서 $\overline{OA'}^2=4\overline{OA}^2$이므로

$(4+a)^2+(-4)^2=4(4^2+2^2)$

$a^2+8a-48=0,\quad (a+12)(a-4)=0$

$\therefore a=4\ (\because a>0)$ 답 ②

1449 도형을 평행이동해도 그 모양은 변하지 않으므로 △OAB는 정삼각형이다.

이때 $ab>0$이고 A(2, 0)이므로 점 B는 제1사분면 위의 점이다.

$\therefore a>0,\ b>0$

정삼각형 OAB의 한 변의 길이는 $\overline{OA}=2$이므로

$a=\frac{1}{2}\cdot 2=1,\ b=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 2=\sqrt{3}$

즉 $B(1, \sqrt{3})$이므로

$1+m=3,\ \sqrt{3}+n=2\sqrt{3}\quad \therefore m=2,\ n=\sqrt{3}$

$\therefore mn=2\sqrt{3}$ 답 $2\sqrt{3}$

유형 03 도형의 평행이동; 직선

본책 209쪽

직선 $y=mx+n$을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 직선의 방정식
➡ $y-b=m(x-a)+n$, 즉 $y=mx-ma+n+b$

1450 평행이동한 직선의 방정식은

$3(x-3)+2(y-k)-7=0$

$\therefore 3x+2y-2k-16=0$

이 직선이 원점을 지나므로

$-2k-16=0\quad \therefore k=-8$ 답 ③

1451 평행이동한 직선의 방정식은

$k(x-m)-(y-3)+k-1=0$

$\therefore kx-y-km+k+2=0$

이 직선이 직선 $2x-y+1=0$과 일치하므로

$k=2,\ -km+k+2=1$

따라서 $k=2$, $m=\frac{3}{2}$이므로 $\quad k+m=\frac{7}{2}$ 답 ④

1452 평행이동한 직선의 방정식은

$y-b=2(x-a)-5$

$\therefore y=2x-2a+b-5$ ⋯ ❶

이 직선이 처음 직선과 일치하므로 $\quad -2a+b-5=-5$

$b=2a\quad \therefore \frac{b}{a}=2$ ⋯ ❷

답 2

채점 기준	비율
❶ 평행이동한 직선의 방정식을 구할 수 있다.	50 %
❷ $\frac{b}{a}$의 값을 구할 수 있다.	50 %

1453 점 (1, 2)를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 점의 좌표가 $(-4, 4)$라 하면

$1+a=-4,\ 2+b=4\quad \therefore a=-5,\ b=2$

직선 $4x+3y-6=0$을 x축의 방향으로 -5만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$4(x+5)+3(y-2)-6=0$

$\therefore 4x+3y+8=0$

따라서 $p=3$, $q=8$이므로 $\quad p+q=11$ 답 11

1454 직선 l'의 방정식은

$y-5=a(x+1)+b\quad \therefore y=ax+a+b+5$

이 직선이 직선 $y=-\frac{1}{3}x+4$와 y축 위의 점에서 수직으로 만나므로 기울기는 3이고, y절편은 4이다.

따라서 $a=3$, $a+b+5=4$이므로

$a=3,\ b=-4\quad \therefore a-b=7$ 답 7

유형 04 도형의 평행이동; 원

본책 210쪽

① 원 $x^2+y^2=r^2$을 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 원의 방정식
➡ $(x-m)^2+(y-n)^2=r^2$

② 원의 평행이동은 원의 중심의 평행이동으로 생각할 수 있다.

1455 $x^2+y^2-10x+4y+4=0$에서

$(x-5)^2+(y+2)^2=25$

이 원을 평행이동한 원의 방정식은

$(x-a-5)^2+(y-b+2)^2=25$

이 원의 중심이 원점이므로

$-a-5=0,\ -b+2=0\quad \therefore a=-5,\ b=2$

$\therefore a+b=-3$ 답 ③

다른 풀이 원 $x^2+y^2-10x+4y+4=0$에서

$(x-5)^2+(y+2)^2=25$

이므로 중심의 좌표는 $(5, -2)$이다.

따라서 중심 $(5, -2)$가 원점으로 옮겨졌으므로

$5+a=0,\ -2+b=0\quad \therefore a=-5,\ b=2$

1456 원 $x^2+y^2+Ax+By+C=0$을 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동하였더니 원 $x^2+y^2=4$와 일치하였으므로 원 $x^2+y^2=4$를 x축의 방향으로 -4만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동하면 원 $x^2+y^2+Ax+By+C=0$과 일치한다.

원 $x^2+y^2=4$를 x축의 방향으로 -4만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 원의 방정식은

$(x+4)^2+(y-2)^2=4$, 즉 $x^2+y^2+8x-4y+16=0$

따라서 $A=8$, $B=-4$, $C=16$이므로

$A-B+C=28$ 답 28

다른 풀이 $x^2+y^2+Ax+By+C=0$에서

$\left(x+\frac{A}{2}\right)^2+\left(y+\frac{B}{2}\right)^2=\frac{A^2}{4}+\frac{B^2}{4}-C$

이 원을 평행이동한 원의 방정식은

$\left(x-4+\frac{A}{2}\right)^2+\left(y+2+\frac{B}{2}\right)^2=\frac{A^2}{4}+\frac{B^2}{4}-C$

이 원이 원 $x^2+y^2=4$와 일치하므로

$-4+\frac{A}{2}=0$, $2+\frac{B}{2}=0$, $\frac{A^2}{4}+\frac{B^2}{4}-C=4$

$\therefore A=8$, $B=-4$, $C=16$

1457 $x^2+y^2+2x-8y+1=0$에서

$(x+1)^2+(y-4)^2=16$

이 원을 평행이동한 원 C_2의 방정식은

$(x-4+1)^2+(y-k-4)^2=16$

$\therefore (x-3)^2+(y-k-4)^2=16$ ⋯ ❶

두 원 C_1, C_2의 중심의 좌표가 각각 $(-1, 4)$, $(3, k+4)$이므로

$\sqrt{(3+1)^2+(k+4-4)^2}=5$

$16+k^2=25$, $k^2=9$

$\therefore k=3$ ($\because k>0$) ⋯ ❷

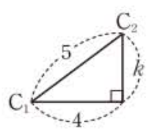
답 3

채점 기준	비율
❶ 원 C_2의 방정식을 구할 수 있다.	50 %
❷ 양수 k의 값을 구할 수 있다.	50 %

SSEN 특강

평행이동한 원의 방정식이나 중심의 좌표를 구하지 않아도 다음과 같이 k의 값을 구할 수 있다.

두 원 C_1, C_2의 중심을 각각 C_1, C_2라 하면 점 C_1을 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 k만큼 평행이동한 점이 점 C_2이고 두 점 C_1, C_2 사이의 거리가 5이므로 오른쪽 그림에서



$4^2+k^2=5^2$, $k^2=9$

$\therefore k=3$ ($\because k>0$)

1458 $x^2+y^2-2x-2y+a=0$에서

$(x-1)^2+(y-1)^2=2-a$

주어진 평행이동에 의하여 이 원이 옮겨지는 원의 방정식은

$(x+1-1)^2+(y-3-1)^2=2-a$

x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한다.

$\therefore x^2+(y-4)^2=2-a$

따라서 중심의 좌표가 $(0, 4)$, 반지름의 길이가 $\sqrt{2-a}$이므로

$b=0$, $\sqrt{2-a}=2$ $\therefore a=-2$, $b=0$

$\therefore a+b=-2$ 답 ②

1459 $x^2+y^2-4x+6y+4=0$에서

$(x-2)^2+(y+3)^2=9$

이 원을 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 원의 방정식은

$(x-m-2)^2+(y-n+3)^2=9$

이 원이 원 $x^2+y^2=9$와 일치하려면

$-m-2=0$, $-n+3=0$

$\therefore m=-2$, $n=3$

원 $x^2+y^2-6x-8y+24=0$, 즉 $(x-3)^2+(y-4)^2=1$을 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 원의 방정식은

$(x+2-3)^2+(y-3-4)^2=1$

$\therefore (x-1)^2+(y-7)^2=1$

따라서 원의 중심 $(1, 7)$과 원점 사이의 거리는

$\sqrt{1^2+7^2}=5\sqrt{2}$ 답 ②

유형 05 도형의 평행이동; 포물선

본책 211쪽

① 포물선 $y=ax^2+bx+c$를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 포물선의 방정식

➡ $y-n=a(x-m)^2+b(x-m)+c$

② 포물선의 평행이동은 꼭짓점의 평행이동으로 생각할 수 있다.

1460 평행이동한 포물선의 방정식은

$y-1=(x+3)^2+4(x+3)-5$

$\therefore y=x^2+10x+17=(x+5)^2-8$

이 포물선의 꼭짓점의 좌표는 $(-5, -8)$이므로

$a=-5$, $b=-8$ $\therefore a-b=3$ 답 3

다른 풀이 포물선 $y=x^2+4x-5$, 즉 $y=(x+2)^2-9$의 꼭짓점의 좌표는 $(-2, -9)$이므로

$a=-2-3=-5$, $b=-9+1=-8$

1461 포물선 $y=x^2-6x+1$, 즉 $y=(x-3)^2-8$을 평행이동한 포물선의 방정식은

$y-b=(x-a-3)^2-8$

$\therefore y=(x-a-3)^2-8+b$

이 포물선이 포물선 $y=x^2$과 일치하므로

$-a-3=0$, $-8+b=0$ $\therefore a=-3$, $b=8$

$\therefore b-a=11$ 답 11

1462 포물선 $y=-2x^2+8x-3$, 즉 $y=-2(x-2)^2+5$를 평행이동한 포물선의 방정식은

$y-a=-2(x-a-4-2)^2+5$

$\therefore y=-2(x-a-6)^2+5+a$ ⋯ ❶

이 포물선의 꼭짓점 $(a+6, 5+a)$가 x축 위에 있으므로

$5+a=0$ $\therefore a=-5$ ⋯ ❷

따라서 꼭짓점의 좌표는 $(1, 0)$이다. ⋯ ❸

답 $(1, 0)$

채점 기준	비율
❶ 평행이동한 포물선의 방정식을 구할 수 있다.	50 %
❷ a의 값을 구할 수 있다.	30 %
❸ 꼭짓점의 좌표를 구할 수 있다.	20 %

1463 포물선 $y=x^2+2x$, 즉 $y=(x+1)^2-1$을 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 포물선의 방정식은

$$y-n=(x-m+1)^2-1$$
$$\therefore y=(x-m+1)^2-1+n$$

이 포물선이 포물선 $y=x^2+8x+11$, 즉 $y=(x+4)^2-5$와 일치하려면

$$-m+1=4,\ -1+n=-5$$
$$\therefore m=-3,\ n=-4$$

직선 l: $x-2y+1=0$을 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 -4만큼 평행이동한 직선 l'의 방정식은

$$(x+3)-2(y+4)+1=0 \qquad \therefore x-2y-4=0$$

두 직선 l, l' 사이의 거리는 직선 l 위의 점 $(-1, 0)$과 직선 l' 사이의 거리와 같으므로

$$\frac{|-1-4|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\frac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$$

답 ⑤

유형 06 도형의 평행이동의 활용

본책 211쪽

평행이동한 도형의 방정식을 구한 후 다음을 이용한다.
① 세 직선이 삼각형을 이루지 않는다.
➡ 세 직선이 한 점에서 만나거나 세 직선 중 두 직선이 평행하거나 세 직선이 모두 평행하다.
② 직선이 원의 넓이를 이등분한다.
➡ 직선이 원의 중심을 지난다.
③ 직선이 원에 접한다.
➡ 원의 중심과 직선 사이의 거리가 원의 반지름의 길이와 같다.

1464 평행이동한 원의 방정식은

$$(x-3)^2+(y-a)^2=20$$

이 원이 직선 $4x+2y-7=0$과 접하므로 원의 중심 $(3, a)$와 직선 $4x+2y-7=0$ 사이의 거리는 원의 반지름의 길이인 $\sqrt{20}$과 같다. 즉

$$\frac{|12+2a-7|}{\sqrt{4^2+2^2}}=\sqrt{20}, \qquad |5+2a|=20$$

$5+2a=-20$ 또는 $5+2a=20$

$$\therefore a=\frac{15}{2}\ (\because a>0)$$

답 ⑤

SSEN 특강 원과 직선의 위치 관계

반지름의 길이가 r인 원의 중심과 직선 사이의 거리를 d라 하면 원과 직선의 위치 관계는
① $d<r$ ➡ 서로 다른 두 점에서 만난다.
② $d=r$ ➡ 한 점에서 만난다. (접한다.)
③ $d>r$ ➡ 만나지 않는다.

1465 평행이동한 직선의 방정식은

$$3(x-k)-2y=0 \qquad \therefore 3x-2y-3k=0 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

세 직선의 기울기가 모두 다르므로 삼각형을 이루지 않으려면 직선 ㉠이 두 직선 $3x+y-4=0$, $x+2y-3=0$의 교점을 지나야 한다.

$3x+y-4=0$, $x+2y-3=0$을 연립하여 풀면 $x=1$, $y=1$
따라서 직선 ㉠이 점 $(1, 1)$을 지나야 하므로

$$3-2-3k=0 \qquad \therefore k=\frac{1}{3}$$

답 $\frac{1}{3}$

1466 평행이동한 직선의 방정식은

$$x-a+3(y+a)=-4 \qquad \therefore x+3y+2a+4=0$$

이 직선이 원 $(x-2)^2+(y+4)^2=25$의 넓이를 이등분하려면 직선이 원의 중심 $(2, -4)$를 지나야 하므로

$$2-12+2a+4=0 \qquad \therefore a=3$$

답 ③

1467 $x^2+y^2+2x-4y-11=0$에서

$$(x+1)^2+(y-2)^2=16$$

이 원을 평행이동한 원의 방정식은

$$(x-m+1)^2+(y-n-2)^2=16$$

이 원의 중심 $(m-1, n+2)$가 제1사분면 위에 있으면서 이 원이 x축과 y축에 동시에 접하므로

$$m-1=4,\ n+2=4 \qquad \therefore m=5,\ n=2$$

원의 반지름의 길이는 $\sqrt{16}=4$

$$\therefore m-n=3$$

답 3

1468 평행이동한 직선의 방정식은

$$y=-3(x-a)+4 \qquad \therefore 3x+y-3a-4=0 \qquad \cdots ❶$$

이 직선이 원 $x^2+y^2=10$과 서로 다른 두 점에서 만나므로 원의 중심 $(0, 0)$과 직선 사이의 거리가 원의 반지름의 길이인 $\sqrt{10}$보다 작아야 한다. 즉

$$\frac{|-3a-4|}{\sqrt{3^2+1^2}}<\sqrt{10}, \qquad |3a+4|<10$$

$$-10<3a+4<10 \qquad \therefore -\frac{14}{3}<a<2 \qquad \cdots ❷$$

따라서 정수 a는 -4, -3, -2, -1, 0, 1이므로 구하는 합은

$$(-4)+(-3)+(-2)+(-1)+0+1=-9 \qquad \cdots ❸$$

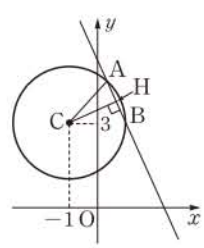
답 -9

채점 기준	비율
❶ 평행이동한 직선의 방정식을 구할 수 있다.	30 %
❷ a의 값의 범위를 구할 수 있다.	50 %
❸ 정수 a의 값의 합을 구할 수 있다.	20 %

1469 평행이동한 원의 방정식은

$$(x+1)^2+(y-3)^2=4$$

오른쪽 그림과 같이 원의 중심을 C$(-1, 3)$이라 하고, 점 C에서 직선 $2x+y-5=0$에 내린 수선의 발을 H라 하면



$$\overline{CH}=\frac{|-2+3-5|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{4\sqrt{5}}{5}$$

직각삼각형 CAH에서

$$\overline{AH}=\sqrt{\overline{CA}^2-\overline{CH}^2}=\sqrt{2^2-\left(\frac{4\sqrt{5}}{5}\right)^2}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$\therefore \overline{AB}=2\overline{AH}=\frac{4\sqrt{5}}{5}$$

답 ④

유형 07 점의 대칭이동
본책 212쪽

점 (x, y)를 다음에 대하여 대칭이동한 점의 좌표
① x축 ➡ y좌표의 부호를 바꾼다. ➡ $(x, -y)$
② y축 ➡ x좌표의 부호를 바꾼다. ➡ $(-x, y)$
③ 원점 ➡ x좌표, y좌표의 부호를 모두 바꾼다. ➡ $(-x, -y)$
④ 직선 $y=x$ ➡ x좌표와 y좌표를 서로 바꾼다. ➡ (y, x)
⑤ 직선 $y=-x$ ➡ x좌표, y좌표의 부호를 모두 바꾼 후 이들을 서로 바꾼다.
➡ $(-y, -x)$

1470 Q$(3, -2)$, R$(2, 3)$이므로 △PQR의 무게중심의 좌표는

$\left(\frac{3+3+2}{3}, \frac{2-2+3}{3}\right)$, 즉 $\left(\frac{8}{3}, 1\right)$ 답 ⑤

1471 점 (a, b)를 y축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는

$(-a, b)$

이 점이 제3사분면 위의 점이므로

$-a<0,\ b<0 \quad \therefore a>0,\ b<0$ ······ ㉠ ··· ❶

점 $(a-b, ab)$를 원점에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는

$(-a+b, -ab)$

이 점을 y축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는

$(a-b, -ab)$

이때 ㉠에서 $a-b>0$, $-ab>0$이므로 점 $(a-b, -ab)$는 제1사분면 위에 있다. ··· ❷

답 제1사분면

채점 기준	비율
❶ a, b의 부호를 알 수 있다.	40 %
❷ 대칭이동한 점이 어느 사분면 위에 있는지 구할 수 있다.	60 %

1472 Q$(a, -b)$, R$(-a, b)$, S$(-a, -b)$이고, 네 점 P, Q, R, S를 꼭짓점으로 하는 사각형의 넓이가 4이므로

$2|a|\cdot 2|b|=4 \quad \therefore |ab|=1$ 답 ①

1473 점 $P_1(-2, 3)$을 원점에 대하여 대칭이동한 점 P_2의 좌표는

$(2, -3)$

점 $P_2(2, -3)$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점 P_3의 좌표는

$(-3, 2)$

점 $P_3(-3, 2)$를 원점에 대하여 대칭이동한 점 P_4의 좌표는

$(3, -2)$

점 $P_4(3, -2)$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점 P_5의 좌표는

$(-2, 3)$ ← 점 P_1의 좌표와 같다.

즉 점 P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, ⋯는 4개의 점 $(-2, 3)$, $(2, -3)$, $(-3, 2)$, $(3, -2)$의 순서로 반복된다.

이때 $2020=4\cdot 505$이므로 점 P_{2020}의 좌표는 점 P_4의 좌표인 $(3, -2)$와 같다.

따라서 $a=3$, $b=-2$이므로 $\quad a+b=1$ 답 1

1474 포물선 $y=x^2-3x$ 위의 한 점의 좌표를 (a, a^2-3a)라 하면 이 점을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는

(a^2-3a, a)

이 점이 포물선 $y=x^2-3x$ 위의 점이므로

$a=(a^2-3a)^2-3(a^2-3a)$

$a^4-6a^3+6a^2+8a=0$

$a(a-4)(a^2-2a-2)=0$

$\therefore a=0$ 또는 $a=4$ 또는 $a=1\pm\sqrt{3}$

$a=0$ 또는 $a=4$이면 두 점 (a, a^2-3a), (a^2-3a, a)는 서로 같은 점이므로

$a=1\pm\sqrt{3}$

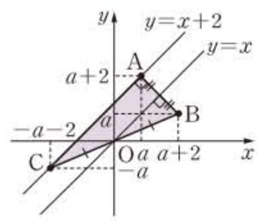
따라서 두 점의 좌표는 $(1+\sqrt{3}, 1-\sqrt{3})$, $(1-\sqrt{3}, 1+\sqrt{3})$이므로 두 점 사이의 거리는

$\sqrt{\{(1-\sqrt{3})-(1+\sqrt{3})\}^2+\{(1+\sqrt{3})-(1-\sqrt{3})\}^2}$

$=\sqrt{12+12}=2\sqrt{6}$ 답 ②

1475 A$(a, a+2)$ $(a>0)$라 하면

B$(a+2, a)$, C$(-a-2, -a)$



점 C는 직선 $y=x+2$ 위의 점이고, △ABC는 ∠A$=90°$인 직각삼각형이므로

$\frac{1}{2}\cdot\overline{AB}\cdot\overline{AC}=16$

이때

$\overline{AB}=\sqrt{(a+2-a)^2+\{a-(a+2)\}^2}=2\sqrt{2}$,

$\overline{AC}=\sqrt{(-a-2-a)^2+\{-a-(a+2)\}^2}=2\sqrt{2}(a+1)$

이므로

$\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2}(a+1)=16$

$a+1=4 \quad \therefore a=3$

따라서 점 A의 좌표는 $(3, 5)$이다. 답 $(3, 5)$

유형 08~10 도형의 대칭이동
본책 213쪽

도형 $f(x, y)=0$을 다음에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식
① x축 ➡ y 대신 $-y$를 대입한다. ➡ $f(x, -y)=0$
② y축 ➡ x 대신 $-x$를 대입한다. ➡ $f(-x, y)=0$
③ 원점 ➡ x 대신 $-x$를, y 대신 $-y$를 대입한다.
➡ $f(-x, -y)=0$
④ 직선 $y=x$ ➡ x 대신 y를, y 대신 x를 대입한다.
➡ $f(y, x)=0$
⑤ 직선 $y=-x$ ➡ x 대신 $-y$를, y 대신 $-x$를 대입한다.
➡ $f(-y, -x)=0$

1476 직선 $ax+y-4=0$을 x축에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$ax-y-4=0$

이 직선을 원점에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$a\cdot(-x)-(-y)-4=0 \quad \therefore -ax+y-4=0$

이 직선이 점 $(3, -5)$를 지나므로

$-3a-5-4=0 \quad \therefore a=-3$ 답 ③

1477 직선 l_1의 방정식은

$-y=-3x-2 \qquad \therefore y=3x+2$ ⋯ ❶

직선 l_2의 방정식은

$x=3y+2 \qquad \therefore x-3y-2=0$ ⋯ ❷

따라서 구하는 x절편은 2이다. ⋯ ❸

답 2

채점 기준	비율
❶ 직선 l_1의 방정식을 구할 수 있다.	40 %
❷ 직선 l_2의 방정식을 구할 수 있다.	40 %
❸ x절편을 구할 수 있다.	20 %

1478 직선 $y=-x+1$을 y축에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$y=-(-x)+1 \qquad \therefore y=x+1$

이 직선과 수직인 직선의 기울기는 -1이므로 구하는 직선의 방정식을 $y=-x+a$, 즉 $x+y-a=0$ (a는 상수)이라 하자.

이 직선과 원점 사이의 거리가 $\sqrt{2}$이므로

$\frac{|-a|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\sqrt{2}, \qquad |a|=2 \qquad \therefore a=\pm 2$

따라서 구하는 직선의 방정식은

$x+y+2=0$ 또는 $x+y-2=0$

답 ①

1479 직선 $ax+(b-3)y-6=0$을 원점에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$-ax-(b-3)y-6=0$

$\therefore ax+(b-3)y+6=0$

이 직선이 직선 $(b+2)x-(a+1)y+6=0$과 일치하므로

$a=b+2,\ b-3=-(a+1)$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $\quad a=2,\ b=0$

$\therefore 2a+b=4$

답 ④

1480 원 $x^2+y^2-6x+8y-16=0$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$x^2+y^2+8x-6y-16=0$

이 원이 y축과 만나는 점의 y좌표는

$y^2-6y-16=0, \qquad (y+2)(y-8)=0$

$\therefore y=-2$ 또는 $y=8$

따라서 두 점 사이의 거리는

$8-(-2)=10$

답 ③

1481 중심의 좌표가 $(-2, 3)$이고 반지름의 길이가 k인 원의 방정식은

$(x+2)^2+(y-3)^2=k^2$

이 원을 x축에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$(x+2)^2+(-y-3)^2=k^2$

$\therefore (x+2)^2+(y+3)^2=k^2$

이 원이 점 $(-3, -3)$을 지나므로

$(-3+2)^2+(-3+3)^2=k^2$

$k^2=1 \qquad \therefore k=1\ (\because k>0)$

답 1

1482 $x^2+y^2-4x+2y+1=0$에서

$(x-2)^2+(y+1)^2=4$

이 원을 원점에 대하여 대칭이동한 원 O'의 방정식은

$(-x-2)^2+(-y+1)^2=4$

$\therefore (x+2)^2+(y-1)^2=4$

$\overline{PQ}$의 길이의 최솟값은 두 원 O, O'의 중심 $(2, -1)$, $(-2, 1)$을 이은 선분의 길이에서 두 원의 반지름의 길이의 합을 뺀 것이므로

$\sqrt{(-2-2)^2+(1+1)^2}-(2+2)=2\sqrt{5}-4$

답 $2\sqrt{5}-4$

1483 포물선 $y=x^2-2ax+3$, 즉 $y=(x-a)^2+3-a^2$을 y축에 대하여 대칭이동한 포물선의 방정식은

$y=(-x-a)^2+3-a^2 \qquad \therefore y=(x+a)^2+3-a^2$

이 포물선의 꼭짓점 $(-a, 3-a^2)$이 직선 $y=x-3$ 위에 있으므로

$3-a^2=-a-3, \qquad a^2-a-6=0$

$(a+2)(a-3)=0 \qquad \therefore a=3\ (\because a>0)$

답 3

1484 포물선 $y=x^2+4x-3$을 x축에 대하여 대칭이동한 포물선의 방정식은

$-y=x^2+4x-3 \qquad \therefore y=-x^2-4x+3$

이 포물선이 점 $(1, a)$를 지나므로

$a=-1-4+3=-2$

답 -2

1485 포물선 $y=x^2+ax+b$를 원점에 대하여 대칭이동한 포물선의 방정식은

$-y=(-x)^2+a\cdot(-x)+b$

$\therefore y=-x^2+ax-b=-\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\frac{a^2}{4}-b$

이 포물선의 꼭짓점의 좌표가 $(-2, 3)$이므로

$\frac{a}{2}=-2,\ \frac{a^2}{4}-b=3 \qquad \therefore a=-4,\ b=1$

$\therefore b-a=5$

답 ④

유형 11 대칭이동의 활용

본책 214쪽

대칭이동한 도형의 방정식을 구한 후 다음을 이용한다.

① 직선이 원의 넓이를 이등분한다.

➡ 직선이 원의 중심을 지난다.

② 직선이 원에 접한다.

➡ 원의 중심과 직선 사이의 거리가 원의 반지름의 길이와 같다.

1486 원 C의 방정식은 $\quad (x+3)^2+(y+2)^2=4$

직선 l의 방정식은 $\quad 2x-my+3=0$

직선 l이 원 C의 넓이를 이등분하려면 직선이 원의 중심 $(-3, -2)$를 지나야 하므로

$-6+2m+3=0 \qquad \therefore m=\frac{3}{2}$

답 ③

1487 직선 $3x+4y+a=0$을 원점에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$-3x-4y+a=0 \qquad \therefore 3x+4y-a=0$ ⋯⋯ ㉠

직선 ㉠이 원 $(x-4)^2+(y+1)^2=4$에 접하므로 원의 중심 $(4,\ -1)$과 직선 ㉠ 사이의 거리는 원의 반지름의 길이인 2와 같다. 즉

$$\frac{|12-4-a|}{\sqrt{3^2+4^2}}=2, \qquad |8-a|=10$$

$8-a=-10$ 또는 $8-a=10$

$\therefore a=-2$ 또는 $a=18$

따라서 모든 a의 값의 합은

$-2+18=16$ 답 ⑤

1488 $x^2+y^2+2x-6y=0$에서

$(x+1)^2+(y-3)^2=10$

이 원을 y축에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$(-x+1)^2+(y-3)^2=10$

$\therefore (x-1)^2+(y-3)^2=10$ ··· ❶

이 원이 직선 $y=x+k$, 즉 $x-y+k=0$과 서로 다른 두 점에서 만나려면 원의 중심 $(1,\ 3)$과 직선 $x-y+k=0$ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이인 $\sqrt{10}$보다 작아야 하므로

$$\frac{|1-3+k|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}<\sqrt{10}, \qquad |-2+k|<2\sqrt{5}$$

$-2\sqrt{5}<-2+k<2\sqrt{5}$

$\therefore 2-2\sqrt{5}<k<2+2\sqrt{5}$ ··· ❷

따라서 $a=2-2\sqrt{5}$, $b=2+2\sqrt{5}$이므로

$ab=-16$ ··· ❸

답 -16

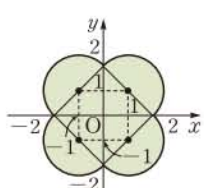
채점 기준	비율
❶ y축에 대하여 대칭이동한 원의 방정식을 구할 수 있다.	40 %
❷ k의 값의 범위를 구할 수 있다.	50 %
❸ ab의 값을 구할 수 있다.	10 %

1489 원 $(x+1)^2+(y+1)^2=2$를 x축, y축, 원점에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은 각각

$(x+1)^2+(y-1)^2=2$,

$(x-1)^2+(y+1)^2=2$,

$(x-1)^2+(y-1)^2=2$



따라서 구하는 넓이는 오른쪽 그림의 색칠한 부분의 넓이와 같으므로

$2\cdot\pi\cdot(\sqrt{2})^2+(2\sqrt{2})^2=4\pi+8$

답 $4\pi+8$

유형 12 점과 도형의 평행이동과 대칭이동 본책 215쪽

도형 $f(x,\ y)=0 \xrightarrow[y\text{축의 방향으로 } n\text{만큼 평행이동}]{x\text{축의 방향으로 } m\text{만큼,}} f(x-m,\ y-n)=0$

$\xrightarrow[\text{대하여 대칭이동}]{\text{직선 } y=x\text{에}} f(y-m,\ x-n)=0$

1490 직선 l의 기울기를 m이라 하면 직선 l의 방정식은

$y-3=m(x+6) \qquad \therefore y=mx+6m+3$

이 직선을 y축의 방향으로 -4만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$y+4=mx+6m+3 \qquad \therefore y=mx+6m-1$

이 직선을 원점에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$-y=-mx+6m-1 \qquad \therefore y=mx-6m+1$

이 직선이 점 $(9,\ -5)$를 지나므로

$-5=9m-6m+1 \qquad \therefore m=-2$ 답 ④

1491 점 $(a,\ -5)$를 직선 $y=-x$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $(5,\ -a)$

이 점을 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 점의 좌표는 $(4,\ -a+2)$

이 점이 점 $(4,\ b)$와 일치하므로

$-a+2=b \qquad \therefore a+b=2$ 답 ②

1492 원 $(x-4)^2+(y+1)^2=16$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$(x+1)^2+(y-4)^2=16$ ······ ㉠ ··· ❶

원 $(x-4)^2+(y+1)^2=16$을 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 원의 방정식은

$(x-a-4)^2+(y-b+1)^2=16$ ······ ㉡ ··· ❷

㉠, ㉡이 일치하므로

$-a-4=1,\ -b+1=-4 \qquad \therefore a=-5,\ b=5$

$\therefore b-a=10$ ··· ❸

답 10

채점 기준	비율
❶ 대칭이동한 원의 방정식을 구할 수 있다.	40 %
❷ 평행이동한 원의 방정식을 구할 수 있다.	40 %
❸ $b-a$의 값을 구할 수 있다.	20 %

1493 포물선 $y=2x^2+4x+a$를 원점에 대하여 대칭이동한 포물선의 방정식은

$-y=2\cdot(-x)^2-4x+a$

$\therefore y=-2x^2+4x-a$

이 포물선을 y축의 방향으로 5만큼 평행이동한 포물선의 방정식은

$y-5=-2x^2+4x-a$

$\therefore y=-2x^2+4x+5-a$

이 포물선의 y절편이 $5-a$이므로

$5-a=4 \qquad \therefore a=1$ 답 ①

1494 직선 l을 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$y+1=a(x-4)+3 \qquad \therefore y=ax-4a+2$

이 직선을 x축에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$-y=ax-4a+2 \qquad \therefore y=-ax+4a-2$

두 직선 l, l'이 y축 위의 점 $(0,\ 3)$에서 만나므로

$3=4a-2 \qquad \therefore a=\frac{5}{4}$ 답 $\frac{5}{4}$

1495 원 $(x+1)^2+(y+2)^2=25$를 x축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 원의 방정식은

$(x+3+1)^2+(y+2)^2=25$

$\therefore (x+4)^2+(y+2)^2=25$ ⋯ ❶

이 원을 직선 $y=-x$에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$(-y+4)^2+(-x+2)^2=25$

$\therefore (x-2)^2+(y-4)^2=25$ ⋯ ❷

이 원이 x축과 만나는 점의 x좌표는

$(x-2)^2+(-4)^2=25$,　　$(x-2)^2=9$

$x-2=-3$ 또는 $x-2=3$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=5$

따라서 이 원이 x축과 만나는 두 점의 좌표가 $(-1, 0)$, $(5, 0)$이므로 ⋯ ❸

$\overline{PQ}=5-(-1)=6$ ⋯ ❹

답 6

채점 기준	비율
❶ 평행이동한 원의 방정식을 구할 수 있다.	30 %
❷ 직선 $y=-x$에 대하여 대칭이동한 원의 방정식을 구할 수 있다.	30 %
❸ 원이 x축과 만나는 점의 좌표를 구할 수 있다.	30 %
❹ $\overline{PQ}$의 길이를 구할 수 있다.	10 %

유형 13 도형 $f(x, y)=0$의 평행이동과 대칭이동

본책 216쪽

주어진 방정식이 나타내는 도형이 방정식 $f(x, y)=0$이 나타내는 도형을 어떻게 평행이동 또는 대칭이동했는지 찾는다.

예 방정식 $f(y, x-1)=0$이 나타내는 도형

➡ x, y의 위치가 바뀌었으므로 방정식 $f(x, y)=0$이 나타내는 도형을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동하면

$f(y, x)=0$

이때 x가 $x-1$로 바뀌었으므로 이 방정식이 나타내는 도형을 x축의 방향으로 1만큼 평행이동하면

$f(y, x-1)=0$

따라서 방정식 $f(y, x-1)=0$이 나타내는 도형은 방정식 $f(x, y)=0$이 나타내는 도형을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

1496 방정식 $f(x, y)=0$이 나타내는 도형을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동하면

$f(y, x)=0$

방정식 $f(y, x)=0$이 나타내는 도형을 y축의 방향으로 -1만큼 평행이동하면

$f(y+1, x)=0$

따라서 방정식 $f(y+1, x)=0$이 나타내는 도형은 주어진 도형을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 후 y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이므로 ③이다.

답 ③

다른 풀이 주어진 도형은 네 직선

$x=1$, $x=3$, $y=1$, $y=2$ ⋯⋯ ㉠

로 둘러싸인 도형이다.

㉠에 x 대신 $y+1$, y 대신 x를 각각 대입하면

$y+1=1$, $y+1=3$, $x=1$, $x=2$

$\therefore x=1$, $x=2$, $y=0$, $y=2$

따라서 방정식 $f(y+1, x)=0$이 나타내는 도형은 ③이다.

1497 방정식 $f(x, y)=0$이 나타내는 도형을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동하면

$f(y, x)=0$

방정식 $f(y, x)=0$이 나타내는 도형을 x축에 대하여 대칭이동하면

$f(-y, x)=0$

따라서 방정식 $f(-y, x)=0$이 나타내는 도형은 주어진 도형을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 후 x축에 대하여 대칭이동한 것이므로 ①이다.

답 ①

다른 풀이 주어진 도형은 세 직선

$y=x$, $x=1$, $y=0$ ⋯⋯ ㉠

으로 둘러싸인 도형이다.

㉠에 x 대신 $-y$, y 대신 x를 각각 대입하면

$x=-y$, $-y=1$, $x=0$

$\therefore y=-x$, $y=-1$, $x=0$

따라서 방정식 $f(-y, x)=0$이 나타내는 도형은 ①이다.

1498 방정식 $f(x, y)=0$이 나타내는 도형은 방정식 $g(x, y)=0$이 나타내는 도형을 x축에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 -5만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.

방정식 $g(x, y)=0$이 나타내는 도형을 x축에 대하여 대칭이동하면

$g(x, -y)=0$

방정식 $g(x, -y)=0$이 나타내는 도형을 x축의 방향으로 -5만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동하면

$g(x+5, -(y+1))=0$

$\therefore g(x+5, -y-1)=0$

$\therefore f(x, y)=g(x+5, -y-1)$

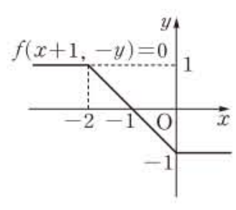
답 ①

1499 ㄱ. 방정식 $f(x, y)=0$이 나타내는 도형을 x축에 대하여 대칭이동하면　$f(x, -y)=0$

방정식 $f(x, -y)=0$이 나타내는 도형을 x축의 방향으로 -1만큼 평행이동하면

$f(x+1, -y)=0$

따라서 이 방정식이 나타내는 도형은 오른쪽 그림과 같다.



ㄴ. 방정식 $f(x, y)=0$이 나타내는 도형을 x축에 대하여 대칭이동하면　$f(x, -y)=0$

방정식 $f(x, -y)=0$이 나타내는 도형을 x축의 방향으로 1만큼 평행이동하면　$f(x-1, -y)=0$

따라서 이 방정식이 나타내는 도형은 [그림 2]와 같다.

ㄷ. 방정식 $f(x, y)=0$이 나타내는 도형을 y축에 대하여 대칭이동하면　$f(-x, y)=0$

방정식 $f(-x,\ y)=0$이 나타내는 도형을 x축의 방향으로 1만큼 평행이동하면

$f(-(x-1),\ y)=0 \qquad \therefore f(1-x,\ y)=0$

따라서 이 방정식이 나타내는 도형은 [그림 2]와 같다.

이상에서 [그림 2]와 같은 도형을 나타내는 방정식인 것은 ㄴ, ㄷ이다. 답 ⑤

유형 14 점에 대한 대칭이동 본책 217쪽

점 P를 점 A에 대하여 대칭이동한 점을 P′이라 하면 점 A는 $\overline{PP'}$의 중점이다.

1500 $x^2+y^2-6x+8=0$에서

$(x-3)^2+y^2=1$

이 원의 중심 $(3,\ 0)$을 점 $(-1,\ 4)$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 $(a,\ b)$라 하면

$\frac{3+a}{2}=-1,\ \frac{b}{2}=4$

$\therefore a=-5,\ b=8$

원은 대칭이동해도 반지름의 길이가 변하지 않으므로 대칭이동한 원은 중심의 좌표가 $(-5,\ 8)$이고 반지름의 길이가 1이다.

따라서 구하는 원의 방정식은

$(x+5)^2+(y-8)^2=1$ 답 ②

1501 $\frac{a-3}{2}=4,\ \frac{5+b}{2}=3$이므로 $\quad a=11,\ b=1$

$\therefore ab=11$ 답 11

1502 포물선 $y=x^2-2x+3=(x-1)^2+2$의 꼭짓점의 좌표는

$(1,\ 2)$

포물선 $y=-x^2+6x-11=-(x-3)^2-2$의 꼭짓점의 좌표는

$(3,\ -2)$ ⋯ ❶

두 포물선이 점 $(\alpha,\ \beta)$에 대하여 대칭이므로 두 포물선의 꼭짓점도 점 $(\alpha,\ \beta)$에 대하여 대칭이다.

따라서 두 꼭짓점을 이은 선분의 중점의 좌표가 $(\alpha,\ \beta)$이므로

$\alpha=\frac{1+3}{2}=2,\ \beta=\frac{2-2}{2}=0$ ⋯ ❷

$\therefore \alpha+\beta=2$ ⋯ ❸

답 2

채점 기준	비율
❶ 두 포물선의 꼭짓점의 좌표를 구할 수 있다.	40 %
❷ α, β의 값을 구할 수 있다.	50 %
❸ $\alpha+\beta$의 값을 구할 수 있다.	10 %

1503 포물선 $y=x^2-ax$ 위의 임의의 점 $P(x,\ y)$를 점 $(2,\ 1)$에 대하여 대칭이동한 점을 $P'(x',\ y')$이라 하면 점 $(2,\ 1)$은 $\overline{PP'}$의 중점이므로

$\frac{x+x'}{2}=2,\ \frac{y+y'}{2}=1$

$\therefore x=4-x',\ y=2-y'$

이것을 $y=x^2-ax$에 대입하면

$2-y'=(4-x')^2-a(4-x')$

$\therefore y'=-x'^2-(a-8)x'+4a-14$

따라서 점 $(x',\ y')$은 포물선 $y=-x^2-(a-8)x+4a-14$ 위의 점이므로 대칭이동한 포물선의 방정식은

$y=-x^2-(a-8)x+4a-14$

이 포물선과 직선 $y=2x$가 만나는 두 점이 원점에 대하여 대칭이므로 이차방정식 $-x^2-(a-8)x+4a-14=2x$, 즉 $x^2+(a-6)x-4a+14=0$의 두 실근의 합이 0이다.

즉 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$-(a-6)=0 \qquad \therefore a=6$ 답 ④

유형 15 직선에 대한 대칭이동 본책 217쪽

점 P를 직선 l에 대하여 대칭이동한 점을 P′이라 하면
① $\overline{PP'}$의 중점은 직선 l 위의 점이다.
② 직선 PP′은 직선 l과 수직이다.

1504 두 점 $(2,\ -3)$, $(-4,\ 5)$를 이은 선분의 중점의 좌표는

$\left(\frac{2-4}{2},\ \frac{-3+5}{2}\right)$, 즉 $(-1,\ 1)$

이 점이 직선 $y=ax+b$ 위의 점이므로

$1=-a+b$ ⋯⋯ ㉠

또 두 점 $(2,\ -3)$, $(-4,\ 5)$를 지나는 직선이 직선 $y=ax+b$와 수직이므로

수직인 두 직선의 기울기의 곱은 -1이다.

$\frac{5-(-3)}{-4-2}\cdot a=-1 \qquad \therefore a=\frac{3}{4}$

$a=\frac{3}{4}$을 ㉠에 대입하면 $\qquad b=\frac{7}{4}$

$\therefore a+b=\frac{5}{2}$ 답 $\frac{5}{2}$

1505 점 $(7,\ 5)$를 직선 $y=3x-1$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 $(a,\ b)$라 하면 두 점 $(7,\ 5)$, $(a,\ b)$를 이은 선분의 중점의 좌표는

$\left(\frac{7+a}{2},\ \frac{5+b}{2}\right)$

이 점이 직선 $y=3x-1$ 위의 점이므로

$\frac{5+b}{2}=3\cdot\frac{7+a}{2}-1 \qquad \therefore 3a-b=-14$ ⋯⋯ ㉠

또 두 점 $(7,\ 5)$, $(a,\ b)$를 지나는 직선이 직선 $y=3x-1$과 수직이므로

$\frac{b-5}{a-7}\cdot 3=-1 \qquad \therefore a+3b=22$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\qquad a=-2,\ b=8$

따라서 대칭이동한 점의 좌표는 $(-2,\ 8)$이다. 답 $(-2,\ 8)$

1506 $x^2+y^2-4x-10y+28=0$에서

$(x-2)^2+(y-5)^2=1$

$x^2+y^2-8x-6y+c=0$에서

$(x-4)^2+(y-3)^2=25-c$

12 도형의 이동

두 원의 반지름의 길이가 같아야 하므로

$1=\sqrt{25-c}$ $\quad\therefore c=24$

두 원의 중심 $(2,\ 5)$, $(4,\ 3)$을 이은 선분의 중점의 좌표는

$\left(\dfrac{2+4}{2},\ \dfrac{5+3}{2}\right)$, 즉 $(3,\ 4)$

이 점이 직선 $y=ax+b$ 위의 점이므로

$4=3a+b$ …… ㉠

또 두 원의 중심 $(2,\ 5)$, $(4,\ 3)$을 지나는 직선이 직선 $y=ax+b$와 수직이므로

$\dfrac{3-5}{4-2}\cdot a=-1$ $\quad\therefore a=1$

$a=1$을 ㉠에 대입하면

$4=3+b$ $\quad\therefore b=1$

$\therefore a+b+c=26$

답 26

1507 $\mathrm{C}(a,\ b)$라 하면 $\overline{\mathrm{BC}}$의 중점의 좌표는

$\left(\dfrac{2+a}{2},\ \dfrac{1+b}{2}\right)$

이 점이 직선 $y=2x+1$ 위의 점이므로

$\dfrac{1+b}{2}=2\cdot\dfrac{2+a}{2}+1$ $\quad\therefore 2a-b=-5$ …… ㉠

또 직선 BC가 직선 $y=2x+1$과 수직이므로

$\dfrac{b-1}{a-2}\cdot 2=-1$ $\quad\therefore a+2b=4$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-\dfrac{6}{5},\ b=\dfrac{13}{5}$

$\therefore \mathrm{C}\left(-\dfrac{6}{5},\ \dfrac{13}{5}\right)$

$\overline{\mathrm{AB}}=2-(-1)=3$이고 점 C와 $\underbrace{\text{직선 AB}}_{y=1}$ 사이의 거리가

$\dfrac{13}{5}-1=\dfrac{8}{5}$이므로

$\triangle\mathrm{ABC}=\dfrac{1}{2}\cdot3\cdot\dfrac{8}{5}=\dfrac{12}{5}$

답 $\dfrac{12}{5}$

1508 원 $(x-1)^2+(y-2)^2=1$의 중심 $(1,\ 2)$를 직선 $y=x-1$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 $(a,\ b)$라 하면 두 점 $(1,\ 2)$, $(a,\ b)$를 이은 선분의 중점의 좌표는

$\left(\dfrac{1+a}{2},\ \dfrac{2+b}{2}\right)$

이 점이 직선 $y=x-1$ 위의 점이므로

$\dfrac{2+b}{2}=\dfrac{1+a}{2}-1$ $\quad\therefore a-b=3$ …… ㉠

또 두 점 $(1,\ 2)$, $(a,\ b)$를 지나는 직선이 직선 $y=x-1$과 수직이므로

$\dfrac{b-2}{a-1}\cdot1=-1$ $\quad\therefore a+b=3$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=3,\ b=0$

원은 대칭이동해도 반지름의 길이가 변하지 않으므로 대칭이동한 원은 중심의 좌표가 $(3,\ 0)$이고 반지름의 길이가 1이다.

이 원이 직선 $x+ky+3=0$과 접하므로

$\dfrac{|3+3|}{\sqrt{1^2+k^2}}=1,\quad 6=\sqrt{1+k^2}$

$k^2+1=36,\quad k^2=35$ $\quad\therefore k=\sqrt{35}$ ($\because k>0$)

답 $\sqrt{35}$

유형 16 대칭이동을 이용한 거리의 최솟값

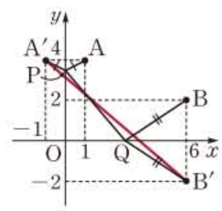
본책 218쪽

두 점 A, B와 x축(또는 y축 또는 직선 $y=x$) 위의 점 P에 대하여 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$의 최솟값은 다음과 같은 순서로 구한다.

(i) 점 A를 x축(또는 y축 또는 직선 $y=x$)에 대하여 대칭이동한 점 A′의 좌표를 구한다.

(ii) $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}=\overline{\mathrm{A'P}}+\overline{\mathrm{BP}}\ge\overline{\mathrm{A'B}}$이므로 구하는 최솟값은 $\overline{\mathrm{A'B}}$의 길이와 같음을 이용한다.

1509 점 A를 y축에 대하여 대칭이동한 점을 A′, 점 B를 x축에 대하여 대칭이동한 점을 B′이라 하면



$\mathrm{A'}(-1,\ 4)$, $\mathrm{B'}(6,\ -2)$

$\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{A'P}}$, $\overline{\mathrm{BQ}}=\overline{\mathrm{B'Q}}$이므로

$\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{QB}}$

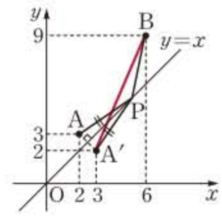
$=\overline{\mathrm{A'P}}+\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{QB'}}$

$\ge\overline{\mathrm{A'B'}}$

$=\sqrt{(6+1)^2+(-2-4)^2}=\sqrt{85}$

답 $\sqrt{85}$

1510 점 A를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 A′이라 하면



$\mathrm{A'}(3,\ 2)$

$\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{A'P}}$이므로

$\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}=\overline{\mathrm{A'P}}+\overline{\mathrm{BP}}$

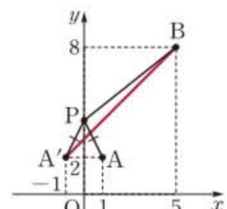
$\ge\overline{\mathrm{A'B}}$

$=\sqrt{(6-3)^2+(9-2)^2}$

$=\sqrt{58}$

답 ③

1511 점 A를 y축에 대하여 대칭이동한 점을 A′이라 하면



$\mathrm{A'}(-1,\ 2)$

$\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{A'P}}$이므로

$\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}=\overline{\mathrm{A'P}}+\overline{\mathrm{BP}}$

$\ge\overline{\mathrm{A'B}}$ … ❶

직선 A′B의 방정식은

$y-2=\dfrac{8-2}{5+1}(x+1)$ $\quad\therefore y=x+3$ … ❷

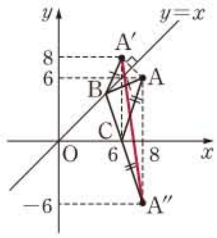
따라서 점 P의 좌표는 $(0,\ 3)$이다. … ❸

직선 A′B가 y축과 만나는 점이 P일 때 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$가 최소이다.

답 $(0,\ 3)$

채점 기준	비율
❶ $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$의 최솟값이 $\overline{\mathrm{A'B}}$의 길이임을 알 수 있다.	50 %
❷ 직선 A′B의 방정식을 구할 수 있다.	30 %
❸ 점 P의 좌표를 구할 수 있다.	20 %

1512 점 A(8, 6)을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 A′, x축에 대하여 대칭이동한 점을 A″이라 하면



$A'(6,\ 8)$, $A''(8,\ -6)$

$\overline{AB}=\overline{A'B}$, $\overline{CA}=\overline{CA''}$이므로

$\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA}$
$=\overline{A'B}+\overline{BC}+\overline{CA''}$
$\geq\overline{A'A''}$

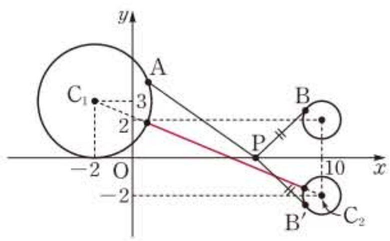
따라서 △ABC의 둘레의 길이의 최솟값은

$\overline{A'A''}=\sqrt{(8-6)^2+(-6-8)^2}=10\sqrt{2}$ 답 $10\sqrt{2}$

1513 원 $(x-10)^2+(y-2)^2=1$을 x축에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$(x-10)^2+(y+2)^2=1$

점 B를 x축에 대하여 대칭이동한 점을 B′이라 하면 점 B′은 원 $(x-10)^2+(y+2)^2=1$ 위의 점이고, $\overline{BP}=\overline{B'P}$이다.



두 원 $(x+2)^2+(y-3)^2=9$, $(x-10)^2+(y+2)^2=1$의 중심을 각각 $C_1(-2,\ 3)$, $C_2(10,\ -2)$라 하면 네 점 C_1, A, B′, C_2가 한 직선 위에 있을 때 $\overline{AP}+\overline{BP}$가 최소이다.

이때 $\overline{C_1C_2}=\sqrt{(10+2)^2+(-2-3)^2}=13$이므로 구하는 최솟값은

$\overline{C_1C_2}$의 길이에서 두 원의 반지름의 길이를 뺀 값

$13-(3+1)=9$ 답 ②

1514 전략 동전의 앞면이 a회, 뒷면이 b회 나왔으므로 (가)의 평행이동을 a번, (나)의 평행이동을 b번 한다.

풀이 동전의 앞면이 a회, 뒷면이 b회 나왔으므로 점 P(1, 1)이 이동한 점의 좌표는

$(1+a-b,\ 1-a+3b)$

이 점이 점 (5, 3)과 일치하므로

$1+a-b=5$, $1-a+3b=3$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$a=7$, $b=3$

따라서 $n=a+b=10$이므로

$a-b+n=14$ 답 14

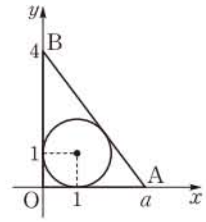
1515 전략 삼각형은 평행이동해도 모양이 변하지 않고, 원은 평행이동해도 반지름의 길이가 변하지 않음을 이용한다.

풀이 $x^2+y^2-10x-12y+60=0$에서

$(x-5)^2+(y-6)^2=1$

즉 △O′A′B′의 내접원의 반지름의 길이가 1이므로 △OAB의 내접원의 반지름의 길이도 1이다.

오른쪽 그림과 같이 △OAB의 내접원의 중심의 좌표는 (1, 1)이고 내접원은 직선 AB와 접하므로 내접원의 중심 (1, 1)과 직선 AB 사이의 거리는 내접원의 반지름의 길이인 1과 같다.



이때 직선 AB의 방정식은

$\frac{x}{a}+\frac{y}{4}=1$, 즉 $4x+ay-4a=0$

이므로

$\frac{|4+a-4a|}{\sqrt{4^2+a^2}}=1$, $\quad |4-3a|=\sqrt{16+a^2}$

양변을 제곱하면 $\quad 16-24a+9a^2=16+a^2$

$8a^2-24a=0$, $\quad 8a(a-3)=0$

$\therefore a=3\ (\because a>0)$

한편 점 (1, 1)을 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 점의 좌표가 (5, 6)이라 하면

$1+m=5$, $1+n=6$ $\quad\therefore m=4$, $n=5$

따라서 점 A′의 좌표는

$(3+4,\ 0+5)$, 즉 $(7,\ 5)$ 답 (7, 5)

1516 전략 평행이동한 포물선의 방정식과 직선의 방정식을 연립하여 얻은 이차방정식의 두 실근이 두 점 P, Q의 x좌표임을 이용한다.

풀이 평행이동한 포물선의 방정식은

$y-2=(x+3)^2-4(x+3)$ $\quad\therefore y=x^2+2x-1$ ··· ❶

두 점 P, Q의 x좌표를 각각 p, q라 하면 p, q는 이차방정식

$x^2+2x-1=ax$, 즉 $x^2+(2-a)x-1=0$

의 두 실근이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$p+q=a-2$ ······ ㉠ ··· ❷

$\overline{PQ}$의 중점이 원점이므로

$\frac{p+q}{2}=0$ $\quad\therefore p+q=0$ ······ ㉡

㉠, ㉡에서 $\quad a-2=0$ $\quad\therefore a=2$ ··· ❸

답 2

채점 기준	비율
❶ 평행이동한 포물선의 방정식을 구할 수 있다.	30 %
❷ 두 점 P, Q의 x좌표의 합을 a에 대한 식으로 나타낼 수 있다.	50 %
❸ a의 값을 구할 수 있다.	20 %

1517 전략 직선이 원의 넓이를 이등분하려면 원의 중심을 지나야 함을 이용한다.

풀이 ㄱ. 원을 평행이동해도 원의 반지름의 길이는 변하지 않으므로 원 C의 반지름의 길이는 3이다.

ㄴ. 원 C의 방정식은

$(x-m)^2+(y-n-1)^2=9$

원 C가 x축에 접하려면 $\quad |n+1|=3$

$n+1=-3$ 또는 $n+1=3$

$\therefore n=-4$ 또는 $n=2$

따라서 원 C가 x축에 접하도록 하는 실수 n의 값은 2개이다.

ㄷ. 직선 $y=\frac{n+1}{m}x$가 원 C의 넓이를 이등분하려면 원 C의 중심 $(m,\ n+1)$을 지나야 한다.

$x=m$, $y=n+1$을 직선의 방정식에 대입하면

$$n+1=\frac{n+1}{m}\cdot m$$

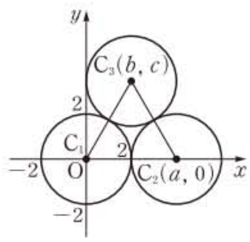
따라서 직선 $y=\frac{n+1}{m}x$는 원 C의 넓이를 이등분한다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다. 답 ③

1518 전략 세 원이 서로 외접하므로 두 원의 중심 사이의 거리는 두 원의 반지름의 길이의 합과 같음을 이용한다.

풀이 세 원 C_1, C_2, C_3의 중심을 각각 C_1, C_2, C_3이라 하면

$$C_1(0,\ 0),\ C_2(a,\ 0),\ C_3(b,\ c)$$



두 원 C_1, C_2가 외접하므로

$$|a|=4 \quad \cdots\cdots ㉠$$

두 원 C_1, C_3이 외접하므로

$$\sqrt{b^2+c^2}=4$$

$$\therefore b^2+c^2=16 \quad \cdots\cdots ㉡$$

두 원 C_2, C_3이 외접하므로

$$\sqrt{(b-a)^2+c^2}=4$$

$$\therefore (b-a)^2+c^2=16 \quad \cdots\cdots ㉢$$

㉠, ㉡, ㉢을 연립하여 풀면

$$|a|=4,\ |b|=2,\ |c|=2\sqrt{3}$$

$$\therefore |abc|=|a||b||c|=16\sqrt{3}$$

답 ③

다른 풀이 $\overline{C_1C_2}=\overline{C_2C_3}=\overline{C_3C_1}=4$이므로 $\triangle C_1C_2C_3$은 정삼각형이다.

$$\therefore |a|=4,\ |b|=\frac{1}{2}\cdot 4=2,\ |c|=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 4=2\sqrt{3}$$

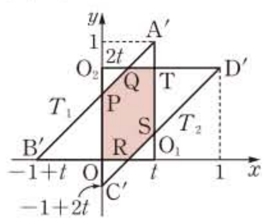
1519 전략 평행이동한 점의 좌표와 두 삼각형 T_1, T_2가 만나서 생기는 점의 좌표를 t에 대한 식으로 나타낸다.

풀이 세 점 O, A, B를 x축의 방향으로 t만큼 평행이동한 점을 각각 O_1, A′, B′이라 하면

$$O_1(t,\ 0),\ A'(t,\ 1),\ B'(-1+t,\ 0)$$

세 점 O, C, D를 y축의 방향으로 $2t$만큼 평행이동한 점을 각각 O_2, C′, D′이라 하면

$$O_2(0,\ 2t),\ C'(0,\ -1+2t),\ D'(1,\ 2t)$$



두 삼각형 T_1, T_2의 내부의 공통부분이 육각형 모양이 되려면 $\overline{A'B'}$이 $\overline{O_2C'}$, $\overline{O_2D'}$과 각각 점 A′, B′이 아닌 점에서 만나야 하고, $\overline{C'D'}$이 $\overline{O_1B'}$, $\overline{O_1A'}$과 각각 점 C′, D′이 아닌 점에서 만나야 한다.

즉 $0<t<1$, $0<2t<1$이어야 하므로

$$0<t<\frac{1}{2} \quad \cdots\cdots ㉠$$

$\overline{A'B'}$이 $\overline{O_2C'}$, $\overline{O_2D'}$과 만나는 점을 각각 P, Q라 하고, $\overline{C'D'}$이 $\overline{O_1B'}$, $\overline{O_1A'}$과 만나는 점을 각각 R, S라 하면

$$\overline{OP}=\overline{OB'}=1-t,\ \overline{OR}=\overline{OC'}=1-2t,$$

$$\overline{O_2Q}=\overline{O_2P}=\overline{OO_2}-\overline{OP}=2t-(1-t)=3t-1,$$

$$\overline{O_1S}=\overline{O_1R}=\overline{OO_1}-\overline{OR}=t-(1-2t)=3t-1$$

이므로

$$P(0,\ 1-t),\ Q(3t-1,\ 2t),\ R(1-2t,\ 0),\ S(t,\ 3t-1)$$

조건을 만족시키는 육각형이 만들어지려면

(점 P의 y좌표)<(점 O_2의 y좌표)<(점 A′의 y좌표)이어야 하므로

$$1-t<2t<1 \qquad \therefore \frac{1}{3}<t<\frac{1}{2} \quad \cdots\cdots ㉡$$

또 (점 C′의 y좌표)<(점 O_1의 y좌표)<(점 S의 y좌표)이어야 하므로

$$-1+2t<0<3t-1 \qquad \therefore \frac{1}{3}<t<\frac{1}{2} \quad \cdots\cdots ㉢$$

㉠, ㉡, ㉢에서 두 삼각형 T_1, T_2의 내부의 공통부분이 육각형 모양이 되도록 하는 t의 값의 범위는

$$\frac{1}{3}<t<\frac{1}{2}$$

$$\therefore a=\frac{1}{2}$$

이때 $\overline{A'O_1}$, $\overline{O_2D'}$의 교점을 T라 하면 육각형의 넓이는

$$\square OO_1TO_2-\triangle O_1SR-\triangle O_2PQ$$

$$=t\cdot 2t-2\cdot\frac{1}{2}(3t-1)^2$$

$$=-7t^2+6t-1$$

$$=-7\left(t-\frac{3}{7}\right)^2+\frac{2}{7}$$

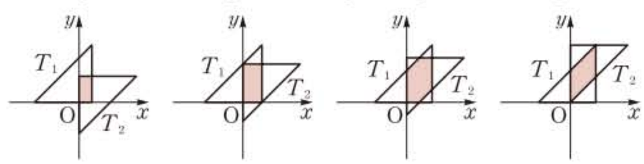
이므로 $t=\frac{3}{7}$일 때 최댓값 $\frac{2}{7}$를 갖는다.

즉 $M=\frac{2}{7}$이므로 $\quad a+M=\frac{11}{14}$

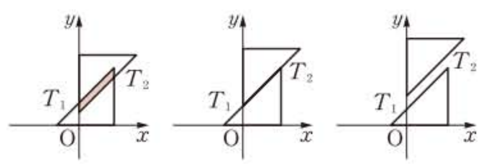
답 ①

참고 양의 실수 t의 값의 범위에 따른 두 삼각형 T_1, T_2의 위치는 다음과 같다.

$0<t<\frac{1}{3}$일 때, $\quad t=\frac{1}{3}$일 때, $\quad \frac{1}{3}<t<\frac{1}{2}$일 때, $\quad t=\frac{1}{2}$일 때,



$\frac{1}{2}<t<\frac{2}{3}$일 때, $\quad t=\frac{2}{3}$일 때, $\quad t>\frac{2}{3}$일 때,



1520 전략 원 O'의 방정식을 구한 후 두 원의 공통인 현의 방정식을 구한다.

풀이 원 O'의 방정식은

$$(x+1)^2+y^2=1 \quad \cdots❶$$

두 원 O, O'의 공통인 현 AB의 방정식은

$$x^2+(y-1)^2-1-\{(x+1)^2+y^2-1\}=0$$

$$\therefore y=-x \quad \cdots❷$$

따라서 점 $(6,\ 2)$를 직선 $y=-x$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $(-2,\ -6)$이므로

$$a=-2,\ b=-6 \quad \cdots❸$$

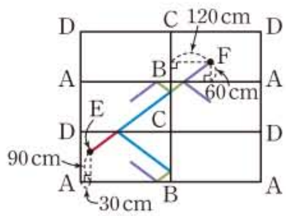
$$\therefore a+b=-8 \quad \cdots❹$$

답 −8

채점 기준	비율
❶ 원 O'의 방정식을 구할 수 있다.	20 %
❷ 직선 AB의 방정식을 구할 수 있다.	30 %
❸ a, b의 값을 구할 수 있다.	40 %
❹ $a+b$의 값을 구할 수 있다.	10 %

1521 전략 당구대의 각 변에 대한 대칭이동을 이용하여 공이 움직인 거리를 구한다.

풀이 □ABCD를 변 BC와 변 DC에 대하여 대칭이동하여 오른쪽 그림과 같이 나타내면 노란 공이 움직인 거리는 $\overline{EF}$의 길이와 같다.



따라서 구하는 거리는

$$\overline{EF}=\sqrt{(\underbrace{240+120}_{270-30})^2+(\underbrace{60+150+60}_{150-90})^2}$$
$$=\sqrt{360^2+270^2}=450\,(\text{cm})$$

답 450 cm

1522 전략 주어진 규칙에 따라 점 P_1, P_2, P_3, P_4, …의 좌표를 차례대로 구하여 규칙을 찾는다.

풀이 점 $P_1(3,\ 2)$에서 $3\cdot2=6>0$, $3>2$이므로 규칙 (가)에 의하여 점 P_1을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점 P_2의 좌표는

$(2,\ 3)$

점 $P_2(2,\ 3)$에서 $2\cdot3=6>0$, $2<3$이므로 규칙 (나)에 의하여 점 P_2를 x축에 대하여 대칭이동한 점 P_3의 좌표는

$(2,\ -3)$

점 $P_3(2,\ -3)$에서 $2\cdot(-3)=-6<0$이므로 규칙 (다)에 의하여 점 P_3을 y축에 대하여 대칭이동한 점 P_4의 좌표는

$(-2,\ -3)$

점 $P_4(-2,\ -3)$에서 $(-2)\cdot(-3)=6>0$, $-2>-3$이므로 규칙 (가)에 의하여 점 P_4를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점 P_5의 좌표는

$(-3,\ -2)$

점 $P_5(-3,\ -2)$에서 $(-3)\cdot(-2)=6>0$, $-3<-2$이므로 규칙 (나)에 의하여 점 P_5를 x축에 대하여 대칭이동한 점 P_6의 좌표는

$(-3,\ 2)$

점 $P_6(-3,\ 2)$에서 $(-3)\cdot2=-6<0$이므로 규칙 (다)에 의하여 점 P_6을 y축에 대하여 대칭이동한 점 P_7의 좌표는

$(3,\ 2)$ ← 점 P_1의 좌표와 같다.

즉 점 P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7, …은 6개의 점 $(3,\ 2)$, $(2,\ 3)$, $(2,\ -3)$, $(-2,\ -3)$, $(-3,\ -2)$, $(-3,\ 2)$의 순서로 반복된다.

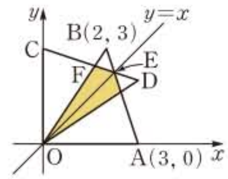
이때 $50=6\cdot8+2$이므로 점 P_{50}의 좌표는 점 P_2의 좌표인 $(2,\ 3)$과 같다.

따라서 $x_{50}=2$, $y_{50}=3$이므로 $10x_{50}+y_{50}=23$

답 23

1523 전략 직선 AB의 방정식을 구한 후 직선 CD는 직선 AB를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 것임을 이용하여 직선 CD의 방정식을 구한다.

풀이 오른쪽 그림과 같이 $\overline{AB}$와 직선 $y=x$의 교점을 E, $\overline{OB}$와 $\overline{CD}$의 교점을 F라 하면 구하는 넓이는 △OEF의 넓이의 2배와 같다.



직선 AB의 방정식은

$$y=\frac{0-3}{3-2}(x-3) \qquad \therefore\ y=-3x+9$$

$y=-3x+9$, $y=x$를 연립하여 풀면 $x=\frac{9}{4}$, $y=\frac{9}{4}$

즉 $E\left(\frac{9}{4},\ \frac{9}{4}\right)$이므로 $\overline{OE}=\sqrt{\left(\frac{9}{4}\right)^2+\left(\frac{9}{4}\right)^2}=\frac{9\sqrt{2}}{4}$

직선 CD는 직선 AB를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 것과 같으므로 그 방정식은

$$x=-3y+9 \qquad \therefore\ y=-\frac{1}{3}x+3 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

직선 OB의 방정식은 $y=\frac{3}{2}x$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $x=\frac{18}{11}$, $y=\frac{27}{11}$

즉 $F\left(\frac{18}{11},\ \frac{27}{11}\right)$이므로 점 F와 직선 $y=x$, 즉 $x-y=0$ 사이의 거리는

$$\frac{\left|\frac{18}{11}-\frac{27}{11}\right|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{9\sqrt{2}}{22}$$

따라서 구하는 넓이는

$$2\triangle OEF=2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{9\sqrt{2}}{4}\cdot\frac{9\sqrt{2}}{22}=\frac{81}{44}$$

답 $\frac{81}{44}$

다른 풀이 두 점 E, F에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 E′, F′이라 하면 두 점 E, F의 x좌표가 각각 $\frac{9}{4}$, $\frac{18}{11}$이므로

$$\triangle OEC : \triangle OEF=\overline{EC} : \overline{EF}=\overline{E'O} : \overline{E'F'}$$
$$=\frac{9}{4} : \left(\frac{9}{4}-\frac{18}{11}\right)=11 : 3$$
$$\therefore\ \triangle OEF=\frac{3}{11}\triangle OEC=\frac{3}{11}\cdot\frac{1}{2}\cdot3\cdot\frac{9}{4}=\frac{81}{88}$$

따라서 구하는 넓이는

$$2\triangle OEF=2\cdot\frac{81}{88}=\frac{81}{44}$$

1524 전략 방정식 $f(-x,\ -y+1)=0$이 나타내는 도형은 방정식 $f(x,\ y)=0$이 나타내는 도형을 평행이동 또는 대칭이동한 도형임을 이용한다.

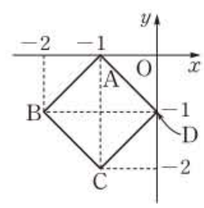
풀이 방정식 $f(x,\ y)=0$이 나타내는 도형을 y축의 방향으로 -1만큼 평행이동하면

$f(x,\ y+1)=0$

방정식 $f(x,\ y+1)=0$이 나타내는 도형을 원점에 대하여 대칭이동하면

$f(-x,\ -y+1)=0$

따라서 방정식 $f(-x,\ -y+1)=0$이 나타내는 도형은 주어진 도형을 y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 후 원점에 대하여 대칭이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



이 도형 위의 점과 원점 사이의 거리의 최댓값은 원점과 점 B 또는 점 C 사이의 거리이므로

$\sqrt{(-2)^2+(-1)^2}=\sqrt{5}$

또 최솟값은 원점과 직선 AD 사이의 거리이고 직선 AD의 방정식은 $x+y+1=0$이므로

$\dfrac{|1|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

따라서 구하는 곱은 $\sqrt{5}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{\sqrt{10}}{2}$ 　　답 $\dfrac{\sqrt{10}}{2}$

1525 전략 점 A를 원 위의 임의의 점 P에 대하여 대칭이동한 점을 A′이라 할 때, $\overline{AA'}$의 중점이 점 P임을 이용한다.

풀이 원 위의 임의의 점을 $P(a, b)$, 점 $A(-2, 0)$을 점 P에 대하여 대칭이동한 점을 $A'(x, y)$라 하면

$a=\dfrac{x-2}{2},\ b=\dfrac{y}{2}$ ⋯⋯ ㉠

이때 점 $P(a, b)$는 원 $x^2+y^2=1$ 위의 점이므로

$a^2+b^2=1$

위의 식에 ㉠을 대입하면 구하는 자취의 방정식은

$\left(\dfrac{x-2}{2}\right)^2+\left(\dfrac{y}{2}\right)^2=1$

$\therefore (x-2)^2+y^2=4$ 　　답 ④

1526 전략 점 A를 접은 선에 대하여 대칭이동한 점이 점 B임을 이용하여 접은 선의 방정식을 구한다.

풀이 점 A를 접은 선에 대하여 대칭이동한 점이 점 B이므로 접은 선은 $\overline{AB}$의 중점을 지나고 직선 AB와 수직이다.

이때 $\overline{AB}$의 중점의 좌표는 (3, 1)이고, 직선 AB의 기울기는 $-\dfrac{1}{3}$이므로 접은 선의 방정식은

$y-1=3(x-3)$ 　$\therefore y=3x-8$ ⋯ ❶

따라서 점 C를 직선 $y=3x-8$에 대하여 대칭이동한 점이 점 D이므로 $\overline{CD}$의 중점 $\left(\dfrac{m+3}{2}, \dfrac{n+2}{2}\right)$가 직선 $y=3x-8$ 위의 점이다. 즉

$\dfrac{n+2}{2}=3\cdot\dfrac{m+3}{2}-8$ 　$\therefore 3m-n=9$ ⋯⋯ ㉠

또 직선 CD가 직선 $y=3x-8$과 수직이므로

$\dfrac{n-2}{m-3}\cdot 3=-1$ 　$\therefore m+3n=9$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $m=\dfrac{18}{5},\ n=\dfrac{9}{5}$ ⋯ ❷

$\therefore \dfrac{m}{n}=\dfrac{18}{5}\cdot\dfrac{5}{9}=2$ ⋯ ❸

답 2

채점 기준	비율
❶ 접은 선의 방정식을 구할 수 있다.	40 %
❷ m, n의 값을 구할 수 있다.	50 %
❸ $\dfrac{m}{n}$의 값을 구할 수 있다.	10 %

1527 전략 점 A를 직선 $y=2x-2$에 대하여 대칭이동한 점 A′의 좌표를 구하고, 두 직선 A′B와 $y=2x-2$의 교점의 좌표를 구한다.

풀이 점 $A(4, 1)$을 직선 $y=2x-2$에 대하여 대칭이동한 점을 $A'(a, b)$라 하자.

$\overline{AA'}$의 중점 $\left(\dfrac{a+4}{2}, \dfrac{b+1}{2}\right)$이 직선 $y=2x-2$ 위의 점이므로

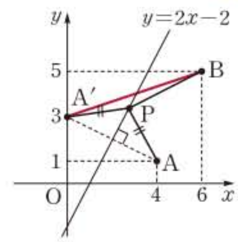
$\dfrac{b+1}{2}=2\cdot\dfrac{a+4}{2}-2$ 　$\therefore 2a-b=-3$ ⋯⋯ ㉠

직선 AA′과 직선 $y=2x-2$가 수직이므로

$\dfrac{b-1}{a-4}\cdot 2=-1$ 　$\therefore a+2b=6$ ⋯⋯ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=0,\ b=3$

$\therefore A'(0, 3)$ ⋯ ❶



$\overline{AP}=\overline{A'P}$이므로

$\overline{AP}+\overline{BP}=\overline{A'P}+\overline{BP}$
$\geq\overline{A'B}$
$=\sqrt{6^2+(5-3)^2}$
$=2\sqrt{10}$

따라서 $\overline{AP}+\overline{BP}$의 최솟값은 $2\sqrt{10}$이다. ⋯ ❷

또 직선 A′B의 방정식은

$y=\dfrac{5-3}{6-0}x+3$ 　$\therefore y=\dfrac{1}{3}x+3$

$y=\dfrac{1}{3}x+3,\ y=2x-2$를 연립하여 풀면

$x=3,\ y=4$

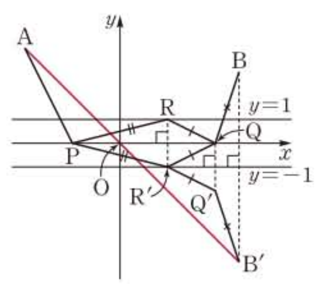
따라서 $\overline{AP}+\overline{BP}$의 값이 최소일 때의 점 P의 좌표는

(3, 4) ⋯ ❸

답 $2\sqrt{10}$, (3, 4)

채점 기준	비율
❶ 점 A를 직선 $y=2x-2$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 구할 수 있다.	40 %
❷ $\overline{AP}+\overline{BP}$의 최솟값을 구할 수 있다.	30 %
❸ 점 P의 좌표를 구할 수 있다.	30 %

1528 전략 점을 적당히 대칭이동하여 $\overline{AP}+\overline{PR}+\overline{RQ}+\overline{QB}$의 최솟값과 길이가 같은 선분을 찾는다.



풀이 점 R는 직선 $y=1$ 위에 있으므로 점 R를 x축에 대하여 대칭이동한 점을 R′이라 하면 점 R′은 직선 $y=-1$ 위에 있다.

두 점 B, Q를 직선 $y=-1$에 대하여 대칭이동한 점을 각각 B′, Q′이라 하면 $\overline{PR}=\overline{PR'}$, $\overline{RQ}=\overline{R'Q}=\overline{R'Q'}$, $\overline{QB}=\overline{Q'B'}$이므로

$\overline{AP}+\overline{PR}+\overline{RQ}+\overline{QB}=\overline{AP}+\overline{PR'}+\overline{R'Q'}+\overline{Q'B'}$
$\geq\overline{AB'}$

이때 $B'(5, a)$라 하면 $\overline{BB'}$의 중점이 직선 $y=-1$ 위에 있으므로

$\dfrac{3+a}{2}=-1$ 　$\therefore a=-5$

따라서 $B'(5, -5)$이므로 구하는 최솟값은

$\overline{AB'}=\sqrt{(5+4)^2+(-5-4)^2}=9\sqrt{2}$ 　　답 ④